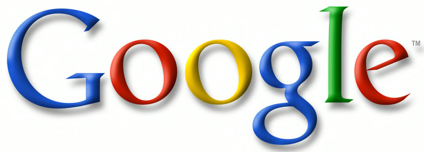
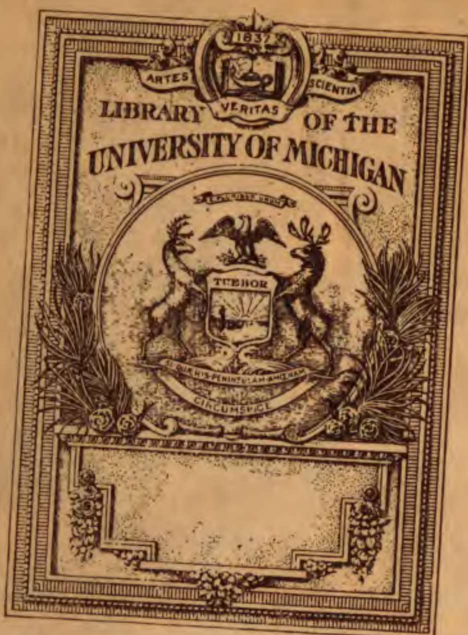
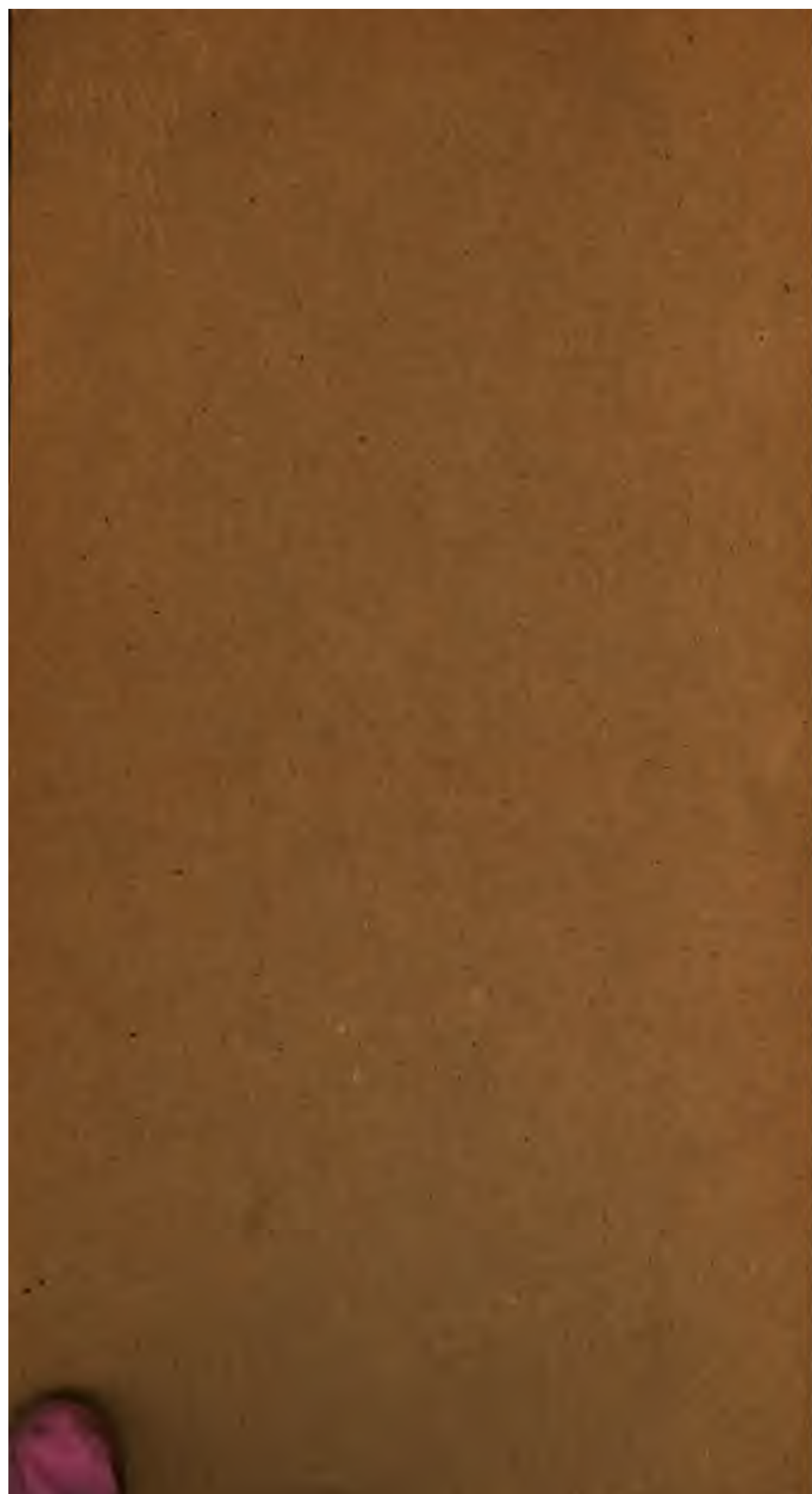



1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE



VERZAMELING

VAN

WISKUNDIGE

VOORSTELLEN,

DOOR DE

LEDEN

VAN HET

WISKUNDIGE

GENOOTSCHAP,

ONDER DE ZINSPREUK:

EEN ONVERMOEIDE ARBEID KOMT ALLES TE BOVEN,

ELKANDER TOT ONDERLINGE
OEFENING OPGEGEVEN.

VIJFDE DEEL.

(Gedrukt voor Rekening van het Genootschap.)



Te AMSTERDAM, bij

H. WEIJTING, Boekverkooper, op den Nieuwendijk, bij den Dam, N°. 245.

1830.

Gedrukt ter Boekdrukkerij van P. E. BRIËT te Amsterdam.

Geene Exemplaren worden voor echt erkend, dan die, welke aldus, volgens de Wet, onderteekend zijn, door

Tweede Secretaris.

Van de vroegere Deelen dezer Verzameling van Wiskundige Voorstellen, zijn complete Exemplaren of afzonderlijke Stukjes, om te completeren, te bekomen, bij den Heer H. WEIJTING, Boekhouder en tevens Uitgever van de Werken des Genootschaps.

NAAMLIJST
DER
LEDEN
VAN HET
WISKUNDIG GENOOTSCHAP,

Onder de Zinspreuk:

EEN ONVERMOEIDE ARBEID KOMT ALLES TE BOVEN,

Te Amsterdam.

Gerangschikt naar den tijd van hun Lidmaatschap,
A°. MDCCCXXX.

BESTUURDERS.

C. F. JULIUS, Voorzitter.
J. C. VAN SETTEN.
H. VAN WESSEM, JACOBUSZ.
P. PREIJER.
A. VAN DER SWAN.
J. VAN DER LINDEN.
} te Amsterdam.

J. P. DELPRAT, *Kapitein-Ingenieur; waarnemend Hoogleeraar in de Natuur- en Wiskunde aan de Koninklijke Militaire Akademie, te Breda; Correspondent der Eerste Klasse van het Koninklijk-Nederlandsche Instituut van Wetenschappen, Letterkunde en Schoone Kunsten; Lid van het Provinciaal Utrechtsch Genootschap, en van het Bataafsch Genootschap van Proefondervindelijke Wijsbegeerte*, Eerste Secretaris.

H. G. WITLAGE, Tweede Secretaris,
H. WEIJTING, Boekhouder,
} te Amsterdam.

Buitengewone Leden van Verdienften in het Wetenfchappelijke Vak.

U. HUGUENIN, Ridder van de Orde van den Nederlandfchen Leeuw; Generaal-Majoor; Directeur van de Koninklijke IJzer-Gefchutgieterij, te Luik.

Zijne Excelentie de Luitenant-Generaal C. R. T. Baron KRAYENHOFF, Groot-Kruis der Militaire Willems-orde; Lid van het Koninklijk-Nederlandfche Inftituut van Wetenfchappen, Letterkunde en Schoone Kunsten, enz., te Nijmegen.

J. H. VOET, Ridder van de Militaire Willems-orde, 3de Klasfe; Luitenant-Generaal; Correspondent der Eerfte Klasfe van het Koninklijk-Nederlandfche Inftituut van Wetenfchappen, Letterkunde en Schoone Kunsten, enz., te Delft.

Jonkheer J. M. C. VAN UTENHOVE, Lid van het Koninklijk-Nederlandfche Inftituut van Wetenfchappen, Letterkunde en Schoone Kunsten, enz., te Jutphaas.

A. VAN DEN ENDE, Ridder van de Orde van den Nederlandfchen Leeuw; Hoofd-Infpecteur van het Middelbaar en Lager Onderwijs; Lid van het Koninklijk-Nederlandfche Inftituut van Wetenfchappen, Letterkunde en Schoone Kunsten, enz., te Haarlem.

JACOB DE GELDER, Math. Mag. en Phil. Nat. Doctor; Hoogleeraar in de Wis- en Natuurkundige Faculteit aan 's Rijks Hoogefchool, enz., te Leijden.

KLAAS SMIT, Oud-Beftuurder, Boekhouder en Secretaris des Genootfchaps, te Amfterdam.

J. P. DELPRAT, Kapitein-Ingenieur; waarnemend Hoogleeraar in de Natuur- en Wiskunde aan de Koninklijke Militaire Akademie, te Breda; Correspondent der Eerfte Klasfe van het Koninklijk-Nederlandfche Inftituut van Wetenfchappen, Letterkunde en Schoone Kunsten; Lid van het Provinciaal Utrechtsch Genootfchap, en van het Bataafsch Genootfchap van Proefondervindelijke Wijsbegeerte; Eerfte Secretaris des Genootfchaps.

G. MOLL, Ridder van de Orde van den Nederlandfchen Leeuw; Lid van het Koninklijk-Nederlandfche Inftituut van Wetenfchappen, Letterkunde en Schoone Kunsten, enz., enz.; Hoogleeraar in de Wis- en Natuurkundige Wetenfchappen aan de Hoogefchool, te Utrecht.

JOH.

JOH. BUIJS, Lid van het Koninklijk-Nederlandsche Instituut van Wetenschappen, Letterkunde en Schoone Kunsten; Oud Lector in de Natuurkunde in de Maatschappij: *Felix Meritis*, enz., enz., te Amsterdam.

Buitengewone Leden van Verdiensten in het Huishoudelijke Vak.

CHRISTOFFER MEIJLINK, te Voorburg bij 's Gravenhage.
H. VAN WESSEM JACOBUSZ., te Amsterdam.
B. VAN HEIJNINGEN, te Amsterdam.
C. TERMARS, te Amsterdam.
H. G. WITLAGE, te Amsterdam, Tweede Secretaris des Genootschaps.
H. WEIJTING, te Amsterdam, Boekhouder des Genootschaps.

Leden van de Wetenschappelijke Commissie.

J. DE GELDER, Hoogleeraar, te Leijden. (zie boven).
J. H. VOET. (zie boven).
U. HUGUENIN. (zie boven).
J. P. DELPRAT, *Hoogleeraar, te Breda.* (zie boven).

Bibliothecaris.

J. VAN DER LINDEN, te Amsterdam. (zie boven.)

Leden van Verdiensten der Tweede Klasse.

A. L. HECTOR, te Middelburg.
A. FOCK, te Amsterdam.
P. VAN EEGHEN, CHZ., te Amsterdam.
R. LOBATTO, Adviseur wegens de Maten en Gewigten bij het Ministerie van Binnenlandsche Zaken, te 's Gravenhage.
F. J STAMKART, Onderwijzer in de Wis- en Zeevaartkunde, te Antwerpen.

R. VAN WIJK JACOBUSZ., Litt. Hum. Doctor, Mede-Hoofdonderwijzer aan het Stads Instituut van Opvoeding en Onderwijs, te Kampen.

W. TOP WZN., Kostschoolhouder, te Zierikzee.

J. BASSAN, te Amsterdam.

J. JONKHERT, te Amsterdam.

Correspondenten.

A. HARREBOMEE, te Heemstede.

C. MEIJLINK, te Voorburg.

J. ARBON, Examinator der Stuurlieden in dienst van Z. M. den Koning der Nederlanden, te Rotterdam.

R. VAN WIJK JACOBSZ., te Kampen.

A. L. HECTOR, te Middelburg.

Gewone Leden.

B. VAN HEIJNINGEN, te Amsterdam, (zie boven).

P. HOUTTUIN Gz., te Hoorn.

L. KOOPS, te Hilversum.

W. C. BAKKER, te Ilpendam.

KLAAS SMIT, te Amsterdam. (zie boven).

A. VOLKERSE, Notaris te Monnikendam.

A. HARREBOMEE, te Heemstede.

A. HORSTMAN, te Amsterdam.

W. J. VAN HEMERT, te 's Gravenhage.

J. H. NIEUWVEEN, Stads Kost- en Dag-Schoolhouder te Leijden.

J. BUIJS, te Amsterdam. (zie boven).

G. MOLL, Hoogleeraar te Utrecht. (zie boven).

H. G. WITLAGE, te Amsterdam. (zie boven).

A. L. HECTOR, te Middelburg. (zie boven).

J. C. VAN SETTEN, Bestuurder, te Amsterdam.

A. VAN DER SWAN, Bestuurder, te Amsterdam.

L. VAN HEUSDEN, aan den Uithoorn.

D. H. WATERMAN, te Nieuwkoop aan den Rijn.

M. LEMANS, Leeraar in de Wiskunde aan de Latijnsche Scholen, te Amsterdam.

P. VAN EEGHEN Chz., te Amsterdam.

A. VAN DER SPUIJ, te 's Gravenhage.

J. P. BAUDET, te Vassen.

C. LANTZ, te Amsterdam.

R. LOBATTO, te 's Gravenhage. (zie boven).

J. DEELEMAN, te Amsterdam.

A. F. DE PAUW, te Amsterdam.

S. J. MULDER, te Amsterdam.

G. S. LEENEMAN, te Amsterdam.

A. W. HUIDEKOPER, te Amsterdam.

A. TOLLUS, Architect en Landmeter, te 's Gravenhage.

H. F. FIJNJE, Ingenieur bij den Waterstaat en der Publieke Werken, te Groningen.

J. VAN DER LINDEN, Bestuurder en Bibliothecaris des Genootschaps, te Amsterdam.

J. ARBON, Examinator der Stuurlieden in dienst van Z. M., te Rotterdam.

P. PREIJER, Bestuurder, te Amsterdam.

C. I. GLAVIMANS, Onder-Constructeur bij het Departement der *Marine van de Maze, te Rotterdam.*

J. M. PAUW, Kapitein Ingenieur, te Dendermonde.

J. VAN WIJK Roeldz., Lid van het Provinciaal Utrechtsch Genootschap, en Hoofd-Onderwijzer aan het Stads Instituut van Opvoeding en Onderwijs, te Kampen.

C. J. BOLTEN, Ingenieur van den Waterstaat en der Publieke Werken, te Leeuwarden.

F. P. GISIUS NANNING, 1e Luitenant-Ingenieur, Fungerend Kapitein der Genie aan de Koninklijke Militaire Akademie, te Breda.

J. E. DUIJVENÉ, Kapitein Ingenieur, te Gent.

W. HORA SICCAMA, Ridder van de Militaire Willems Orde, 4e Klasse, en 1e Luitenant ter Zee in de Middell. Zee.

R. VAN WIJK Jacobusz., te Kampen. (zie boven).

P. J. PRINSEN, Directeur en Onderwijzer van de Koninklijke Kweekschool voor Onderwijzers, te Haarlem.

S. KLIJNSMA, Kapitein-Ingenieur, te 's Hage.
J. NICOLAIJ, Majoor der Artillerie, te Luik.
M. B. JUNG, Onderwijzer, te Middelburg.
C. J. DE JONG, Kostschoolhouder, te Arnhem.
A. C. PIERSON, 1e Luitenant Ingenieur, aan den Helder.
J. W. MARTINI, te 's Hertogenbosch.
J. VAN DER STOK, 1e Luitenant Ingenieur, te Oudenaarden.
J. P. DELPRAT, te Breda. (zie boven).
W. TOP Wz., te Zierikzee. (zie boven).
C. F. JULIUS, Bestuurder, te Amsterdam.
E. G. STAAL, te Zwol.
G. A. VAN KERKWIJK, 1e Luitenant Ingenieur, te Oudenaarden.
C. F. E. VAN INGEN, 1e Luitenant Ingenieur, te Oudenaarden.
J. KOOPS, Kostschoolhouder, te Amsterdam.
G. BRANDSTEDER, Beëedigd Landm. en Onderw., te Middelb.
C. VAN HEIJNSBERGEN, Art. Lib. Mag. Ph. et Med. Doctor en Professor voor de Wiskunde aan het Koninklijke Instituut voor de Marine, te Medemblik.
L. RIJSTERBORGH, Adspirant bij den Waterstaat en der Publieke Werken, te Middelburg.
P. T. GRINWIS, Fungerend Hoofd-Ingenieur voor den Waterstaat in de Provincie Drenthe, te Assen.
J. CARSTEN, 1e Luitenant Ingenieur, te Delfzijl.
P. DE PEREZ, Adelborst der 1e Klasse bij de Koninklijke Marine.
H. WEIJTING, te Amsterdam. (zie boven).
B. LUBBERS, te Elburg.
J. BASSAN, te Amsterdam. (zie boven).
J. KÖHLER, Kostschoolhouder, te Amsterdam.
J. B. VOLMER VAN BORN, te Leijden.
J. ACQUOY, te Amsterdam.
W. N. ROSE, 1e Luitenant Ingenieur, te Luik.
F. P. MASCHECK, 1e Luitenant Ingenieur, te Maastricht.
H. STROOTMAN, Leeraar der Wiskunde aan de Koninklijke Militaire Akademie, te Breda.
F. J. STAMKART, te Antwerpen. (zie boven).
J. JONKHERT, te Amsterdam. (zie boven).
A. VAN LEE, te Amsterdam.

J. LAGERWEIJ, Kostschoolhouder, te Geertruidenberg.
A. E. ANDRÉ DE LA PORTE, 2e Luitenant Ingenieur, te Menen.
A. R. T. DU BOSCH, 2e Luitenant Ingenieur, te Dendermonde.
F. J. EIJCKHOLT, 2e Luitenant Ingenieur, te Dendermonde.
P. H. VAN DER MEULEN, Luitenant der Artillerie, te Breda.
J. VORSTENBOSCH, 1e Luitenant bij de 12de Afdeeling Infanterie, te Arlon.
G. RAMAKERS, Kostschoolhouder, te Vollenhoven.
P. DOORMAN, 1e Luitenant der Artillerie, te Maastricht.
J. DOORMAN, 1e Luitenant der Artillerie, te Delft.
F. KAISER, Observator voor de Sterrekunde aan 's Rijks Hoogeschool, te Leijden.
N. J. SINGELS, Instituteur, te Amsterdam.
L. SIMONS, Onderwijzer in de Ned., Fransche, Latijnsche en Grieksche Talen en Regent van het Collegie, te Weerd.
C. J. VAN BRUSSEL, te Amsterdam.
G. H. MAASSEN, te Amsterdam.
P. HUIDEKOPER, te Amsterdam.
J. W. WINTER MOMMA, Kadet aan de Koninklijke Militaire Akademie, te Breda.
G. GRAAFLAND, te 's Gravenhage.
J. BANNENBERG, te Amsterdam.
W. JULIUS, Onderwijzer te Utrecht.
L. F. BEAULIEU, Kapitein Ingenieur, te Antwerpen.
E. OLIVIER Dz., Landmeter, te Dordrecht.
W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, Kadet aan de Koninklijke Militaire Akademie, te Breda.
H. J. LORENZ, Adspirant Ingenieur bij den Waterstaat te Haarlem.
C. VAN SCHAICK, te Amsterdam.
M. G. SNOER, te Amsterdam.
M. H. GODEFROI, te Amsterdam.
D. OUWERSLOOT, Kostschoolhouder, te Amsterdam.
J. N. CALTEN, 1e Luitenant der Artillerie aan het Koninklijke Instituut voor de Marine, te Medemblik.
C. BOOT, Adjunct-IJker, te Naarden.
C. E. H. HOMBACH, Kadet aan de Koninklijke Militaire Akademie, te Breda.

C. W. F. van LIJNDEN, Kadet aan de Koninklijke Militaire Akademie, te Breda.

J. H. MOSSEL, Kadet aan de Koninklijke Militaire Akademie, te Breda.

W. A. FROGER, Kadet aan de Koninklijke Militaire Akademie, te Breda.

M. de LEON, Kadet aan de Koninklijke Militaire Akademie, te Breda.

J. BADON GHIJBEN, Leeraar der Wiskunde aan de Koninklijke Militaire Akademie, te Breda.

A. MEIJER, te Breda.

N. I. BARENDS, te Amſterdam.

F. van HEUKELOM, te Amſterdam.

J. J. GASTMAN, te Amſterdam.

L. J. ULMAN, Arrondisſement-IJker, te Amſterdam.

J. MESSCHERT van VOLLENHOVEN, te Amſterdam.

M. STENVERS, Jz., te Amſterdam.

A. J. N. DIGNEFFE, Kadet aan de Koninklijke Militaire Akademie, te Breda.

C. C. KOCK, Kadet aan de Koninklijke Militaire Akademie, te Breda.

B. G. van KELL, te Hoorn.

JAN PHILIPP OTT, Student, te Leijden.

M. SALOMO, te Amſterdam.

JACOB SWART, Lector voor de Wis- en Zeevaartkunde van het Collegie *Zeemans-Hoop*, te Amſterdam.

ISAAC WARNSINCK, te Amſterdam.

M. L. GOEDE, te Amſterdam.

R. SPRUIT, 1e Leermeester bij de Diaconie Scholen, te Amſterdam.

ADRIANUS VERVOOREN, te Utrecht.

H. MARTENSZ. TIP, te Utrecht.

JACOB LUGT, te Amſterdam.

SIMON PRINCE, Kadet aan de Koninklijke Militaire Akademie, te Breda.

JAN SCHOTBORGH, Hzn., te Amſterdam.

J.

J. C. SINGELS, Opzigter bij den Waterſtaat, te Nieuwerſluis op het Eiland Voorne.

D. HOOLA VAN NOOTEN, te Amſterdam.

J. H. KROON, Leeraar der Wiskunde aan de Latijnſche Scholen, te Zutphen.

K. C. COX, Kadet aan de Koninklijke Militaire Akademie, te Breda.

A. L. A. QUACK, Kadet aan de Koninklijke Militaire Akademie, te Breda.

M. W. G. DE MAN, Kadet aan de Koninklijke Militaire Akademie, te Breda.

J. G. W. MERKES, 2e Kapitein Ingenieur, Lid van het Bataafsch Genootſchap van Proefondervindelijke Wijsbegeerte, te Namen.

K. E. A. VON HOFF, Kadet aan de Koninklijke Militaire Akademie, te Breda.

J. S. SPIJER, te Amſterdam.

F. H. F. BAUDET, Kostſchoolhouder, te 's Graveland.

H. VAN BLANKEN, Huisonderwijzer in de Wiskundige Weteņſchappen, te Zwol.

J. KOLLEWIJN, Onderwijzer aan het Inſtituut van Opvoeding en Onderwijs, te Kampen.

A. VOS, *Onderwijzer, te Amſterdam.*



WISKUNDIGE VOORSTELLEN

MET DERZELVER

ONTBINDINGEN.

I. VOORSTEL.

Door L. F. BEAULIEU.

Men vraagt de meetkunstige plaats te vinden van het doorsnijdingspunt van drie op elkander regthoekige vlakken, die gedurig eene omwentelings-paraboloïde aanraken?

OPGELOST *door* L. F. BEAULIEU *en* J. BADON GHYBEN.

OPLOSSING *van* L. F. BEAULIEU.

Men stelle zich drie onderling loodregte vlakken voor, elkander volgens de asfen AX, AY en AZ snijdende, en laat AX tevens de as der paraboloïde en A derzelver toppunt zijn, dan zijn de vergelijkingen van de makende parabool op het vlak der XY

$$y^2 = 2px \quad \text{en} \quad z = 0.$$

Een bol deszelfs middelpunt in A hebbende, heeft tot vergelijking

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

en zal de paraboloïde vervolgens eenen cirkel doorsnijden, wiens vlak evenwijdig aan dat der YZ zal zijn, en tot vergelijking hebben

$$x = \delta.$$

Indien men in deze vier vergelijkingen x, y en z als coördinaten der paraboloïde beschouwt, dan moeten dezelve te gelijker tijd plaats hebben, verdrijft men dus x, y en z uit dezelve, dan komt er

$$\delta^2 + 2p\delta = r^2;$$

hierin weder voor δ en r hunne waarden in x, y en z stellende, vindt men

$$y^2 + z^2 - 2px = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

voor de vergelijking der paraboloïde.

De vergelijking van een vlak dat deze paraboloïde in een punt aanraakt, wier coördinaten zijn x', y' en z', is in het algemeen

$$z'-z=(y'-y)\frac{\delta y}{\delta z}+(x'-x)\frac{\delta x}{\delta z}.$$

Hierin nu de waarde der differentiaal-quotienten uit de vergelijking (1) getrokken stellende, na vooraf in deze quotienten $x=x'$, $y=y'$ en $z=z'$ genomen te hebben, zoo vindt men na eenige herleiding voor de vergelijking van het rakende vlak

$$zz'+yy'-px=px' \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Door middel der formulen (1) en (2) kan men nu het Voorstel oplossen. Laat daartoe $x', y', z', x'', y'', z''$ en x''', y''', z''' de coördinaten der drie raakpunten, en α, β en γ die van het doorsnijdingspunt der drie rakende vlakken zijn; uit de vergelijking (1) hebben wij dan

$$\left.\begin{array}{l} z'^2+y'^2-2px'=0 \\ z''^2+y''^2-2px''=0 \\ z'''^2+y'''^2-2px'''=0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (3),$$

terwijl de vergelijking (2) geeft

$$\left.\begin{array}{l} \gamma z'+\beta y'-\alpha p=px' \\ \gamma z''+\beta y''-\alpha p=px'' \\ \gamma z'''+\beta y'''-\alpha p=px''' \end{array}\right\} \ldots\ldots (4).$$

Noemen wij nu A, B en C de vlakken, welke respectivelijk door de eerste, tweede en derde dezer laatste vergelijkingen worden voorgesteld, en laten wij verder door (P_1xy), (P_1xz) en (P_1yz) de hoeken aanduiden, welke eenig vlak P met de vlakken der coördinaten maakt, en stellen wij kortheidshalve

$$Cos.(A_1xy)=m, \quad Cos.(A_1xz)=m', \quad Cos.(A_1yz)=m'',$$
$$Cos.(B_1xy)=n, \quad Cos.(B_1xz)=n', \quad Cos.(B_1yz)=n'',$$
en
$$Cos.(C_1xy)=q, \quad Cos.(C_1xz)=q', \quad Cos.(C_1yz)=q''.$$

Daar nu de drie vlakken A, B en C zoowel als de drie vlakken der coördinaten regthoekig op elkander staan, zoo heeft men de bekende vergelijkingen

$$\left.\begin{array}{ll} m^2+n^2+q^2=1 & mm'+nn'+qq'=0 \\ m'^2+n'^2+q'^2=1 & mm''+nn''+qq''=0 \\ m''^2+n''^2+q''^2=1 & m'm''+n'n''+q'q''=0 \end{array}\right\} . (5).$$

Nu is voor den hoek, welke een vlak wiens vergelijking is $Ax+By+Cz=D$, met de vlakken der coördinaten maakt (I. R. Schmidt, *Hoogere Meetkunst*, §. 189)

Cos.

$$Cos. (P_1\, xy) = \frac{C}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}},$$

$$Cos. (P_1\, xz) = \frac{B}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}},$$

$$Cos. (P_1\, yz) = \frac{A}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}};$$

stellende dus kortheidshalve

$$x'^2 + y'^2 + p^2 = R^2,$$

$$x''^2 + y''^2 + p^2 = R'^2,$$

en

$$x'''^2 + y'''^2 + p^2 = R''^2,$$

dan zal men uit de vergelijkingen (4) afleiden

$$m = \frac{x'}{R} \qquad m' = \frac{y'}{R} \qquad m'' = -\frac{p}{R},$$

$$n = \frac{x''}{R'} \qquad n' = \frac{y''}{R'} \qquad n'' = -\frac{p}{R'},$$

$$q = \frac{x'''}{R''} \qquad q' = \frac{y'''}{R''} \qquad q'' = -\frac{p}{R''},$$

en dit in de vergelijkingen (5) gesteld geeft:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x'^2}{R^2} + \frac{x''^2}{R'^2} + \frac{x'''^2}{R''^2} &= 1 \\ \frac{y'^2}{R^2} + \frac{y''^2}{R'^2} + \frac{y'''^2}{R''^2} &= 1 \\ \frac{p^2}{R^2} + \frac{p^2}{R'^2} + \frac{p^2}{R''^2} &= 1 \end{aligned}\right\} (6) \qquad \left.\begin{aligned} \frac{x'y'}{R^2} + \frac{x''y''}{R'^2} + \frac{x'''y'''}{R''^2} &= 0 \\ \frac{px'}{R^2} + \frac{px''}{R'^2} + \frac{px'''}{R''^2} &= 0 \\ \frac{py'}{R^2} + \frac{py''}{R'^2} + \frac{py'''}{R''^2} &= 0 \end{aligned}\right\} (7).$$

Indien men nu de eerste der vergelijkingen (4) met $\frac{p}{R^2}$, de tweede met $\frac{p}{R'^2}$ en de derde met $\frac{p}{R''^2}$ vermenigvuldigt, en vervolgens bij elkander tel, dan zullen de coefficienten van γ en β, uit hoofde der twee laatste vergelijkingen (7), gelijk nul worden, en alzoo zullen β en γ uit de som verdwijnen, terwijl de coefficient van α, uit hoofde der derde vergelijking (6), gelijk aan -1 zal wezen; de uitkomst zal dus zijn

$$-\alpha = \frac{p^2 x'}{R^2} + \frac{p^2 x''}{R'^2} + \frac{p^2 x'''}{R''^2},$$

of voor px, px' en px'' hunne waarden uit (3) substitueerende

$$-\alpha = \tfrac{1}{2}p\left\{\frac{z'^2}{R^2}+\frac{z''^2}{R'^2}+\frac{z'''^2}{R''^2}\right\}+\tfrac{1}{2}p\left\{\frac{y'^2}{R^2}+\frac{y''^2}{R'^2}+\frac{y'''^2}{R''^2}\right\},$$

hetwelk met de twee eerste vergelijkingen (6) verbonden geeft

$$-\alpha = p.$$

Hetgeen alzoo aanwijst, dat het doorsnijdingspunt der drie rakende vlakken A, B en C bestendig gelegen is in een zelfde vlak, loodregt staande op de as der paraboloïdes, op eenen afstand van het toppunt gelijk aan de helft van den parameter.

Aanmerkingen uit de oplossing van J. Badon Ghyben.

Men vindt bij Puissant *Propositions de Géometrie*, p. 372, aangetoond, dat de meetkunstige plaats van het snijpunt van drie onderling loodregte vlakken, die altijd eene ellipsoïde of hyperboloïde aanraken, het oppervlak is van eenen met deze ligchamen concentrieken bol. De hier boven gevondene meetkunstige plaats komt hiermede overeen, want het middelpunt der paraboloïde op eenen oneindigen afstand zijnde, zoo wordt de straal van het bolvormig oppervlak oneindig, waardoor het oppervlak zelve in een plat vlak verandert.

De hier boven gevondene vergelijkingen geven nog aanleiding tot eenige merkwaardige bijzonderheden. Uit de vergelijkingen (4) heeft men, wegens den onderlingen loodregten stand der vlakken (I. R. Schmidt, *Hoogere Meetkunst*, §. 214)

$$\left.\begin{array}{l} z'z''+y'y''+p^2=0 \\ z''z'''+y''y'''+p^2=0 \\ z'z'''+y'y'''+p^2=0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (9),$$

het dubbel van de som dezer vergelijkingen bij de som der vergelijkingen (3) geteld geeft:

$$(y'+y''+y''')^2+(z'+z''+z''')^2-2p\,(x'+x''+x'''-3p)=0,$$

of, stellende

$$\begin{array}{l} x'+x''+x'''=u \\ y'+y''+y'''=v \\ z'+z''+z'''=w, \end{array}$$

zoo heeft men

$$v^2+w^2=2\,p\,(u-3p) \quad \ldots\ldots (10),$$

terwijl de som der vergelijkingen (4) geeft

$$\gamma w+\beta v-3\alpha p=pu,$$

of wegens $\alpha=-p$

$$\gamma w + \beta v = p(u - 3p) \quad \ldots \quad (11).$$

Verdrijft men nu uit de twee eerste der vergelijkingen (3) en (9) de term $x p$, dan verkrijgt men de vergelijkingen

$$2y'\beta + 2z'\gamma = y'^2 + z'^2 + 2pu,$$
$$2y''\beta + 2z''\gamma = y''^2 + z''^2 + 2pu,$$

waaruit door aftrekking volgt

$$2\beta(y' - y'') + 2\gamma(z' - z'') = (y' + y'')(y' - y'') + (z' - z'')(z' + z'').$$

Trekt men nu de tweede en derde der vergelijkingen (9) van elkander af, zoo komt er

$$z'''(z' - z'') + y'''(y' - y'') = 0,$$

en hieruit de waarde van $z' - z''$ in de voorgaande vergelijking gesteld, komt er

$$2\beta z''' - 2\gamma y''' = z'''(y' + y'') - y'''(z' + z''),$$

en op dezelfde wijze vindt men

$$2\beta z' - 2\gamma y' = z'(y'' + y''') - y'(z'' + z'''),$$

en $$2\beta z'' - 2\gamma y'' = z''(y''' + y') - y''(z''' + z').$$

Door de optelling dezer drie vergelijkingen heeft men

$$\beta w - \gamma v = 0 \quad \ldots \ldots \quad (12).$$

Het vierkant der vergelijking (11) geeft

$$\gamma^2 w^2 + \beta^2 v^2 + 2\beta\gamma v w = p^2(u - 3p)^2,$$

hierbij dat van (12)

$$\beta^2 w^2 + \gamma^2 v^2 - 2\gamma\beta v w = 0,$$

zoo heeft men

$$(\beta^2 + \gamma^2)(v^2 + w^2) = p^2(u - 3p)^2,$$

en deze uitkomst achtervolgens door de vergelijking (10) en door derzelver vierkant deelende, komt er

$$\beta^2\gamma^2 = \tfrac{1}{4}p(u - 3p) \quad \ldots \ldots \quad (13),$$

en $$\frac{\beta^2 + \gamma^2}{v^2 + w^2} = \tfrac{1}{4} \quad \ldots \ldots \quad (14),$$

waaruit eindelijk volgt

$$y^2 + z^2 = (\tfrac{1}{2}\beta)^2 + (\tfrac{1}{2}\gamma)^2 \quad \ldots \quad (15).$$

Zullen β en γ bestaanbaar blijven, dan moet volgens (13) $u > 3p$ of $x' + x'' + x'''$ niet kleiner dan $3p$ zijn, hetgeen alzoo eene voorwaarde geeft zonder welke het niet mogelijk is drie rakende vlakken op elkander loodregt staande te bepalen. Indien men de raakpunten zoodanig heeft dat $x' + x'' + x'''$ of u eene standvastige grootheid blijft, zoo volgt uit (13) dat het snijpunt der drie ra-

rakende vlakken in den omtrek van eenen cirkel zal blijven wiens straal $=\sqrt{\frac{p}{2}(u-3p)}$ is. Stellen wij $u=3p$, dan wordt deze straal gelijk nul; doch alsdan geeft de vergelijking (11)

$$\gamma w+\beta v=o,$$

of

$$\gamma w+=-\beta v,$$

terwijl volgens (12)

$$\beta w=\gamma v$$

is, deze vergelijkingen door elkander deelende, komt er

$$\frac{\gamma}{\beta}=-\frac{\beta}{\gamma},$$

of

$$\gamma^2=-\beta^2,$$

waaraan niet anders voldaan kan worden dan door $\gamma=o$ en $\beta=o$, en alsdan geven de vergelijkingen (4)

$$x'=x''=x'''=-\alpha=p;$$

de raakpunten der drie vlakken liggen dus voor dit geval overal even ver van den top der paraboloïde.

II. VOORSTEL.

Door L. F. BEAULIEU.

Indien men uit het doorsnijdingspunt van drie op elkander loodregte vlakken, die eene omwentelings-paraboloïde aanraken, eene loodlijn nederlaat op het vlak gaande door de drie raakpunten, dan gaat deze loodlijn ook altijd door het toppunt der paraboloïde, en wordt aldaar verdeeld in twee deelen, waarvan het product gelijk is aan het vierkant van den halven parameter der voortbrengende paraboloïde?

OPGELOST *door* L. F. BEAULIEU *en* J. BADON GHYBEN.

OPLOSSING *van* L. F. BEAULIEU.

Dezelfde coördinaten assen nemende als in het voorgaande Voorstel, en de letters daarin voorkomende alhier dezelfde beteekenis latende, zoo zal daar α, β en γ de coördinaten van het snijpunt der drie vlakken zijn, en daar de drie raakpunten aan de vergelijking

$$\gamma z+\beta y-px-\alpha p=o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

voldoen moeten, deze vergelijking dat van het vlak door de drie raakpunten gaande, kunnen voorstellen. Nu heeft elke lijn door het punt (α, β en γ) gaande tot vergelijkingen

x —

$$x-\alpha=m(z-\gamma),\quad y-\beta=n(z-\gamma),$$

en wanneer deze lijn op het vlak (1) loodregt staat, dan zijn ook

$$m\gamma=-p,\quad n\gamma=\beta,$$

(volgens L. R. SCHMIDT, *Hoogere Meetkunst.*) de vergelijkingen der loodlijn uit het punt (α, β, γ) nedergelaten, worden dus

$$x-\alpha=-\frac{p}{\gamma}(z-\gamma),\quad y-\beta=\frac{\beta}{\gamma}(z-\gamma),$$

of, na herleiding en in aanmerking nemende, dat volgens het voorgaande Voorstel $\alpha=-p$ is,

$$x=-\frac{p}{\gamma}z,\quad y=\frac{\beta}{\gamma}z.$$

Uit den vorm dezer vergelijkingen blijkt het, dat de bedoelde loodlijn bestendig door den oorsprong der coördinaten, dat is: door het toppunt der paraboloïde gaat.

Zij nu P het gedeelte dezer loodlijn, begrepen tusschen het punt (α, β, γ) en den top der paraboloïde, en Q het ander gedeelte of wel de loodlijn uit den top op het vlak (1) nedergelaten, en in het oog houdende dat $\alpha=-p$ is, zoo heeft men uit de bekende formule

$$P=\sqrt{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}=\sqrt{(p^2+\beta^2+\gamma^2)};$$

en $$Q=-\frac{\alpha p}{\sqrt{(p^2+\beta^2+\gamma^2)}}=\frac{p^2}{\sqrt{(p^2+\beta^2+\gamma^2)}},$$

waaruit volgt

$$P\times Q=p^2.$$

III. VOORSTEL.

Door J. VAN WIJK, ROELANDZ.

Wanneer a, b, c en d de zijden, en e en f de diagonalen van eenen bolvormigen vierhoek zijn, en g de boog eens grooten cirkels, welke het midden der beide diagonalen vereenigt, dan zal men altijd hebben

$$\text{Cos.}\,a+\text{Cos.}\,b+\text{Cos}\,c+\text{Cos.}\,d=4\,\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}e\,\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}f\,\text{Cos.}\,g.$$

Men vraagt naar het bewijs? (*)

OPGELOST *door* J. VAN WIJK ROELANDZ., J. BASSAN, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, M. DE LEON, K. E. A. VON HOFF *en* K. C. COX.

OP-

(*) A. L. CRELLE, *Journal für die reine und angewandte Mathem.* III. 294.

OPLOSSING *van* J. VAN WIJK ROELANDZ.

Zij ABCD (*Fig.* 1) de bolvormige vierhoek, waarin AD en BC de diagonalen, en FG de boog, welke het midden dezer diagonalen vereenigt, aanwijst; men vereenigt de punten A en F alsmede FD door bogen van groote cirkels, verder stelle men AB $= a$, BD $= b$, DC $= c$, AC $= d$, BC $= e$, AG $= f$, FG $= g$, *hoek* BFD $= \phi$, *hoek* AGF $= \psi$, *hoek* AFC $= \omega$, FD $= q$ en AF $= r$, dan is uit den driehoek AFC, gelijk bekend is

$$Cos.\,d = Cos.\,r\,Cos.\,\tfrac{1}{2}e + Cos.\,\omega\,Sin.\,\tfrac{1}{2}e\,Sin.\,r,$$

en uit den driehoek ABF

$$Cos.\,a = Cos.\,r.\,Cos.\,\tfrac{1}{2}e - Cos\,\omega\,Sin.\,\tfrac{1}{2}e\,Sin.\,r,$$

waarvan de som is

$$Cos.\,d + Cos.\,a = 2\,Cos.\,r\,Cos.\,\tfrac{1}{2}e \quad \ldots \quad (1).$$

Op dezelfde wijze heeft men uit de driehoeken BFD en CFD

$$Cos.\,b = Cos.\,q\,Cos.\,\tfrac{1}{2}e + Cos.\,\phi\,Sin.\,q\,Sin.\,\tfrac{1}{2}e,$$

$$Cos.\,c = Cos.\,q\,Cos.\,\tfrac{1}{2}e - Cos.\,\phi\,Sin.\,q\,Sin.\,\tfrac{1}{2}e,$$

en dus

$$Cos.\,b + Cos.\,c = 2\,Cos.\,q\,Cos.\,\tfrac{1}{2}e \quad \ldots \quad (2).$$

De som der vergelijkingen (1) en (2) is

$$Cos.\,a + Cos.\,b + Cos.\,c + Cos.\,d = 2\,Cos.\,\tfrac{1}{2}e\,(Cos.\,r + Cos.\,q) \quad (3).$$

Verder is uit den driehoek AFG

$$Cos.\,r = Cos.\,\tfrac{1}{2}f\,Cos.\,g + Cos.\,\psi\,Sin.\,\tfrac{1}{2}f\,Sin.\,g,$$

en uit den driehoek DFG

$$Cos.\,q = Cos.\,\tfrac{1}{2}f\,Cos.\,g - Cos.\,\psi\,Sin.\,\tfrac{1}{2}f\,Sin.\,g,$$

de som dezer vergelijkingen geeft

$$Cos.\,r + Cos\,q = 2\,Cos.\,\tfrac{1}{2}f\,Cos.\,g,$$

hetwelk in (3) overgebragt geeft

$$Cos.\,a + Cos.\,b + Cos.\,c + Cos.\,d = 4\,Cos.\,\tfrac{1}{2}e\,Cos.\,\tfrac{1}{2}f\,Cos.\,g,$$

hetgeen te bewijzen was.

IV. VOORSTEL.

Door J. VAN WIJK ROELANDZ.

Als men van eenen vierhoek, in den cirkel beschreven, zoo wel de hoeken tusschen de diagonalen als de hoeken welke de verlengde tegen over elkander gelegene zijden midden door deelt, dan zullen de zes hoeklijnen, drie aan drie, evenwijdig zijn. Men vraagt naar het bewijs? (*)

Op-

(*) A. L. CRELLE, *Journal für die reine und angewandte Mathem.* II, S. 97.

OPGELOST *door* J. VAN WIJK ROELANDZ., K. E. H. VON HOFF, S. PRINCE, M. DE LEON, K. C. COX, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, M. G. SNOER *en* D. HOOLA VAN NOOTEN.

OPLOSSING *van* J. VAN WIJK ROELANDZ.

Zij ABCD (*Fig.* 2) de voorgestelde vierhoek, RQ en HI, UV en TS de lijnen, welke de hoeken der zijden AB, DC en AD, BC midden door deelen, en NM en PO de lijnen welke de hoeken der diagonalen in twee gelijke deelen snijden, dan zal men moeten bewijzen de evenwijdigheid der lijnen RQ, UV en PO, als mede der lijnen HI, TS en NM.

Het is vooreerst duidelijk dat de lijnen QR, ST, alsmede UV en HI, en eindelijk NM en PO loodregt op elkander zijn, dewijl elk paar lijnen eenen hoek en deszelfs supplement midden door deelt.

Verlengt men nu de snijlijn RQ tot in F, dan zal FG loodregt op NM zijn, want in de driehoeken NEB en EMC is de *hoek* NBE, ECM als op denzelfden boog AD staande, verder is *hoek* NEB = *hoek* DEM = *hoek* MEC, derhalve is ook *hoek* ENB = *hoek* EMC; de driehoek NMG is dus gelijkbeenig, en daar FG den tophoek midden door deelt is *hoek* NFG regt; dewijl nu OP mede loodregt op NM staat is dus PO evenwijdig met RF.

Op dezelfde wijze kan men nu nog bewijzen dat de driehoek PHO gelijkbeenig is, en dat alzoo WH loodregt op PO staat, waaruit volgt, dat UV mede evenwijdig aan PO en FR is; en dewijl nu eindelijk ST, NM en HI loodregt op de evenwijdige lijnen NM en HI staan, zijn ook deze lijnen evenwijdig.

V. VOORSTEL.

Door J. JONKHERT.

Als men uit eenig punt P, *van den omtrek eens cirkels, loodlijnen op de zijden eens ingeschreven driehoeks trekt, dan zullen* 1° *de voetpunten dezer loodlijnen in eene regte lijn gelegen zijn, en* 2°. *zal de onderlinge afstand der voetpunten dezer loodlijnen gelijk zijn aan den afstand van het punt* P *tot het hoekpunt des driehoeks, waarin de zijden zamenkomen op welke de voetpunten liggen, vermenigvuldigd met de sinus van den hoek aan dit hoekpunt. Men vraagt naar het bewijs?*

OPGELOST *door* K. C. COX, J. JONKHERT, S. PRINCE, K. E. H.

H. von Hoff, J. Bassam, W. J. C. Rammelman Elsevier en M. de Leon.

Oplossing van K. C. Cox.

Zij ABC (*Fig.* 3) de ingeschrevene driehoek in P een willekeurig punt in den omtrek van den cirkel, waaruit de loodlijnen PP′ PP″ en PPP‴ op de zijden des driehoeks zijn nedergelaten; indien men dan de lijnen P′P″ en P″P‴ trekt, dan zal men moeten bewijzen dat P′P″P‴ eene regte lijn en dus de figuur PP′P″P‴ een driehoek is. Daartoe trekke men de lijnen AP en PB; nu hebben de regthoekige driehoeken APP′ en APP″ dezelfde hypotenusa AP, men kan dus door de punten A, P′P″ en P eenen halven cirkel beschrijven, waaruit volgt dat *hoek* PAB = *hoek* PP′P″ is; op dezelfde wijze kan men uit de twee regthoekige driehoeken PBP‴ en PBP″ bewijzen, dat de vier punten PP″B en P‴ in eenen cirkel gelegen zijn, waaruit dan wederom volgt dat de hoeken PP‴P″ en PBA aan elkander gelijk zijn, en daar nu eindelijk in den vierhoek P′PP‴C de som der hoeken P′PP‴ en ACB gelijk aan twee regte hoeken is, zoo hebben de hoeken APB en P′PP‴ hetzelfde supplement, en zijn dus aan elkander gelijk; de hoeken A, P en B van den driehoek APB zijn dan gelijk aan de hoeken P′, P en P‴ van den vierhoek P′PP‴P″, waaruit dus volgt dat de hoek PP″P‴ gelijk aan twee regte hoeken is, en diensvolgens de lijn P′P″P‴ eene regte lijn. Hierdoor is dan het eerste gedeelte der stelling bewezen. Voor het tweede gedeelte merken wij op, dat *hoek* BAC = P′PP″ is, als wordende door denzelfden boog gemeten; nu is verder

$$P'P'' : PP'' = Sin.\, P'PP'' : Sin.\, PP'P'',$$

of

$$P'P'' : PP'' = Sin.\, BAC \quad : Sin.\, PAP'',$$

maar in den regthoekigen driehoek PAP″ is

$$PP'' = AP\, Sin.\, PAP'',$$

dus

$$P'P'' : AP\, Sin.\, PAP'' = Sin.\, BAC : Sin.\, PAP'',$$

waaruit volgt

$$P'P'' = AB\, Sin.\, BAC.$$

Nu is ook *hoek* ABC = *hoek* P″PP‴ als door denzelfden boog gemeten wordende, wij hebben dus weder uit den driehoek PP″P‴

$$P''P''' : PP'' = Sin.\, P''PP''' : Sin.\, PP'''P'',$$

of

of $P'P''' : PP' = Sin. ABC : Sin. PBP'$,
maar in den regthoekigen driehoek PBP' hebben wij
$$PP' = PB\ Sin. PBP',$$
dus $P'P''' : PB\ Sin. PBP' = Sin. ABC : PBP'$,
waaruit volgt $P'P''' = PB\ Sin. ABC$,
waardoor nu ook het tweede gedeelte der stelling bewezen is.

VI. Voorstel,

Door J. Jonkhert.

Vier regte lijnen, in een vlak gelegen, vormen, drie aan drie genomen, vier driehoeken, in elk dezer driehoeken snijden de drie loodlijnen uit de hoekpunten op de tegen over liggende zijden elkander in een punt, en deze vier punten liggen in dezelfde lijn, men vraagt naar het bewijs?

Opgelost door J. Jonkhert, K. E. A. von Hoff, K. C. Cox en W. J. C. Rammelman Elsevier.

I. Oplossing van J. Jonkhert.

Laten de vergelijkingen der vier regte lijnen zijn
$$y = ax + b \quad \ldots\ldots\ldots (1),$$
$$y = a'x + b' \quad \ldots\ldots\ldots (2),$$
$$y = a''x + b'' \quad \ldots\ldots\ldots (3),$$
en
$$y = a'''x + b''' \quad \ldots\ldots\ldots (4),$$
voor het snijpunt der lijnen (1) en (2) heeft men, volgens den bekenden regel
$$o = (a - a')x + b - b',$$
en
$$(a' - a)y = ba' - b'a,$$
en alzoo voor de coördinaten der snijpunten van de lijnen (1) en (2)
$$x = \frac{b' - b}{a - a'},$$
en
$$y = \frac{a'b - ab'}{a' - a}.$$
Op dezelfde wijze heeft men voor de coördinaten van de lijnen (1) en (3)
$$x = \frac{b'' - b}{a - a''},$$
en
$$y = \frac{a''b - ab''}{a'' - a}.$$

De

De vergelijking der loodlijn, welke uit het snijpunt van de lijnen (1) en (2) op de lijn tot de vergelijking (3) valt, is volgens de bekende regels

$$y-\frac{a'b-ab'}{a'-a}=-\frac{1}{a''}\left(x-\frac{b'-b}{a-a'}\right),$$

en die van de loodlijn uit het snijpunt van (1) en (3) op (2) is even eens

$$y-\frac{a''b-ab''}{a''-a}=-\frac{1}{a'}\left(x-\frac{b''-b}{a-a''}\right),$$

en derhalve heeft men uit deze beide laatste vergelijkingen voor de abscis van het snijpunt hunner lijnen

$$\frac{a''b-ab''}{a''-a}-\frac{a'b-ab'}{a'-a}=\frac{1}{a'}\left(x-\frac{b''-b}{a-a''}\right)-\frac{1}{a''}\left(x-\frac{b'-b}{a-a'}\right),$$

waaruit men vindt

$$\left(\frac{1}{a'}-\frac{1}{a''}\right)x=\frac{1}{a'}\frac{b''-b}{a-a''}-\frac{1}{a''}\frac{b'-b}{a-a'}$$
$$+\frac{a''b-ab''}{a''-a}-\frac{a'b-ab'}{a'-a}$$
$$=\frac{a''(a-a')(b''-b)-a'(a-a'')(b'-b)}{a'a''(a-a')(a-a'')}$$
$$+\frac{(a'-a)(a''b-ab'')-(a''-a)(a'b-ab')}{(a''-a)(a'-a)}$$
$$=\frac{b''a''(a-a')+b'a'(a''-a)+ba(a'-a'')}{a'a''(a-a')(a-a'')}$$
$$+\frac{ba(a'-a'')+ab'(a''-a)+a(a-a')b''}{(a''-a)(a'-a)},$$

of

$$(a''-a')x$$
$$=\frac{ab(a'-a'')(1+a'a'')+a'b'(a''-a)(1+aa'')+a''b''(a-a')(1+aa')}{(a-a')(a-a'')} \quad (5).$$

Even zoo vindt men voor de ordinaat van het snijpunt

$$\left(\frac{1}{a'}-\frac{1}{a''}\right)y+\frac{a''b-ab''}{a''(a''-a)}-\frac{a'b-ab'}{a'(a'-a)}$$
$$=\frac{b'-b}{a'a''(a-a')}-\frac{b''-b}{a'a''(a-a'')},$$

of $\left(\frac{1}{a'}-\frac{1}{a''}\right)y=\frac{a''(a''-a)(a'b-ab')-a'(a'-a)(a''b-ab'')}{a'a''(a''-a)(a'-a)}$

+

$$+\frac{(b'-b)(a-a'')-(b''-b)(a-a')}{a'a''(a-a')(a-a'')}$$

$$=\frac{a'a''b(a''-a')+aa''b'(a-a'')+aa'(a'-a)b''}{a'a''(a''-a)(a'-a)}$$

$$+\frac{(a''-a')b+(a-a'')b'+(a'-a)b''}{a'a''(a-a')(a-a'')}$$

of

$$(a''-a')y$$

$$=\frac{(a''-a')b(1+a'a'')+b'(a-a'')(1+aa'')+b''(a'-a)(1+aa')}{(a-a')(a-a'')} \quad (6).$$

De coördinaten van het snijpunt der loodlijnen, welke uit de ontmoetingspunten der lijnen (1) en (4) op (2) en uit (1) en (2) op (4) nedergelaten zijn, vindt men volkomen op dezelfde wijze; men heeft alleen voor de vergelijkingen der lijnen (2) en (3) die van de lijnen (4) en (2) in plaats te stellen; dat is: slechts voor

a' te schrijven a'''
b' ——— b'''
a'' ——— a'
b'' ——— b''.

Noemende dus de coördinaten dezer snijpunten x' en y', dan heeft men

$$(a-a''')(a-a')(a'-a''')x'=(a'''-a')(1+a'a''')ab+(a'-a)(1+aa')a'''b'''+(a-a''')(1+aa''')a'b' \quad . \quad . \quad (7),$$

en

$$(a-a''')(a-a')(a'-a''')y'=(a'-a''')(1+a'a''')b+(a-a')(1+aa')b'''+(a'''-a)(1+aa''')b' \quad . \quad (8).$$

De coördinaten van het snijpunt der loodlijnen uit het ontmoetingspunt van de lijnen (3) en (2) op (4) en van (3) en (4) op (2), vindt men even eens uit de vergelijkingen (5) en (6), door voor

a te schrijven a''
b ——— b''
a'' ——— a'''
b'' ——— b''',

de coördinaten van het snijpunt x'' en y'' stellende, heeft men dus

$$(a''-a')(a''-a''')(a'''-a')x''=(a'-a''')(1+a'a''')a''b''+(a'''-a'')(1+a'''a'')a'b'+a'''b'''(a''-a')(1+a''a') \quad . \quad (9).$$

en

en $(a''-a')(a''-a''')(a'''-a')y''=(a'''-a')(1+a'''a')b''+$
$+(a''-a''')(1+a''a''')b'+(a'-a'')(1+a'a'')b'''$. (10).

Eindelijk zal men hebben voor het snijpunt der loodlijnen uit de ontmoeting der lijnen (3) en (1) op (4) en van (3) en (4) op (1)

$$(a''-a')(a''-a''')(a''-a)x''=(a-a'')(1+aa''')a''b'+$$
$$+(a'''-a'')(1+a''a'')ab+(a''-a)(1+aa'')a'''b''' \quad (11),$$

en $(a'''-a)(a''-a)(a''-a'')y'''=(a'''-a)(1+aa''')b''$
$+(a''-a''')(1+a''a''')b+(a-a'')(1+aa'')b''' \quad . \quad (12).$

Ten einde nu te onderzoeken of de gevondene snijpunten in eene regte lijn gelegen zijn, heeft men slechts te beproeven of de coördinaten der vier snijpunten aan de voorwaarden voldoen, om tot dezelfde regte lijn te kunnen behooren, hiertoe, bij voorbeeld, zoude men moeten hebben

$$\frac{y-y'}{x-x'}=\frac{y-y''}{x-x''}=\frac{y'-y''}{x'-x''}=\frac{y'-y'''}{x'-x'''}.$$

Het onderzoek dezer voorwaarden zeer zamengesteld zijnde, zoo zullen wij daartoe eenen anderen weg volgen. De keus namelijk der assen van de coördinaten is geheel willekeurig gebleven, men zou dus kunnen aannemen dat deze as zoodanig gekozen ware, dat twee der snijpunten in dezelve gelegen waren, en dan hebben wij enkel te onderzoeken of de overige snijpunten mede in deze as liggen. Nemen wij aan dat, bij voorbeeld, de twee eerste snijpunten in de as der abcissen gelegen zijn, dan heeft men

$$y=0 \quad \text{en} \quad y'=0,$$

en dus uit (6) en (8)

$$(a''-a')(1+a'a'')b+(a-a'')(1+aa'')b'+(a'-a)(1+aa')b''=0 \quad (13),$$

en $(a'-a''')(1+a'a''')b+(a-a')(1+aa')b'''+(a'''-a)$
$(1+aa''')b'=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14),$

en nu zal men moeten onderzoeken of door deze twee vergelijkingen ook de waarden van y'' en y''' uit (10) en (12) gelijk nul worden. Daartoe vermenigvuldigen wij (13) met $(a'-a''')$ $(1+a'a''')$ en (14) met $(a''-a')(1+a'a'')$, en alsdan dezelve van elkander afgetrokken hebbende, komt er

$(a-a'')$

$$\left.\begin{array}{l}(a-a'')(1+aa'')(a'-a''')(1+a'a''')b'+(a'-a)\\ (1+aa')(a''-a''')(1+a''a''')b'' \quad . \; . \; . \; . \\ -(a'''-a)(1+aa''')(a''-a')(1+a''a')b'-(a-a')\\ (1+aa')(a''-a')(1+a'a'')b''' \quad . \; . \; . \; . \end{array}\right\}=0 \; . \; (15).$$

De coefficienten van b' kan men als volgt herleiden:

$$(a-a'')(a'-a''')(1+aa''+a'a'''+aa'a''a''')+$$
$$(a-a''')(a''-a')(1+aa'''+a'a''+aa'a''a''')$$
$$=(1+aa'a''a''')\{(a-a'')(a'-a''')+(a-a''')(a''-a')\}$$
$$+(a-a'')(a'-a''')(aa''+a'a''')+(a-a''')(a''-a')(aa'''+a'a'')$$
$$=(1+aa'a''a''')(a'a'''-a'''a+aa''-a'a'')$$
$$+(aa''+a'a''')(aa'-aa'''-a'a''+a''a''')$$
$$+(aa'''+a'a'')(aa''-aa'-a''a'''+a'a''')$$
$$=(1+aa'a''a''')(a-a')(a''-a''')$$
$$-(aa''+a'a''')(aa'''+a'a'')+(aa'+a''a''')(aa''+a'a''')$$
$$+(aa'''+a'a'')(aa''+a'a''')-(aa'+a''a''')(aa'''+a'a'')$$
$$=(1+aa'a''a''')(a-a')(a''-a''')+(aa'+a''a''')(aa''-aa'''$$
$$+a'a'''-a'a'')$$
$$=(a-a')(a''-a''')(1+aa'a''a'''+aa'+a''a''')$$
$$=(a-a')(a''-a''')(1+aa')(1+a''a''').$$

Stelt men nu deze waarde in de vergelijking (15) voor de coefficient van b', dan zal deze vergelijking den factor

$$(a'-a)(1+aa')$$

in al deszelfs termen hebben, zoodat deelende door dezen factor, men heeft

$$\left.\begin{array}{r}(a'''-a'')(1+a''a''')b'+(a'-a''')(1+a'a''')b''\\ +(a''-a')(1+a'a'')b'''\end{array}\right\}=0,$$

hetwelk juist het tweede lid der vergelijking (10) is met een omgekeerd teeken, zoodat, wanneer dus y en y' gelijk nul zijn, ook $y''=0$ wordt; het derde snijdingspunt ligt dus in eene regte lijn met de twee eerste. Wanneer men nu uit de vergelijkingen (13) en (14) b' verdrijft, op dezelfde wijze als dit hier voren met b is gedaan, dan zal men door volmaakt dezelfde herleiding $y'''=0$ vinden, waaruit dus blijkt, dat ook dit vierde snijpunt in dezelfde regte lijn met de drie overigen gelegen is, en hierdoor is dan de stelling bewezen.

II.

II. Oplossing *van* K. E. H. von Hoff.

Laten AB, AF, CE en BF (*Fig.* 4) de vier gegevene lijnen voorstellen, welke door hunne onderlinge snijdingen de vier driehoeken ABF, ACE, CBD en DEF vormen; laten verder uit elk der hoekpunten dezer driehoeken de loodlijnen op de overstaande zijden getrokken worden, zoodat de punten R, Q, P en S de snijpunten dezer loodlijnen voorstellen, indien men dan de lijnen PQ, QR en RS trekt; dan zal men moeten bewijzen dat deze vier lijnen in elkanders verlengden vallen, en dat alzoo de hoeken QPG, RQH en SRI alle even groot zijn.

De driehoeken CGD, LHE en DIK zijn gelijkvormig, doordien de lijnen GD, HE en IK evenwijdig zijn, als staande loodregt op de lijn AC; alsmede CG, LH en DI als zijnde loodregt op AF. Verder zijn nog de driehoeken PCG, QNH en ROI gelijkvormig, dewijl hunne zijden onderling evenwijdig loopen; om dezelfde redenen zijn dan ook de driehoeken QMG, RN'H en SO'I gelijkvormig; maar de driehoek QMG is ook gelijkvormig met driehoek PCG, alzoo zijn de drie laatstgenoemde driehoeken gelijkvormig met de drie voorgaanden, en hierdoor heeft men de evenredigheid

$$PG : QH : RI = CG : NH : OI,$$

als mede $QG : RH : SI = CG : NH : OI,$

alzoo $PG : QH : RI = QG : RH : SI.$

De driehoeken PGQ, QHR en RIS hebben den eenen hoek gelijk en de aanliggende zijden evenredig, zij zijn dus gelijkvormig, en hieruit volgt onmiddellijk de gelijkheid der hoeken QPG, RQH en SRI, waardoor het gestelde bewezen is.

VII. V o o r s t e l.

Door W. A. Froger.

Men vraagt naar een getal van drie cijfers, zoodanig, dat het cijfer der eenheden een driehoekig getal, dat der tientallen een vijfhoekig, en dat der honderdtallen een zeshoekig getal zij. De wortel van het driehoekige getal is één meer dan die van het vijfhoekig getal, en die van het vijfhoekig één meer dan die van het zeshoekige; het product der drie cijfers is gelijk aan het product van het cijfer der eenheden met de som der wortels van de cijfers der eenheden en tientallen?

Op-

OPGELOST *door* W. A. FROGER, G. BRANDSTEDER, M. DE LEON, M. G. SNOER, J. SCHOTBORGH, Hz., W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, B. LUBBERS *en* C. VAN SCHAICK.

OPLOSSING *van* W. A. FROGER.

Stel het cijfer der eenheden x, dat der tientallen y en dat der honderdtallen z, en zij verder de wortel van het zeshoekige getal $=v$, dan is die van het vijfhoekige getal $=v+1$, en die van het driehoekige getal $v+2$. Volgens de bekende formulen voor de veelhoekige getallen heeft men nu

$$x=\frac{(v+2)^2+v+2}{2},$$

$$y=\frac{3(v+1)^2-(v+1)}{2},$$

en

$$z=2v^2-v.$$

Verder heeft men door de laatste voorwaarde van het Voorstel

$$xyz=x(2v+3),$$

of

$$yz=2v+3;$$

en hierin voor y en z hunne waarden in v gesteld, komt er

$$\{3(v+1)^2-(v+1)\}\{2v^2-v\}=4v+6,$$

of na ontwikkeling der factoren

$$6v^4+7v^3-v^2-6v-6=0,$$

waaraan door $v=1$ voldaan wordt; deelende de laatste vergelijking door $v-1$, dan komt er

$$6v^3+13v^2+2v+6=0,$$

waaraan alleen door een negatief getal voldaan kan worden; zoodat $v=1$ de eenige hier bruikbare waarde is, en deze geeft nu $x=6$, $y=5$ en $z=1$, zoodat het gevraagde getal is 156.

AANMERKING *van* G. BRANDSTEDER. Uit den aard van het tientallig stelsel kan geen der getallen voor de waarde van x, y of z grooter dan 9 zijn, en derhalve kan de wortel van het zeshoekige getal niet grooter dan 3 zijn, dewijl de wortel 4 reeds een zeshoekig getal van twee cijfers geeft. De wortel van het zeshoekig getal kan echter ook volgens het Voorstel niet kleiner dan 3 wezen, dewijl deze wortel twee meer dan die van het driehoekige getal moet bedragen, en hieruit blijkt ten duidelijkste, dat de wortel van het zeshoekige getal niet anders dan 3

zijn kan, en dus die van het vijfhoekige 2 en van het driehoekige 1, waardoor nu het voorstel opgelost is.

VIII. VOORSTEL.

Door M. DE LEON.

Men vraagt naar eene rekenkunstige reeks van zes termen, waarvan het product der termen is 322560, en de som der uiterste termen plus driemaal den tweeden term gelijk is aan tweemaal de som der middelste termen?

OPGELOST *door* M. DE LEON, K. E. H. VON HOFF, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, G. BRANDSTEDER, R. SPRUIT, D. HOOLA VAN NOOTEN, J. S. SPIJER, M. G. SNOER, M. L. GOEDE, J. SCHOTBORGH, Hz., B. LUBBERS, C. VAN SCHAICK, S. PRINCE *en* J. MESSCHERT VAN VOLLENHOVEN.

OPLOSSING *van* M. DE LEON.

Men stelle de reeks voor door de termen

$$x-5y,\ x-3y,\ x-y,\ x+y,\ x+3y \text{ en } x+5y,$$

dan is de som der uiterste termen $2x$ en dus ook de som der middelste; volgens de tweede voorwaarde is

$$2x+2(x-3y)=2\times2x=4x,$$

of $$x-9y=0,$$

en dus $$x=9y.$$

Hierdoor wordt de reeks

$$4y,\ 6y,\ 8y,\ 10y,\ 12y \text{ en } 14y,$$

waarvan het product volgens de eerste voorwaarde geeft

$$4\times6\times8\times10\times12\times14y^6=322560,$$

of $$y^6=1,$$

en dus $$y=\pm1.$$

Zoodat de reeks wordt

$$4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12 \text{ en } 14,$$

of $$-4,\ -6,\ -8,\ -10,\ -12 \text{ en } -14.$$

IX. VOORSTEL.

Door M. DE LEON.

Eene afdalende rekenkunstige reeks van vier termen te vinden, die eigenschap hebbende, dat het verschil der vierkanten van de producten der middelste en uiterste termen 5120 zij, en dat het product van den tweeden met den derden term gelijk zij aan 108 verminderd met het verschil der uiterste termen?

OP-

Opgelost *door* B. Lubbers, M. de Leon, W. J. C. Rammelman Elsevier, D. Hoola van Nooten, M. G. Snoek, J. Schotborgh, Hz., G. Brandsteder *en* C. van Schaick.

Oplossing *van* B. Lubbers.

Laat de gevraagde reeks zijn

$$x+3y, \quad x+y, \quad x-y \text{ en } x-3y,$$

dan is het product der middelste termen x^2-y^2, en dat der uiterste termen x^2-9y^2, de tweede magten dezer producten zijn

$$(x^2-y^2)^2 = x^4-2y^2x^2+y^4,$$

$$(x^2-9y^2)^2 = x^4-18y^2x^2+81y^4,$$

waarvan het verschil gelijk moet zijn aan 5120, alzoo heeft men

$$16y^2x^2-80y^4 = 5120,$$

of

$$y^2x^2-5y^4 = 320 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a).$$

Het product van den tweeden en derden term is x^2-y^2, dus hieve geeft de tweede voorwaarde van het vraagstuk

$$x^2-y^2 = 108-6y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b).$$

Deze vergelijking met (a) verbonden geeft

$$y^2(108-6y+y^2)-5y^4 = 320,$$

of

$$4y^4+6y^3-108y^2+320 = 0,$$

waaruit volgt

$$4y^3(y-2)+14y^2(y-2)-80y(y-2)-160(y-2) = 0,$$

of

$$(y-2)\{4y^3+14y^2-80y-160\} = 0,$$

en ook

$$(y-2)\{4y^2(y-4)+30y(y-4)+40(y-4)\} = 0,$$

of

$$(y-2)(y-4)(4y^2+30y+40) = 0,$$

en dus zijn de twee eenige bestaanbare wortels dezer vergelijking $y=2$ en $y=4$. Voor den eersten wortel vindt men uit (b)

$$x^2 = 108-12+4 = 100,$$

en

$$x = \pm 10.$$

Voor den tweeden wortel vindt men uit dezelfde vergelijking

$$x^2 = 108-24+16 = 100,$$

en dus even eens

$$x = \pm 10.$$

Men kan dus nemen $x=\pm 10$, en daarbij zoo wel $y=2$ als $y=4$, alzoo verkrijgen wij de reeksen

16, 12, 8 en 4,

−4, −8, −12 en −16,

 als

als mede 22, 14, 6 en —2,
en eindelijk 2, —6, —14 en —22.

X. VOORSTEL.

Door L. F. BEAULIEU.

Men vraagt naar de meetkunstige plaats der zwaartepunten van al de gelijkzijdige driehoeken, die in eenen gegeven driehoek beschreven kunnen worden?

OPGELOST *door* L. F. BEAULIEU.

OPLOSSING *van* L. F. BEAULIEU.

Laat ABC (*Fig.* 5.) de gegevene driehoek zijn, waarin de gelijkzijdige driehoeken zoo als mnp beschreven worden, dan kunnen wij de lijn AC als de as der abscisfen en de loodlijn AY voor de as der ordinaten nemen; indien men nu in den gelijkzijdigen driehoek mnp de loodlijn pq trekt, en $po = \frac{2}{3}pq$ neemt, zoo is o het zwaartepunt van den driehoek; men ftelle nu de coördinaten der punten o, m, n en p voor refpectievelijk door

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix}x'\\ y'\end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix}x''\\ y''\end{matrix}\right\} \text{ en } \left.\begin{matrix}u\\ 0\end{matrix}\right\}.$$

De vergelijking der bekende lijnen AB en BC kan men voorftellen door

$$y = mx,$$

en

$$y = nx + b;$$

daar nu het punt m op de eerfte en n op de tweede lijn gelegen is, zoo hebben wij

$$y' = mx' \quad \dots\dots\dots \quad (1),$$

en

$$y'' = nx'' + b \quad \dots\dots\dots \quad (2).$$

Nu is, in elken driehoek, de afftand van het zwaartepunt tot eene gegevene lijn gelijk aan een derde van de fom der afftanden der drie hoekpunten tot dezelfde lijn, waaruit volgt, dat wij hier zullen hebben

$$3\alpha = u + x' + x'' \quad \dots\dots\dots \quad (3),$$

$$3\beta = y' + y'' \quad \dots\dots\dots \quad (4).$$

De lijn pq loodregt zijnde op mn, welke met de as der abscisfen eenen hoek maakt, waarvan de tangens is $\frac{y''-y'}{x''-x'}$, heeft tot vergelijking

$y =$

$$y = -\frac{x'' - x'}{y'' - y'}(x - u),$$

en daar het punt o op deze lijn gelegen is, zoo heeft men

$$\beta = -\frac{x'' - x'}{y'' - y'}(\alpha - u) \quad \ldots\ldots \quad (5).$$

Eindelijk kan men opmerken dat het zwaartepunt o te gelijker tijd het middelpunt is van den omgeschreven cirkel, om den gelijkzijdigen driehoek mnp; derhalve zal men, zoo als bekend is, hebben $3(po)^2 = (mn)^2$, of wel de lengte dezer lijnen in de coördinaten van hunne eindpunten uitdrukkende, hebben wij

$$3\{\beta^2 + (\alpha - u)^2\} = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 \quad . \quad (6).$$

Alzoo hebben wij nu zes vergelijkingen tusschen de coördinaten α, β van het punt o, en de vijf onbepaalde grootheden u, x', y', x'' en y'', welke van de bijzondere stelling van den driehoek mnp afhangen; indien men derhalve deze onbepaalde grootheden uit deze zes vergelijkingen verdrijft, dan zal men eene eindvergelijking in α, β en in standvastige grootheden verkrijgen, welke de meetkunstige plaats van de zwaartepunten o zal aanwijzen.

Ten einde de verdrijving der onbepaalde grootheden te bewerkstelligen, substituere men in (6) voor $y'' - y'$ zijne waarde uit (5), en dan komt er

$$3\{\beta^2 + (\alpha - u)^2\} = (x'' - x')^2 + \frac{(\alpha - u)^2}{\beta^2}(x'' - x')^2$$

$$= \frac{1}{\beta^2}(x'' - x')^2\{\beta^2 + (\alpha - u)^2\},$$

en dus $\qquad 3\beta^2 = (x'' - x')^2,$

of $\qquad x'' - x' = \pm\beta\sqrt{3} \quad \ldots\ldots \quad (7),$

maar uit (3) is $\qquad x'' + x' = 3\alpha - u,$

derhalve is $\qquad x'' = \tfrac{1}{2}(3\alpha - u \pm \beta\sqrt{3}),$

$$x' = \tfrac{1}{2}(3\alpha - u \mp \beta\sqrt{3}).$$

Uit (5) en (7) vindt men gemakkelijk

$$y'' - y' = \mp(\alpha - u)\sqrt{3},$$

en daar uit (4) $\qquad y'' + y' = 3\beta$

is, zoo hebben wij

$$y'' = \tfrac{1}{2}\{3\beta \mp (\alpha - u)\sqrt{3}\},$$

en $\qquad y' = \tfrac{1}{2}\{3\beta \pm (\alpha - u)\sqrt{3}\}.$

De waarden van x', y', x'' en y'' in (1) en (2) gesteld, geven

$$3\beta \pm (a-u)\sqrt{3} = m(3a - u \mp \beta\sqrt{3}),$$
$$3\beta \mp (a-u)\sqrt{3} = n(3a - u \pm \beta\sqrt{3}) - 2b.$$

Uit deze beide vergelijkingen (u) verdrijvende, komt er

$$\frac{3\beta \pm a\sqrt{3} - 3am \pm \beta m\sqrt{3}}{\pm\sqrt{3} - m} = \frac{3\beta \mp a\sqrt{3} - 3an \mp \beta n\sqrt{3} + 2b}{\mp\sqrt{3} - n},$$

waaruit men, na behoorlijke herleiding, zal vinden

$$\beta = \frac{m+n}{mn+3}\,a - \frac{\sqrt{3} \mp m}{(mn+3)\sqrt{3}}\,b;$$

wegens het dubbele teeken hebben wij dan eigenlijk

$$\beta = \frac{m+n}{mn+3}\,a - \frac{\sqrt{3} - m}{(mn+3)\sqrt{3}}\,b,$$

en $$\beta = \frac{m+n}{mn+3}\,a - \frac{\sqrt{3} + m}{(mn+3)\sqrt{3}}\,b.$$

Deze twee vergelijkingen aan de vraag voldoende, zoo blijkt daaruit, dat de plaats der zwaartepunten, van de ingeschreven gelijkzijdige driehoeken, door twee evenwijdige regte lijnen aangewezen wordt. De eerste vergelijking geeft de meetkunstige plaats der zwaartepunten van de driehoeken, die, zoo als mnp *binnen* den driehoek beschreven zijn, en de tweede die der zwaartepunten van de driehoeken, die, zoo als $m'n'p'$ *buiten* den driehoek ABC gelegen zijn, doch hunne toppunten op de verlengden der zijden van den gegevenen driehoek hebben.

Aanmerking. Door constructie worden de hier gezochte meetkunstige plaatsen gemakkelijk gevonden, doordien men slechts de zwaartepunten van twee ingeschreven driehoeken te construeren heeft en door deze eene regte lijn te trekken. Tot het beschrijven van eenen ingeschreven gelijkzijdigen driehoek heeft men slechts eene willekeurige lijn rs te trekken, en daarop eenen gelijkzijdigen driehoek rst te construeren, de lijn Asn te trekken en uit n lijnen evenwijdig aan rs en st te beschrijven.

XI. Voorstel.

Door L. F. Beaulieu.

Men vraagt de meetkunstige plaats der zwaartepunten van al de gelijkzijdige driehoeken, die om eenen gegeven driehoek beschreven kunnen worden?

Op-

OPGELOST *door* L. F. BEAULIEU.

OPLOSSING *van* L. F. BEAULIEU.

Zij ABC (*Fig.* 6) de gegevene driehoek, nemen wij AC en de loodlijn AY als coördinaten assen, en zij verder mnp eene willekeurige gelijkzijdige driehoek om ABC beschreven, indien men dan mr en nq respectivelijk loodregt op np en mp trekt, dan is hun doorsnijdingspunt o het zwaartepunt van den driehoek mnp. Stellen wij de coördinaten der punten

$$\text{B},\quad \text{C},\quad m \text{ en } n,$$

gelijk aan

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}b\\ 0\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}x'\\ y'\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}x''\\ y''\end{matrix}\right\},$$

dan zullen de lijnen mn, mp en np, waarvan de eerste door het beginpunt A, de tweede door het punt B en de derde door het punt C gaat, tot vergelijkingen hebben

$$y = ax \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a),$$

$$y - \beta = a'(x - \alpha),$$

$$y = a''(x - b).$$

Daar nu de lijnen mp, np elk met de lijn mn eenen hoek van 60° maken, waarvan de tangens $= \sqrt{3}$ is, waarvoor wij hier ter bekorting t zullen stellen, zoo heeft men voor de tangens der hoeken, die de lijnen mp en np met den as der abscissen maken, volgens bekende formulen

$$a' = \frac{a+t}{1-at},$$

$$a'' = \frac{a-t}{1+at};$$

hierdoor veranderen de twee laatste vergelijkingen in

$$y - \beta = \frac{a+t}{1-at}(x - \alpha) \quad \ldots\ldots \quad (b),$$

en

$$y = \frac{a-t}{1+at}(x - b) \quad \ldots\ldots \quad (c).$$

De coördinaten van het punt m voldoen aan de vergelijkingen (a) en (b), en die van het punt n aan (a) en (c), derhalve

$$y' = ax' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

$$y' - \beta = \frac{a+t}{1-at}(x' - \alpha) \quad \ldots\ldots \quad (2),$$

$$y'' = ax'' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

$$y'' = \frac{a-t}{1+at}(x''-b) \quad \ldots\ldots \quad (4).$$

De vergelijkingen van de lijnen nq en mr, die respectivelijk op mp (b) en op np (c) loodregt staan, zullen zijn

$$y-y'' = -\frac{1-at}{a+t}(x-x'') \quad \ldots\ldots \quad (5),$$

$$y-y' = -\frac{1+at}{a-t}(x-x') \quad \ldots\ldots \quad (6).$$

Deze twee laatste vergelijkingen hebben te gelijk voor het punt o plaats; men heeft dus zes vergelijkingen, waarin de vijf onbepaalde grootheden a, x', y', x'' en y'' voorkomen; dezelve alzoo verdrijvende, zal de uitkomst in x en y en in bekenden uitgedrukt, de meetkunstige plaats van al de punten o aanwijzen.

De vergelijkingen (5) en (6) komen op de volgende neder

$$y(a+t)+x(1-at) = (a+t)y''+(1-at)x'',$$
$$y(a-t)+x(1+at) = (a-t)y'+(1-at)x';$$

hierin de waarden van y' en y'' uit (1) en (3) stellende, komt er

$$y(a+t)+x(1-at) = (1+a^2)x'',$$
$$y(a-t)+x(1+at) = (1+a^2)x'.$$

Uit de vergelijkingen (1), (2), (3) en (4) vindt men gemakkelijk

$$x' = \frac{\alpha t-\beta+(\alpha+\beta t)a}{(1+a^2)t},$$

en

$$x'' = \frac{(t-a)b}{(1+a^2)t},$$

deze waarden met de twee voorgaande vergelijkingen verbonden, geven

$$y(a+t)+(1-at)x = \frac{(t-a)b}{t},$$

en

$$y(a-t)+(1+at)x = \frac{\alpha t-\beta+(\alpha+\beta t)a}{t},$$

verdrijft men nu a uit deze beide vergelijkingen, in aanmerking nemende dat $t^2 = 3$ is, dan vindt men

$$x^2+y^2-\tfrac{2}{3}\beta y-\tfrac{2}{3}(\alpha+b)x = -\tfrac{2}{3}\frac{b}{t}(\alpha t+\beta).$$

Hetgeen alzoo aanwijst dat de meetkunstige plaats der bedoelde zwaartepunten eenen cirkel is.

GE-

GEVOLGEN. Men kan de gevondene vergelijking ook schrijven onder den vorm

$$\left\{x-\tfrac{1}{3}(\alpha+b)\right\}^2+(y-\tfrac{1}{3}\beta)^2=-\tfrac{1}{3}\frac{b}{t}(\alpha t+\beta)+\tfrac{1}{9}(\alpha+b)^2+\tfrac{1}{9}\beta^2.$$

Het tweede lid dezer vergelijking kan onder den vorm

$$\tfrac{1}{9}\left\{(\alpha-\tfrac{1}{2}b)^2+(\beta-\tfrac{1}{2}b\sqrt{3})^2\right\}$$

geschreven worden, en dan volgt daaruit dat de coördinaten van het middelpunt van den gevondenen cirkel zijn $\tfrac{1}{3}(\alpha+b)$ en $\tfrac{1}{3}\beta$, hetwelk ook juist de coördinaten van het zwaartepunt des gegevenen driehoeks zijn; het middelpunt van den gevondenen cirkel ligt dus in het zwaartepunt van den driehoek. De straal van dien cirkel is verder blijkbaar

$$\tfrac{1}{3}\sqrt{\left\{(\alpha-\tfrac{1}{2}b)^2+(\beta-\tfrac{1}{2}b\sqrt{3})^2\right\}},$$

welke waarde ook gemakkelijk geconstrueerd wordt. Is de gegevene driehoek gelijkbeenig, dan is $\alpha=\tfrac{1}{2}b$ en de straal van den cirkel is

$$\tfrac{1}{3}(\beta-\tfrac{1}{2}b\sqrt{3}).$$

Is de gegevene driehoek gelijkzijdig, dan is niet alleen $\alpha=\tfrac{1}{2}b$, maar ook nog $\beta=\tfrac{1}{2}b\sqrt{3}$, alzoo wordt dan de straal $=0$, waaruit de merkwaardige eigenschap volgt, dat *de zwaartepunten van al de gelijkzijdige driehoeken om eenen gelijkzijdigen driehoek beschreven, altijd in het zwaartepunt van den gegevenen driehoek gelegen zijn.*

XII. VOORSTEL.

Door L. F. BEAULIEU.

Door twee punten m en n van eene regte lijn in stelling gegeven ten opzigte van eene andere lijn AX in hetzelfde vlak gelegen, zijn twee onderling evenwijdige lijnen getrokken en daardoor een trapezium gevormd; men vraagt naar de meetkunstige plaats van het doorsnijdingspunt der diagonalen van al de trapezia, welke op deze wijze ontstaan kunnen?

OPGELOST *door* L. F. BEAULIEU.

OPLOSSING *van* L. F. BEAULIEU.

Zij in *Fig. 7.* m en n de gegevene punten ten opzigte der lijn AX gegeven, en nemen wij AX en AY voor coördinaten assen; als mede $Am=b$, $An=b'$, en de willekeurig doch even-

wijdige lijnen mp en nq getrokken hebbende $Ap = x'$ en $Aq = x''$; dan kan men de vergelijking van mp voorstellen door

$$y = ax + b,$$

en dan wordt die van de evenwijdige nq

$$y = ax + b'.$$

In deze vergelijkingen $y = 0$ stellende, verkrijgt men voor de abscissen Ap en Aq

$$Ap = x' = -\frac{b}{a},$$

$$Aq = x'' = -\frac{b'}{a}.$$

Alzoo is de vergelijking van mq, welke door de punten m en q gaat

$$y = -\frac{b}{x''}x + b,$$

of

$$y = \frac{ab}{b'}x + b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

en die van np door de punten n en p gaande

$$y = -\frac{b'}{x'}x + b',$$

of

$$y = \frac{ab'}{b}x + b' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Voor het snijpunt o dezer lijnen zullen de vergelijkingen (1) en (2) te gelijker tijd plaats hebben, en uit dezelve dus de grootheid a verdrijvende, zal men de betrekking der coördinaten van de snijpunten voor elk willekeurig stelsel van evenwijdige lijnen vinden. De vergelijkingen (1) en (2) geven nu

$$b'(y - b) = abx,$$

en

$$b(y - b') = ab'x,$$

deze in elkander gedeeld komt er

$$\frac{b'(y-b)}{b(y-b')} = \frac{b}{b'},$$

en dus

$$y = \frac{bb'}{b+b'}.$$

Deze uitkomst onafhankelijk van x zijnde, blijkt daaruit dat al de bedoelde punten o gelegen zijn in eene regte lijn Bo, evenwijdig aan AX, en welke dus zeer gemakkelijk gevonden wordt, door

door slechts eenig punt *a* voor eene willekeurige rigting der evenwijdige lijnen te construeren.

XIII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Men vraagt naar het aantal mogelijke vierkanten in geheele getallen, de eigenschap hebbende, dat de som van twee dezer vierkanten gelijk zij aan het derde plus de eenheid, en dat de som der wortels van de beide vierkanten 3 grooter zij dan de wortel van het derde vierkant?

OPGELOST *door* J. BASSAN, C. VAN SCHAICK, B. LUBBERS, J. SCHOTBORGH, Hz., J. S. SPEIJER, D. HOOLA VAN NOOTEN, M. G. SNOER, M. L. GOEDE, R. SPRUIT *en* M. DE LEON.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Laten de drie gevraagde vierkanten zijn x^2, y^2 en z^2, dan hebben wij, volgens de beide voorwaarden van het Voorstel,

$$x^2+y^2=z^2+1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

en

$$x+y=z+3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

De waarde van *z* uit de tweede vergelijking in de eerste gesteld, geeft

$$x^2+y^2=(x+y-3)^2+1$$
$$=x^2+y^2+2xy-6x-6y+10,$$

waaruit volgt

$$3(x+y)=xy+5,$$

dus

$$x=\frac{3y-5}{y-3}.$$

Men stelle nu $y-3=p$, dan is $3y-5=3p+4$, en hierdoor is dan

$$x=\frac{3p+4}{p}=3+\frac{4}{p},$$

als mede

$$y=p+3,$$

en

$$z=p+3+\frac{4}{p}.$$

Nu kan men voor *p* alleen de deelers van 4 nemen, dat is, achtervolgens stellen $p=\pm 1$, $p=\pm 2$ en $p=\pm 4$. Voor de positieve waarden van *p* vindt men

$x=7$, $y=4$ en $z=8$,
$x=5$, $y=5$ en $z=7$,

$x=4$,

$$x=4,\ y=7 \text{ en } z=8.$$

Het eerste en laatste antwoord komt hier op hetzelfde neer, en men vindt alzoo slechts twee verschillende antwoorden. Voor de negatieve waarden van p heeft men achtervolgens

$$x=-1,\ y=2 \text{ en } z=-2,$$
$$x=1,\ y=1 \text{ en } z=-1,$$

en

$$x=2,\ y=-1 \text{ en } z=-2.$$

Ook hier zijn de eerste en derde waarden niet onderscheiden, zoodat in het geheel slechts vier antwoorden in geheele getallen op het vraagstuk bestaan.

XIV. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Men begeert eene meetkunstige reeks van vijf termen in geheele getallen te vinden, de eigenschap hebbende, dat de tweede en vierde term vierkanten, en de som der overige termen eene derde magt zij?

OPGELOST *door* J. BASSAN, J. SCHOTBORGH, Hz., M. G. SNOER, G. BRANDSTEDER, D. HOOLA VAN NOOTEN, M. DE LEON, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER *en* C. VAN SCHAICK.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Laat de reeks voorgesteld worden door

$$qy^2,\ q^2y^2,\ q^3y^2,\ q^4y^2 \text{ en } q^5y^2,$$

dan is aan de eerste voorwaarde voldaan, dewijl de tweede en vierde termen vierkanten zijn. De som der overige termen is nu

$$y^2(q+q^3+q^5).$$

Om deze uitdrukking tot eene derde magt te maken kan men stellen

$$y^2=p^6(q+q^3+q^5)^2,$$

en dus

$$y=p^3(q+q^3+q^5).$$

Neemt men nu $p=1$ en $q=2$, dan komt er voor de reeks

3528, 7056, 14112, 28224 en 56448.

XV. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Men begeert eene rekenkunstige reeks van vijf termen in geheele getallen te vinden, de eigenschap hebbende, dat de eerste, derde en vijfde termen vierkanten zijn, en de som der tweede en vierde eene derde magt oplevere?

OP-

OPGELOST *door* J. BASSAN, D. HOOLA VAN NOOTEN, B. LUBBERS, M. DE LEON, G. BRANDSTEDER, J. SCHOTBORGH, Hz., W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER *en* M. L. GORDE.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Laat de eerste term der reeks zijn x^2, en de vijfde p^2x^2, dan is de derde term $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}p^2x^2=x^2\frac{1+p^2}{2}$; derhalve zal nu $\frac{p^2+1}{2}$ een vierkant moeten zijn, daartoe $p=q+1$ stellende, komt er

$$\frac{p^2+1}{2}=\tfrac{1}{2}q^2+q+1,$$

en nemende nu

$$\tfrac{1}{2}q^2+q+1=(aq-1)^2$$
$$=a^2q^2-2aq+1,$$

dan is

$$\tfrac{1}{2}q+1=a^2q-2a,$$

waaruit volgt

$$q=\frac{4a+2}{2a^2-1}.$$

Nemende nu $a=1$ dan wordt $q=6$ en $p=7$, hierdoor worden dan de eerste, derde en vijfde term der reeks

$$x^2,\ 25x^2 \text{ en } 49x^2,$$

alzoo is dan de tweede term

$$\frac{x^2+25x^2}{2}=13x^2,$$

en de vierde term

$$\frac{25x^2+49x^2}{2}=37x^2,$$

derhalve moet nu

$$13x^2+37x^2=50x^2$$

eene derde magt zijn; en dewijl $50=2.5^2$ is, zoo kan men voor x^2 stellen $2^2, 5^4, z^6$, of

$$x=2.5^2z^3=50z^3,$$

zoodat nu de reeks wordt

$$2500z^6,\quad 13\times2500z^6,\quad 25\times2500z^6,$$
$$37\times2500z^6 \text{ en } 49\times2500z^6.$$

XVI.

XVI. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Men vraagt twee getallen te vinden, de eigenschap hebbende dat de som der vierkanten door het eerste getal, het verschil der vierkanten door het tweede getal, en het product dezer getallen door hunne som deelbaar zij?

OPGELOST *door* J. BASSAN, J. SCHOTBORGH, Hz., C. VAN SCHAICK, J. S. SPEIJER, B. LUBBERS, D. HOOLA VAN NOOTEN, M. L. GORDÉ, M. G. SNOER, R. SPRUIT, M. DE LEON *en* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Laten de getallen zijn x en px, dan zal, volgens de eerste voorwaarde, $x^2+p^2x^2$ door x deelbaar moeten zijn, waaraan door de aangenomene onderstelling nu voldaan is; verder moet ook $p^2x^2-x^2$ of $x^2(p^2-1)$ door xp deelbaar zijn, hetgeen vordert dat

$$\frac{(p^2-1)x}{p}$$

een geheel getal zij, en daar nu p geen deeler van p^2-1 zijn kan, zoo moet p een factor van x wezen; wij stellen dan $qp=x$, en alsdan is het product der getallen $x\times px=qp\times p\times qp=q^2p^3$, hetwelk nu eindelijk door de som der getallen of door $x+px=pq+p^2q=pq(1+p)$ deelbaar moet zijn, alzoo zal

$$\frac{q^2p^3}{pq(1+p)}=\frac{qp^2}{1+p}$$

een geheel getal moeten zijn; doch daar $1+p$ geen factor van p kan zijn, zoo stellen wij $q=(1+p)r$; hierdoor wordt dan

$$x=pq=p(1+p)r,$$

en

$$px=p^2(1+p)r,$$

waarin nu voor p en r willekeurige getallen genomen kunnen worden. Voor $p=2$ en $r=1$ heeft men de getallen 6 en 12, en daar r factor van beide getallen is, zullen nu ook al de veelvouden van 6 en 12 aan de vraag voldoen.

XVII. VOORSTEL.

Door M. H. GODEFROI.

Twee boden reizen uit twee plaatsen m mijlen van elkander te ge-

lij-

lijker tijd af; de eene legt op den eersten dag a mijlen af, op den tweeden dag b mijlen meer dan op den eersten dag, op den derden dag b mijlen meer dan op den tweeden dag enz.; de andere bode daarentegen legt op den eersten dag a' mijlen af, op den tweeden dag b' mijlen minder enz.; hoeveel dagen zullen er verloopen eer zij elkander ontmoeten?

Opgelost *door* M. H. Godefroi, K. E. H. von Hoff, S. Prince, W. J. C. Rammelman Elsevier, M. de Leon, D. Hoola van Nooten, J. Schotborgh, Hz., R. Spruit, M. L. Goede *en* M. G. Snoer.

Oplossing *van* M. H. Godefroi.

Laten de beide boden x dagen tot hunne reis gebruiken, dan zal de eene eenen weg afleggen uitgedrukt door de reeks

$$a+(a+b)+(a+2b)\ \ldots\ +(a+(x-1)b),$$

hetwelk eene rekenkunstige reeks zijnde, voor derzelver som geeft

$$\{2a+(x-1)b\}\frac{x}{2}.$$

De weg door den tweeden bode afgelegd is blijkbaar

$$a'+(a'-b')+(a'-2b')\ \ldots\ +(a'-(x-1)b'),$$

waarvan de som is

$$\{2a'-(x-1)b'\}\frac{x}{2}.$$

De som der afgelegde wegen moet den afstand m opleveren, wij zullen dus de vergelijking hebben

$$(2a'-(x-1)b')x+(2a+(x-1)b)x=2m.$$

Hetwelk herleid zijnde, geeft

$$(b-b')x^2+2(a'+\tfrac{1}{2}b'+a-\tfrac{1}{2}b)x=2m\quad.\ (a),$$

en dus

$$x=-\frac{2(a'+a)+b'-b}{2(b-b')}\pm\sqrt{\left\{\frac{2m}{b-b'}+\left(\frac{2(a'+a)+b'-b}{2(b-b')}\right)^2\right\}}.$$

Aanmerking. Indien $b=b'$ is, dan geeft de vergelijking (a)

$$x=\frac{m}{a'+a},$$

volkomen dezelfde vergelijking, welke men zoude verkregen hebben, wanneer beide boden elken dag met dezelfde snelheid gereisd hadden; hetgeen alzoo de eene bode door het sneller

gaan

gaan wint, wordt door het langzamer gaan van den tweeden verloren.

XVIII. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Er zijn drie gangbare muntstukken; waarvan de waarden in stuivers uitgedrukt eene rekenkunstige reeks vormen, waarvan de gemeene rede in centen overgebragt, gelijk is aan het aantal stuivers der drie muntstukken; als men het middelste muntstuk met één stuiver vermindert, dan verandert de rekenkunstige reeks in eene meetkunstige; welke zijn deze drie muntstukken?

OPGELOST *door* B. LUBBERS, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, S. PRINCE, K. E. A. VON HOFF, M. DE LEON, J. S. SPEIJER, C. VAN SCHAICK, M. L. GOEDE, G. BRANDSTEDER, D. HOOLA VAN NOOTEN, J. SCHOTBORGH, Hz., M. G. SNOER, R. SPRUIT *en* J. MESSCHERT VAN VOLLENHOVEN.

OPLOSSING *van* B. LUBBERS.

Laat het getal stuivers in elk der munten bevat, zijn

$$x, \quad x+y \quad \text{en} \quad x+2y,$$

dan is aan de eerste voorwaarde voldaan. De gemeene rede is in centen uitgedrukt $5y$, derhalve geeft de tweede voorwaarde

$$5y = 3x + 3y,$$

of

$$2y = 3x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Het middelste stuk met één stuiver verminderd zijnde, is $x+y-1$, derhalve moeten de uitdrukkingen

$$x, \quad x+y-1 \quad \text{en} \quad x+2y$$

eene meetkunstige reeks vormen, hetgeen vereischt dat men hebbe

$$x(x+2y) = (x+y-1)^2,$$

en hierin voor y zijne waarde uit (1) gesteld, komt er

$$16x^2 = (5x-2)^2,$$

of

$$4x = \pm(5x-2);$$

het bovenste teeken gebruikende, komt er

$$x = 2,$$

en voor het benedenste

$$x = -\tfrac{2}{9},$$

dewijl nu alleen een geheele waarde van x kan gebruikt worden,

en

zoo nemen wij $x=2$, alzoo $y=3$, en wij hebben dus voor de reeks 2, 5 en 8. De bedoelde muntſtukken zijn dan ſtukken van twee Stuivers, vijf Stuivers en van acht Stuivers.

XIX. Voorstel.

Door N. J. Barends.

Iemand laat eene put graven, en bedingt voor den eerſten voet diepte, die men zal gegraven hebben, 5 *gulden, voor den tweeden voet* 80 *gulden, en zoo vervolgens voor elken voet telkens* 16 *maal meer dan voor den voorgaanden; als men nu* 2¾ *voet diep gegraven heeft ſtaakt men het werk; hoe veel moet er dan voor deze diepte betaald worden?*

Opgelost *door* N. J. Barends, J. Schotborgh, Hz., R. Spruit, D. Hoola van Nooten, M. L. Goede *en* M. de Leon.

Oplossing *van* N. J. Barends.

Dewijl de prijs voor het graven van elken meerderen voet diepte in eene meetkunstige reeks opklimt, zoo zal men den geheelen prijs voor eene gegevene diepte kunnen voorſtellen door de ſom der termen eener meetkunstige reeks, zoodat ſtellende de eerſte term $=x$ en de rede $=y$, men voor de reeks zal kunnen ſchrijven

$$x,\quad xy,\quad xy^2,\ enz.$$

Om een geheel aantal termen te hebben, zal men nu kunnen aannemen, dat elk der termen van de bovenſtaande reeks den prijs uitdrukt voor het graven van een vierde voet, zoodat x de prijs is van het eerſte vierde gedeelte van den eerſten voet, xy dat voor het tweede gedeelte van dien voet, *enz.* diensvolgens zal men voor den prijs van den eerſten voet hebben

$$x+xy+xy^2+xy^3=5,$$

en voor die van den tweeden voet

$$xy^4+xy^5+xy^6+xy^7=80;$$

voor deze laatſte vergelijking kan men ook ſchrijven

$$y^4(x+xy+xy^2+xy^3)=80,$$

en deze vergelijking door de eerste gedeeld, geeft

$$y^4 = 16,$$

of

$$y = 2.$$

Deze waarde in de eerste vergelijking gesteld, geeft

$$15x = 5,$$

of

$$3x = 1.$$

Om dan nu de prijs voor de diepte van $\frac{11}{4}$ voet te hebben, moet men de som van 11 termen der reeks nemen, dat is

$$x\frac{y^{11}-1}{y-1} = 682\tfrac{1}{3} \text{ gulden},$$

hetwelk alzoo de prijs is voor de geheele diepte.

Aanmerking. Men zoude welligt op het denkbeeld kunnen komen, dat, daar de prijs voor den eersten voet 5 is, voor den tweeden 5×16, en voor den n^{den} voet $5\times16^{n-1}$, derhalve de prijs voor den $\frac{11}{4}^{den}$ voet zoude zijn $5\times16^{\frac{7}{4}}=640$, hetwelk gevoegd bij den prijs voor de twee eerste voeten zoude geven 725 gulden. Doch men moet hierbij opmerken, dat, volgens den aard van het voorstel, de prijs voor eenige diepte gevonden wordt door de som van hetgeen betaald wordt voor de achtervolgende diepten waarop gegraven wordt, zoodat, bij voorbeeld, de prijs voor de twee eerste voeten is $5+80=85$ gulden; en dat, zoo men dus bij halve voeten rekende, ook de prijs der geheele diepte gevonden wordt door de som van het betaalde voor elk der voorgaande halve voeten. Volgens de zoo even gestelde formule zoude men nu voor den eersten halven voet betalen $5\times16^{-\frac{1}{2}}=\frac{5}{4}$, voor de tweede helft $5\times16^0=5$, en dus voor den geheelen eersten voet $5\frac{5}{4}=6\frac{1}{4}$ gulden, hetgeen tegen de voorwaarden van het vraagstuk strijdt en telkens grooter prijzen voor dezelfde diepte zoude geven, naarmate men zoude goedvinden de diepten in kleinere deelen af te deelen, en dit heeft bij de hier boven gebruikte oplossing geen plaats.

XX.

XX. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Hoe vele en welke regthoekige driehoeken kunnen er bestaan, waarin de zijden met de middellijn des ingeschreven cirkels eene rekenkunstige reeks vormen, waarvan de som gelijk is aan het getal vierkante eenheden van den inhoud?

OPGELOST *door* B. LUBBERS, M. L. GORDE, R. SPRUIT, M. G. SNOER, D. HOOLA VAN NOOTEN, M. DE LEON, S. PRINCE *en* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

OPLOSSING *van* B. LUBBERS.

Laten wij de reeks voorstellen door

$$x-3y,\quad x-y,\quad x+y \text{ en } x+3y,$$

dan is de eerste term de middellijn van den ingeschreven cirkel, de beide volgende zijn de regthoekszijden en de laatste stelt de hypotenusa voor. Wij hebben dan uit de eigenschap der regthoekige driehoeken

$$(x-y)^2+(x+y)^2=(x+3y)^2,$$

waaruit volgt $x^2+2y^2=6xy+9y^2,$

en dus $x=3y\pm\sqrt{16y^2};$

dus $x=7y,$

of $x=-y.$

De laatste voorwaarde van het vraagstuk geeft nog de vergelijking

$$\tfrac{1}{2}(x-y)(x+y)=4x,$$

of $x^2-8x=y^2.$

Nemende nu $x=-y$, dan komt er eene onbestaanbare vergelijking; voor $x=7y$ heeft men

$$49y^2-56y=y^2;$$

of $56y=48y^2.$

Hieraan wordt voldaan door $y=0$ en door $y=\frac{7}{6}$. De eerste waarde geeft geene eigenlijke reeks, terwijl de tweede waarde geeft $x=\frac{49}{6}$. De middellijn van den ingeschreven cirkel is, in het algemeen, gelijk aan viermaal den inhoud van den driehoek, gedeeld door den omtrek, dus in ons geval wordt deze middellijn

$$=\frac{2(x^2-y^2)}{3(x+y)}=\tfrac{2}{3}(x-y),$$

$$=\tfrac{2}{3}\left(\tfrac{49}{6}-\tfrac{7}{6}\right)=\tfrac{14}{3},$$

en daar deze waarde ook overeenstemt met die van $x - 3y$, als $x = \frac{49}{8}$ en $y = \frac{7}{8}$ is, zoo volgt daaruit, dat ook aan de eerst gestelde voorwaarde voldaan is, offchoon dezelve niet bij de oplossing van het vraagstuk gebezigd is. Eindelijk ziet men dat er slechts een enkele driehoek bestaat, die aan de gestelde voorwaarden voldoet; de zijden van dien driehoek zijn $\frac{21}{8}$, $\frac{28}{8}$ en $\frac{35}{8}$.

XXI. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Men vraagt drie geheele getallen te vinden, waarvan twee eene derde magt en het derde eene tweede magt moeten zijn, en dat daarenboven de som dezer getallen eene derde magt, en de som van derzelver wortels eene tweede magt zij?

OPGELOST *door* L. J. ULMAN, J. BASSAN, H. VAN BLANKEN, J. KÖHLER, D. HOOLA VAN NOOTEN, C. F. JULIUS *en* J. SCHOTBORGH, Hz.

OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

De som der getallen, die eene derde magt zijn moet, stelle men voor door

$$(px^2 + qx^2)^3 = p^3x^6 + 3p^2qx^6 + 3pq^2x^6 + q^3x^6,$$

dan zal men voor de twee getallen, die ieder op zich zelf eene derde magt moeten zijn, kunnen nemen p^3x^6 en q^3x^6, en voor het derde getal, dat een volkomen vierkant moet zijn, blijft er dus over

$$3p^2qx^6 + 3pq^2x^6.$$

Men stelle den wortel van dit vierkant te zijn $3rqx^3$, dan is

$$3p^2qx^6 + 3pq^2x^6 = 9r^2q^2x^6,$$

of

$$p^2 + pq = 3r^2q,$$

waaruit

$$q = \frac{p^2}{3r^2 - p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Verder moet ook $px^2 + qx^2 + 3rqx^3$ een volkomen vierkant zijn; zij ax de wortel daarvan, dan is

$$px^2 + qx^2 + 3rqx^3 = a^2x^2,$$

of

$$p + q + 3rqx = a^2 \quad \ldots\ldots \quad (2),$$

waaruit

$$x = \frac{a^2 - (p+q)}{3rq} \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

Wanneer nu de oplossing niet in *geheele* getallen verlangd ware, zou men in (1) voor p en r willekeurige getallen nemen, daaruit

uit de waarde van q afleiden, vervolgens in (3) eene willekeurige waarde aan a geven, daardoor x bepalen, en alsdan zou de vraag beantwoord zijn. Daar echter geheele getallen begeerd worden, moet men vooreerst voor p en r zulke getallen nemen, dat ook q een geheel getal worde, maar ten anderen moeten p en r ook zoodanig genomen worden, dat het eerste lid der vergelijking (2) een vierkant *kan* zijn; nam men, bij voorbeeld, $p=2$ en $r=1$, dan werd $q=4$, en alsdan ging de vergelijking (2) over in

$$6+12x=a^2;$$

schrijven wij nu het eerste lid dezer vergelijking in de gedaante $6(1+2x)$, dan blijkt het, dat $1+2x$ altijd oneven zijnde, en 6 slechts eenmaal den factor 2 bevattende, dit eerste lid geen vierkant en dus niet gelijk a^2 kan worden.

Neemt men echter $p=3$ en $r=2$, dan is $q=1$, en nu moet weder volgens (2) $4+6x=a^2$ een volkomen vierkant kunnen zijn; hieraan wordt blijkbaar voldaan door voor a eenig even getal te nemen dat niet door 3 deelbaar is; dewijl nu alle evene getallen, die door 3 niet deelbaar zijn, in den vorm $2(3b\pm1)$ begrepen zijn, stellen wij $a=2(3b\pm1)$, dan verkrijgen wij

$$4+6x=4(3b\pm1)^2,$$

waaruit volgt $\quad x=2b(3b\pm2)$;

zoodat wij voor de drie begeerde getallen de volgende algemeene vormen hebben

$$p^3x^6=1728\,b^6(3b\pm2)^6,$$
$$q^3x^6=\quad 64\,b^6(3b\pm2)^6$$

en $\quad 3p^2qx^6+3pq^2x^6=2304\,b^6(3b\pm2)^6$;

het benedenste teeken gebruikende en $b=1$ nemende, vinden wij voor de getallen 1728, 64, 2304.

Aanmerking. Door de wijze, waarop de begeerde getallen in den aanvang zijn voorgesteld, is eene nieuwe voorwaarde bij de vraag gevoegd geworden, te weten: dat de som der wortels van de twee gevraagde derde magten gelijk is aan den derden magtswortel uit de som der drie begeerde getallen. Zonder deze voorwaarde zouden nog meer getallen, dan die in de gevonden vormen begrepen zijn, aan het vraagstuk kunnen beantwoorden, zoo als, bij voorbeeld, 27, 125, 64.

XXII. VOORSTEL.

Door W. A. FROGER.

Men vraagt de waarde van ϕ te vinden, uit de vergelijking $Tang. 2\phi = Cos.(\alpha + 2\phi) + Sin.(\alpha + 2\phi)$?

OPGELOST door W. A FROGER, L. J. ULMAN, D. HOOLA VAN NOOTEN, J. KÖHLER *en* J. SCHOTBORGH, Hz.

OPLOSSING *van* W. A. FROGER.

Dewijl $Cos.(\alpha + 2\phi) = Cos.\alpha\, Cos. 2\phi - Sin.\alpha\, Sin. 2\phi$
en $Sin.(\alpha + 2\phi) = Sin.\alpha\, Cos. 2\phi + Cos.\alpha\, Sin. 2\phi$ is, substitueeren wij deze waarden in de opgegevene vergelijking, die daardoor overgaat in

$Tang. 2\phi = (Cos.\alpha + Sin.\alpha) Cos. 2\phi + (Cos.\alpha - Sin.\alpha) Sin. 2\phi$;
stellende nu kortheidshalve

$$Cos.\alpha + Sin.\alpha = p \text{ en } Cos.\alpha - Sin.\alpha = q,$$

zoo is $Tang. 2\phi = p\, Cos. 2\phi + q\, Sin. 2\phi$,
welke vergelijking, door $Tang. 2\phi$ gedeeld, geeft

$$1 = p \frac{Cos. 2\phi}{Tang. 2\phi} + q\, Cos. 2\phi.$$

schrijven wij nu $\frac{\sqrt{(1 - Cos^2. 2\phi)}}{Cos\ 2\phi}$, in plaats van $Tang. 2\phi$,

zoo komt er $1 = p \frac{Cos^2. 2\phi}{\sqrt{(1 - Cos^2. 2\phi)}} + q\, Cos\ 2\phi$,

hetgeen achtervolgens herleid wordt tot

$$p\, Cos^2. 2\phi = (1 - q\, Cos. 2\phi).\sqrt{(1 - Cos^2. 2\phi)},$$

$$p^2 Cos^4. 2\phi = 1 - 2q Cos. 2\phi + q^2 Cos^2. 2\phi - Cos^2. 2\phi + 2q Cos^3. 2\phi - q^2 Cos^4. 2\phi$$

$$(p^2 - q^2) Cos^4. 2\phi - 2q Cos^3. 2\phi + (1 - q^2) Cos^2. 2\phi + 2q Cos. 2\phi - 1 = 0,$$

of eindelijk

$$Cos^4. 2\phi - \frac{2q}{p^2 - q^2} Cos^3. 2\phi + \frac{1 - q^2}{p^2 - q^2} Cos^2. 2\phi + \frac{2q}{p^2 - q^2} Cos. 2\phi - \frac{1}{p^2 - q^2} = 0,$$

uit welke hoogere magtsvergelijking men de waarde van $Cos. 2\phi$ door benadering kan vinden, zoodra α en dus ook p en q in getallen gegeven zijn, en waardoor dan ook ϕ gevonden wordt.

XXIII. VOORSTEL.

Door W. A. FROGER.

Van eenen bolvormigen vierhoek zijn gegeven de vier zijden en de boog van den grooten cirkel, die het midden van twee overstaande zij-

zijden vereenigt; men vraagt den afstand van het midden van eene dezer zijden tot de overstaande hoekpunten?

OPGELOST *door* W. A. FROGER *en* D. HOOLA VAN NOOTEN.

OPLOSSING *van* W. A. FROGER.

Laat ABCD (*Fig.* 8) de bolvormige vierhoek zijn, EF de boog die het midden der twee overstaande zijden AD en BC vereenigt, en EC en EB de gevraagde afstanden; stellen wij dan

$$BC = 2a, \text{ en dus } BF = FC = a,$$

$$AD = 2b, \text{ en dus } AE = ED = b,$$

voorts $CD = c$, $AB = d$, $EF = m$, $EC = x$, $EB = y$, de hoek $DEC = \phi$, $AEB = \phi'$, $CEB = \phi''$, en $BFC = \psi$; dan heeft men

$$Cos.x = Cos.m\, Cos.a + Cos.\psi\, Sin.m\, Sin.a,$$

$$Cos.y = Cos.m\, Cos.a - Cos.\psi\, Sin.m\, Sin.a,$$

en door optelling

$$Cos.x + Cos.y = 2\, Cos.m\, Cos.a,$$

waaruit volgt

$$Cos.y = 2\, Cos.m\, Cos.a - Cos.x \quad \ldots\ldots (1).$$

Verder is

$$\left.\begin{aligned} Cos.\phi &= \frac{Cos.c - Cos\, b\, Cos.x}{Sin.b\, Sin.x}, \\ Cos.\phi' &= \frac{Cos.d - Cos.b\, Cos.y}{Sin.b\, Sin.y} \\ \text{en} \quad Cos.\phi'' &= \frac{Cos\, 2a - Cos.x\, Cos.y}{Sin.x\, Sin.y} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (2).$$

Het is bekend, dat als drie bogen p, q en r te zamen 180° uitmaken, men heeft

$$Cos^2.p + Cos^2.q + Cos^2.r + 2\, Cos\, p\, Cos.q\, Cos.r = 1;$$

dewijl nu $\phi + \phi' + \phi'' = 180°$ is, heeft men derhalve

$$Cos^2.\phi + Cos^2.\phi' + Cos^2.\phi'' + 2\, Cos.\phi\, Cos.\phi'\, Cos.\phi'' = 1;$$

hierin voor $Cos.\phi$, $Cos\,\phi'$ en $Cos.\phi''$ de waarden substitueerende in de vergelijkingen (2) opgegeven, zal men na eene herleiding, waarbij men al de Sinussen in Cosinussen uitdrukt, vinden

$$\begin{aligned} &\{1 - Cos^2.c + 4\, Cos.b\, Cos.c\, Cos\, x - 4\, Cos^2.b\, Cos^2.x\}\, Cos^2 y \quad \ldots \\ &-2\{Cos.2a\, Cos.b\, Cos.c + Cos.b\, Cos.d + (Cos.2a - 2\, Cos.2a\, Cos^2 b + Cos.c\, Cos.d) \\ &\qquad Cos.x - 2\, Cos.b\, Cos.d\, Cos^2.x\}\, Cos.y \quad \ldots\ldots \\ &+2\, Cos.2a\, Cos.b\, Cos.c - Cos^2.2a\, Cos^2.b + Cos^2.2a + Cos^2.b + Cos^2.c + Cos^2.d \\ &-2(Cos.b\, Cos.c + Cos.2a\, Cos.b\, Cos.d)\, Cos.x + (1 - Cos^2.d)\, Cos^2.x = 1. \end{aligned}$$

Wanneer men nu in deze laatste vergelijking voor *Cos.* y de waarde overbrengt in (1) gevonden, verkrijgt men eene vierdemagtsvergelijking, waarin alleen *Cos.* x onbekend is, en die dus door benadering kan opgelost worden; is *Cos.* x hierdoor bepaald, dan vindt men door (1) ook *Cos.* y gemakkelijk, weshalve alsdan x en y bekend worden.

XXIV. VOORSTEL.

Door J. JONKHERT.

De inhoud van eenen driehoek is gelijk aan den wortel uit het produkt der stralen van de vier cirkels, welke de drie zijden of derzelver verlengden aanraken. Men vraagt naar het bewijs?

OPGELOST *door* J. JONKHERT, L. J. ULMAN, C. F. JULIUS, J. SCHOTBORGH, Hz., J. KÖHLER, D. HOOLA VAN NOOTEN *en* J. WARNSINCK.

OPLOSSING *van* J. JONKHERT.

Laat ABC (*Fig.* 9) een willekeurige driehoek zijn, waarvan wij de zijden tegen over de hoeken A, B en C, door a, b en c voorstellen; noemen wij r de straal des cirkels P in den driehoek beschreven, en r' de straal des cirkels Q, die de zijde $BC = a$ uitwendig, en het verlengde der beide andere zijden inwendig aanraakt. Indien men dan aan den cirkel Q eene raaklijn DE evenwijdig met BC trekt, zijn de driehoeken ABC en ADE gelijkvormig; stellen wij dus $DE = n \times BC = na$, zoo is ook $AE = nb$, $AD = nc$, $r' = rn$ en

$$\textit{Inhoud driehoek } ADE = n^2 \times \textit{Inhoud driehoek } ABC.$$

Nu is $\quad \textit{drieh.}\ ABC = \frac{1}{2} r (a + b + c)$,

dus $\quad \textit{drieh.}\ ADE = \frac{1}{2} r n^2 (a + b + c)$,

en door aftrekking vinden wij nu den inhoud des vierhoeks

$$DBCE = \tfrac{1}{2} r n^2 (a + b + c) - \tfrac{1}{2} r (a + b + c) \quad . \quad . \quad (1).$$

Voor de inhoud van dien vierhoek kunnen wij nog eene andere uitdrukking bekomen, want het is klaar dat men heeft

$$DBCE = \tfrac{1}{2} r' (BC + CE + BD + DE),$$

of voor r' zijne waarde rn schrijvende, en de vier zijden des vierhoeks ook in hunne waarden uitdrukkende

$$\begin{aligned} DBCE &= \tfrac{1}{2} rn (a + nb - b + nc - c + na) \\ &= \tfrac{1}{2} rn (n(a + b + c) - (b + c - a)) \\ &= \tfrac{1}{2} r n^2 (a + b + c) - \tfrac{1}{2} rn (b + c - a) \quad . \quad . \quad . \quad (2). \end{aligned}$$

Stel-

Stellen wij nu de uitkomsten (1) en (2) aan elkander gelijk, dan komt er, na weglating van de gelijke termen en deeling, door $\frac{1}{2}r$

$$n(b+c-a)=a+b+c,$$

waaruit volgt $$n=\frac{a+b+c}{b+c-a};$$

zij voorts de inhoud des driehoeks ABC$=$I, en $a+b+c=2s$,

dan is $$r=\frac{I}{s};$$

maar dewijl alsnu de waarde van n uitgedrukt wordt door

$$n=\frac{s}{s-a},$$

zoo is $$r'=rn=\frac{I}{s-a};$$

voor de stralen der cirkels, die de zijden b en c uitwendig aanraken, vindt men op gelijke wijze

$$r''=\frac{I}{s-b},$$

$$r'''=\frac{I}{s-c};$$

door vermenigvuldiging dezer vier stralen vindt men nu

$$rr'r''r'''=\frac{I^4}{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

of, daar $s(s-a)(s-b)(s-c)=I^2$ is,

$$rr'r''r'''=I^2,$$

zoodat $I=\sqrt{rr'r''r'''}$ is.

XXV. VOORSTEL.

Door M. de Leon.

Men vraagt drie getallen te vinden onder de volgende voorwaarden: 1°. Dat het product van het grootste met het pronikgetal van 4 maal het kleinste, gelijk zij aan het pronikgetal van 3 maal het kleinste, vermenigvuldigd met het product van 2 maal het vierkant van het kleinste met het middelste. 2°. Dat het pronikgetal van 3 maal het kleinste vermenigvuldigd met het middelste, gelijk zij aan 9 maal het pronikgetal van 4 maal het kleinste. 3°. Dat de som van het grootste plus 2 maal het kleinste, gelijk zij aan het

pronikgetal van 3 maal het kleinste plus de derde magt van 2 maal het kleinste.

Opgelost *door* M. de Leon, C. F. Julius, D. Hoola van Nooten, M. L. Goede, R. Spruit, J. Schotborgh, Hz., C. van Schaick, G. Brandsteder, J. Köhler, M. G. Snoek *en* L. J. Ulman.

I. Oplossing *van* M. de Leon.

Stel de gevraagde getallen te zijn x, y en z, dan is het pronikgetal van 4 maal het kleinste $=16z^2+4z$, en het pronikgetal van 3 maal het kleinste $=9z^2+3z$; de voorwaarden van het vraagstuk geven de drie vergelijkingen

$$x(16z^2+4z)=2yz^2(9z^2+3z) \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

$$9(16z^2+4z)=y(9z^2+3z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

en $$x+2z=(9z^2+3z)+(2z)^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3);$$

de eerste vergelijking door $2z$ deelende, komt er

$$x(8z+2)=yz(9z^2+3z),$$

de vergelijking (2) met z vermenigvuldigende, geeft zulks

$$9z(16z^2+4z)=yz(9z^2+3z);$$

de achterste leden der beide laatste vergelijkingen volkomen hetzelfde zijnde, volgt daaruit

$$x(8z+2)=9z(16z^2+4z),$$

of $$x(4z+1)=18z^2(4z+1),$$

en ook $$(x-18z^2)(4z+1)=0.$$

Uit de vergelijking (3) volgt terstond

$$x=8z^3+9z^2+z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

en deze waarde voor x in de laatstgevondene overbrengende, hebben wij

$$(8z^3-9z^2+z)(4z+1)=0,$$

of $$(8z^2-9z+1)(4z+1)z=0,$$

en ook $$(z-1)(8z-1)(4z+1)z=0,$$

aan deze vergelijking voldoen

$$z=1,\ z=\tfrac{1}{8},\ z=-\tfrac{1}{4} \text{ en } z=0;$$

na de vergelijking (2) door z gedeeld te hebben, vinden wij uit dezelve de volgende overeenkomstige waarden voor y

$$y=15,\ y=13\tfrac{1}{11},\ y=0 \text{ en } y=12;$$

voor x vinden wij door (4) de overeenkomstige waarden

$$x=18,\ x=\tfrac{9}{32},\ x=\tfrac{3}{16} \text{ en } x=0.$$

Er

Er zijn dus slechts twee eigenlijke antwoorden op de vraag; en slechts een in geheele getallen, die alzoo zijn 18, 15 en 1.

II. OPLOSSING *van* C. F. JULIUS.

Men deele de vergelijking (1) door de vergelijking (2), dit geeft terstond

$$\frac{x}{9} = 2z^2,$$

weshalve $x = 18z^2$;

deze waarde voor x in de vergelijking (3) overgebragt zijnde, komt er, na door z gedeeld te hebben,

$$8z^2 - 9z + 1 = 0,$$

of $(z-1)(8z-1) = 0,$

waaruit volgt $z = 1$ of $z = \frac{1}{8}$; kunnende nu hierdoor de waarden van x en y gevonden worden.

XXVI. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Door welke waarden, in geheele getallen, kan men de twee uitdrukkingen $5x + 4$ *en* $4x + 5$, *gelijktijdig tot volkomene vierkanten maken?*

OPGELOST *door* C. F. JULIUS, J. BASSAN, D. HOOLA VAN NOOTEN, J. KÖHLER, L. J. ULMAN, H. VAN BLANKEN, J. SCHOTBORGH, Hz., J. S. SPIJER, G. BRANDSTEDER, M. G. SNOER, B. LUBBERS, R. SPRUIT *en* M. L. GOEDE.

OPLOSSING *van* C. F. JULIUS.

Reeds bij den eersten opslag blijkt het, dat voor $x = 1$ de beide opgegevene uitdrukkingen volkomen vierkanten worden, er blijft dus slechts over te onderzoeken of nog andere waarden van x in geheele getallen die voorwaarde vervullen kunnen; stellen wij te dien einde $x = y + 1$, dan veranderen $5x + 4$ en $5x + 5$ in $5y + 9$ en $4y + 9$, en nu moeten deze uitdrukkingen tot vierkanten gemaakt worden.

Stellen wij daartoe $5y + 9 = (5n + 3)^2$,

dan is $y = 5n^2 + 6n$,

deze waarde van y in $4y + 9$ overbrengende, verkrijgt men

$$4y + 9 = 20n^2 + 24n + 9;$$

stellen wij nu verder, dat $mn + 3$ de wortel is van de laatstgenoemde uitdrukking, dan hebben wij

$m^2 n^2 +$

$$m^2 n^2 + 6mn + 9 = 20n^2 + 24n + 9,$$

waaruit volgt $n = \frac{24 - 6m}{m^2 - 20}$.

Hierin kunnen nu voor m alle getallen genomen worden, die n tot een geheel getal maken; neemt men m positief en $= 6$, zoo wordt n eene eigenlijke breuk, en daar, door m grooter te nemen, $m^2 - 20$ sterker aangroeit dan $24 - 6m$, zoo zal, voor $m > 6$, n even zoo eene eigenlijke breuk blijven; neemt men m negatief en $= 11$, dan wordt n insgelijks eene eigenlijke breuk, en dit zelfde zal plaats hebben, zoo men m negatief en > 11 neemt. Hieruit volgt, dat voor m alleen de positieve geheele getallen van 0 tot 5, en de negatieve geheele getallen van 0 tot -10 kunnen genomen worden; onder alle deze bruikbare waarden voor m is er slechts eene, die n tot een geheel getal maakt, te weten $m = -4$, hierdoor wordt $n = -12$, $y = 648$ en $x = 649$. Deze gevondene waarde voor x is dus, behalve de eenheid, de eenige mogelijke, die aan de vraag beantwoordt.

Aanmerking. De opmerking, dat $x = 1$ terstond aan de vraag voldeed, heeft niets aan de algemeenheid der oplossing te kort gedaan, want ook zonder deze opmerking had men $x = y + 1$ kunnen stellen; de vergelijking $n = \frac{24 - 6m}{m^2 - 20}$ leert ook werkelijk de waarde $x = 1$ kennen, want het is genoeg voor m getallen te nemen, die n tot geen gebroken maken; hieraan voldoet ook $m = +4$, daarvoor wordt $n = 0$, $y = 0$ en dus $x = 1$.

XXVII. VOORSTEL.

Door J. Bassan.

Men vraagt twee vijfhoekige getallen te vinden, zoodanig dat de som van derzelver wortels, alsmede de som der getallen zelve, vierkanten worden?

Opgelost *door* J. Bassan, L. J. Ulman, C. F. Julius, H. van Blanken, J. Köhler, D. Hoola van Nooten, B. Lubbers, M. L. Gorde *en* R. Spruit.

Oplossing *van* J. Bassan.

Stel de wortels der gevraagde vijfhoekige getallen voor door x en px, dan moet, volgens de eerste voorwaarde,

$$x + px = x(1 + p)$$

een

een volkomen vierkant worden; hieraan kan men terstond voldoen door $1+p=x$ te nemen, waardoor de wortels veranderen in $1+p$ en $p(1+p)$;

De vijfhoekige getallen zelve zijn alsdan

$$\frac{3(1+p)^2-(1+p)}{2} \text{ en } \frac{3p^2(1+p)^2-p(1+p)}{2},$$

en derzelver som is na herleiding

$$\frac{(1+p)^2}{4}\times(6p^2+4).$$

deze uitdrukking (die, als men voor p een geheel getal neemt, ook een geheel getal zijn zal, omdat p oneven genomen wordende, $(1+p)^2$ en p even genomen wordende $6p^2+4$ door 4 deelbaar is) moet nu een volkomen vierkant zijn; de eerste factor is zulks reeds, dus behoeft alleen nog de factor $6p^2+4$ tot een vierkant gemaakt te worden. Stel dat $qp-2$ deszelfs wortel zij, dan is

$$6p^2+4=(qp-2)^2=q^2p^2-4pq+4,$$

waaruit men vindt $\quad p=\frac{4q}{q^2-6}$;

nemende nu $q=3$, zoo wordt $p=4$, hierdoor worden de wortels $1+p=5$ en $p(1+p)=20$, derhalve zijn 35 en 590 vijfhoekige getallen, die aan het gevraagde voldoen.

Aanmerking. Hoezeer $q=3$ de eenige waarde is, die voor p een geheel positief getal geeft, kan men daaruit niet besluiten, dat de gevondene getallen 35 en 590 de eenige geheele getallen zijn, die aan de vraag beantwoorden; want, door het stellen van x en px voor de beide wortels, heeft men stilzwijgend de nieuwe voorwaarde ingevoerd, dat de eene wortel een veelvoud van de andere zijn moet; het stellen van $1+p=x$ heeft insgelijks eene nieuwe voorwaarde aan de vraag toegevoegd, zonder deze bijkomende voorwaarden kunnen er nog meer antwoorden in geheele getallen gevonden worden, bij voorbeeld: 45 en 151.

XXVIII. VOORSTEL.

Door J. Bassan.

Men vraagt drie getallen te vinden, zoodat hunne som een vierkant zij, en dat de deeling van 6 in de som der beide eerste, in de

de som van het tweede en derde, en in de som van het eerste en derde getal respectivelijk 1, 2 *en* 3 *tot resten geeft?*

OPGELOST *door* L. J. ULMAN, J. BASSAN, C. F. JULIUS, M. G. SNOER, G. BRANDSTEDER, J. KÖHLER, D. HOOLA VAN NOOTEN, J. SCHOTBORGH, Hz., H. VAN BLANKEN, B. LUBBERS, J. S. SPIJER *en* C. VAN SCHAICK.

OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

Laten de gevraagde getallen zijn $6a+1$,
$6b$
en $6c+2$,

dan is, voor alle waarden in geheele getallen van a, b en c, aan de laatste voorwaarden der vraag voldaan; er blijft dus over om derzelver som een volkomen vierkant te doen zijn.

Stellen wij den wortel van dit vierkant $=3p$;

dan is $$6a+6b+6c+3=9p^2,$$
of $$2a=3p^2-2b-2c-1;$$
nemen wij nu voor b en c willekeurige getallen, en om het tweede lid door 2 deelbaar te maken voor p een oneven getal naar welgevallen, mits slechts $3p^2>2b+2c+1$ zij, dan wordt a onmiddellijk gevonden.

Stellen wij, bij voorbeeld, $b=4$
en $c=4$,
nemen wij verder $p=3$,
dan wordt $a=5$,
en de begeerde getallen zijn dan 31, 24 en 26.

XXIX. VOORSTEL.

Door M. H. GODEFROI.

Er is eene rekenkunstige reeks van vier termen, de som van den eersten en derden term, vermenigvuldigd met den vierden, geeft 64, *en de som van den tweeden en vierden met den eersten vermenigvuldigd geeft* 24; *welke is de reeks?*

OPGELOST *door* M. H. GODEFROI, C. F. JULIUS, L. J. ULMAN, D. HOOLA VAN NOOTEN, J. SCHOTBORGH, Hz., J. KÖHLER, B. LUBBERS, G. BRANDSTEDER, J. S. SPIJER, M. G. SNOER, F. VAN HEUKELOM, M. L. GOEDE, R. SPRUIT *en* G. GRAAFLAND.

OP-

OPLOSSING *van* M. H. GODEFROI.

Laat de reeks zijn $x - 3y$, $x - y$, $x + y$ en $x + 3y$, dan is door de voorwaarden van het vraagstuk

$$(2x - 2y)(x + 3y) = 64 \text{ of } x^2 + 2xy + 3y^2 = 32,$$

en $$(2x + 2y)(x - 3y) = 24 \text{ of } x^2 - 2xy - 3y^2 = 12,$$

deze vergelijkingen van elkander aftrekkende, komt er, na door 4 gedeeld te hebben,

$$xy = 5,$$

dezelve optellende komt er, na door 2 gedeeld te hebben,

$$x^2 - 3y^2 = 22 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1);$$

het vierkant der laatste vergelijking is

$$x^4 - 6x^2y^2 + 9y^2 = 484,$$

maar $xy = 5$ zijnde, is $12x^2y^2 \quad = 300$,

dus wordt door optelling

$$x^4 + 6x^2y^2 + 9y^2 = 784,$$

waarvan de vierkantswortel is

$$x^2 + 3y^2 = \pm 28 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2);$$

nu weder de vergelijkingen (1) en (2) optellende en aftrekkende, vinden wij

$$2x^2 = 50 \text{ of } = -6 \text{ en } 6y^2 = 6 \text{ of } = -50,$$

de negative waarden maken x en y onbestaanbaar, dus hebben wij alleen

$$x^2 = 25 \quad \text{en} \quad y^2 = 1,$$

dus $$x = \pm 5 \quad \text{en} \quad y = \pm 1;$$

derhalve is de reeks ± 2, ± 4, ± 6 en ± 8.

XXX. VOORSTEL.

Door M. H. GODEFROI.

Als men, van eene rekenkunstige reeks van zes termen, de som der twee eersten vermenigvuldigt met de som der twee middelsten en deelt door de som der twee laatsten, dan komt er $5\frac{1}{3}$; *en wanneer men de som der twee laatsten vermenigvuldigt met de som der twee middelsten, en deelt door de som der twee eersten, dan komt er* 48. *Welke is de reeks?*

OPGELOST *door* M. G. SNOER, B. LUBBERS, L. J. ULMAN, C. F. JULIUS, J. SCHOTBORGH, Hz., D. HOOLA VAN NOOTEN, J. KÖHLER, M. H. GODEFROI, G. BRANDSTEDER, M. L. GOEDE *en* R. SPRUIT.

OP-

OPLOSSING *van* M. G. SNOER.

Zij de reeks $x-5y$, $x-3y$, $x-y$, $x+y$, $x+3y$ en $x+5y$ dan moeten wij hebben

$$\frac{(2x-8y)\times 2x}{2x+8y}=5\tfrac{1}{3},$$

en
$$\frac{(2x+8y)\times 2x}{2x-8y}=48;$$

het product dezer vergelijkingen geeft terstond

$$4x^2=256,$$

dus
$$x^2=64,$$

en
$$x=\pm 8,$$

door substitutie dezer waarden van x, in eene der eerste vergelijkingen, vindt men

$$\text{voor } x=+8,\ y=1,$$
$$\text{voor } x=-8,\ y=-4,$$

en de reeks is dus

3, 5, 7, 9, 11 en 13,

of 12, 4, —4, —12, —20 en —28.

XXXI. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Iemand neemt voor eenige maanden eene zekere som op interest tegen 6 ten honderd 's jaars; indien hij nu na vier maanden $\frac{1}{3}$, *na nog drie maanden* $\frac{1}{4}$ *van de rest, na verloop van nog twee maanden* $\frac{1}{5}$ *van het dan nog verschuldigde, en de rest op den vervaltijd voldoet, bij elke termijn de verschenen interessen voegende, zoo vraagt men, hoe veel hij op interest genomen heeft, als de gezamenlijke interessen met het getal maanden 1707 uitmaken, en het product van* $\frac{1}{5}$ *van het getal maanden met* $\frac{1}{4}$ *der gezamenlijke interessen 1269 is?*

OPGELOST *door* G. BRANDSTEDER, L. J. ULMAN, J. S. SPIJER, M. G. SNOER, D. HOOLA VAN NOOTEN, C. F. JULIUS, J. SCHOTBORGH, Hz., R. SPRUIT, M. L. GOEDE *en* J. KÖHLER.

OPLOSSING *van* G. BRANDSTEDER.

Stellen wij het aantal maanden $=x$, dan belopen de gezamenlijke interessen $1707-x$, en dan hebben wij volgens het voorstel

$$\frac{x}{4}\times\frac{1707-x}{5}=1269,$$

of

of, na herleiding,

$$x^2 - 1707x = -25380,$$

waaruit wij hebben

$$x = 853\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{(853\tfrac{1}{2})^2 - 25380};$$

alzoo is $x = 1692$ of $x = 15$.

Nemen wij $x = 15$, dan is het beloop der gezamenlijke interesſen of $1707 - x = 1692$.

Stellen wij verder het op interest genomen kapitaal, ter vermijding der gebrokens, $60y$, dan beloopt de interest

gedurende de vier eerſte maanden		over het geheele kapitaal	$60y$,
„ de drie volgende	„	„ het overblijvende	$40y$,
„ de twee	„ „	„ „ „	$30y$,
„ de zes	„ „	„ „ „	$24y$.

Om deze gedeeltelijke interesſen te berekenen hebben wij

Kap. × *Tijd* : *Kap.* × *Tijd* = *Intr.* : *Intr.*

$$100 \times 12 : 60y \times 4 = 6 : \frac{6y}{5},$$

$$100 \times 12 : 40y \times 3 = 6 : \frac{3y}{5},$$

$$100 \times 12 : 30y \times 2 = 6 : \frac{3y}{10},$$

$$100 \times 12 : 14y \times 6 = 6 : \frac{18y}{25}.$$

De ſom van deze gedeeltelijke interesſen de gezamenlijke uitmakende, welke reeds gevonden zijn 1692 te beloopen, zoo is:

$$\frac{6y}{5} + \frac{3y}{5} + \frac{3y}{10} + \frac{18y}{25} = 1692,$$

of

$$\frac{141y}{50} = 1692,$$

waaruit men terſtond vindt $y = 600$;

het gezochte kapitaal of $60y$ beloopt dus 36000.

Hadden wij het aantal maanden of $x = 1692$ genomen, zoo was het gezamenlijk beloop der interesſen 15 geweest, en voor het kapitaal zou gevonden zijn $7\frac{1193}{3401}$.

XXXII. Voorstel.

Door F. van Heukelom, Jr.

Men vraagt vier getallen te vinden, welker ſom 70 bedraagt;

als men het eerste en tweede vermenigvuldigt en bij het product het derde en vierde telt, dan is de som 105; *het eerste met het derde vermenigvuldigd en bij het product het tweede en vierde geteld geeft* 165; *eindelijk geeft het eerste met het vierde vermenigvuldigd en bij het product het tweede en derde geteld* 185?

OPGELOST *door* D. HOOLA VAN NOOTEN, C. F. JULIUS, M. G. SNOER, J. KÖHLER, L. J. ULMAN, J. S. SPYER, F. VAN HEUKELOM, JR., J. SCHOTBORGH, HZ., M. L. GOBDE, B. LUBBERS, G. BRANDSTEDER *en* C. VAN SCHAICK.

OPLOSSING *van* D. HOOLA VAN NOOTEN.

Stellen wij de vier gevraagde getallen voor door x, y, z en v, dan hebben wij volgens de voorwaarden van het voorstel

$$x+y+z+v=70,$$
$$xy+z+v=105,$$
$$xz+y+v=165,$$
en
$$xv+y+z=185,$$

de som der drie laatste vergelijkingen is

$$x(y+z+v)+2(y+z+v)=455,$$

waaruit terstond volgt

$$y+z+v=\frac{455}{x+2},$$

dit in de eerste vergelijking overbrengende, komt er

$$x+\frac{455}{x+2}=70,$$

of na herleiding $x^2-68x=-315$,

waaruit men vindt $x=5$ of $x=63$;

deze waarden van x in de vier eerste vergelijkingen overbrengende, komt er

$$\left.\begin{array}{lr} y+z+v=65, & (a) \\ 5y+z+v=105, & (b) \\ 5z+y+v=165 & (c) \\ \text{en } 5v+y+z=185; & (d) \end{array}\right\} \text{of} \left\{\begin{array}{lr} y+z+v=7, & (a) \\ 63y+z+v=105, & (b) \\ 63z+y+v=165 & (c) \\ \text{en } 63v+y+z=185; & (d) \end{array}\right.$$

trekken wij nu, in elk dezer beide stelsels, de vergelijkingen (a) af van ieder der vergelijkingen (b), (c) en (d), zoo vinden wij

$$\left.\begin{array}{lll} 4y=40 & \text{en} & y=10, \\ 4z=100 & \text{en} & z=25, \\ 4v=120 & \text{en} & v=30; \end{array}\right\} \text{of} \left\{\begin{array}{lll} 62y=98 & \text{en} & y=1\tfrac{18}{31}, \\ 62z=158 & \text{en} & z=2\tfrac{17}{31}, \\ 62v=178 & \text{en} & v=2\tfrac{27}{31}; \end{array}\right.$$

zoo-

zoodat de begeerde getallen zijn

$$5,\ 10,\ 25 \text{ en } 30;$$

of

$$63,\ 1\tfrac{18}{31},\ 2\tfrac{17}{31} \text{ en } 2\tfrac{27}{31}.$$

XXXIII. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Van eene harmonische reeks zijn de eerste en derde term op elkander volgende driehoekige getallen; en de tweede en vierde term op een volgende pronik getallen; welke reeks kan dit zijn?

OPGELOST *door* J. SCHOTBORGH, Hz., L. J. ULMAN, C. F. JULIUS, J. KÖHLER, D. HOOLA VAN NOOTEN *en* B. LUBBERS.

OPLOSSING *van* J. SCHOTBORGH, Hz.

Stel de wortels van de driehoekige getallen, die de eerste en derde termen der gevraagde reeks zijn, voor door

$$x - 1 \text{ en } x;$$

laat de wortels van de pronikgetallen, die de tweede en vierde termen uitmaken, zijn

$$y - 1 \text{ en } y;$$

dan is de reeks zelve

$$\frac{x^2 - x}{2},\ y^2 - y,\ \frac{x^2 + x}{2} \text{ en } y^2 + y;$$

door de eigenschap der harmonische reeksen hebben wij nu de evenredigheden

$$\frac{x^2 - x}{2} : \frac{x^2 + x}{2} = (y^2 - y) - \frac{x^2 - x}{2} : \frac{x^2 + x}{2} - (y^2 - y),$$

$$\text{en } y^2 - y : y^2 + y = \frac{x^2 + x}{2} - (y^2 - y) : (y^2 + y) - \frac{x^2 + x}{2};$$

Op deze beide evenredigheden den regel toepassende, dat de som van de termen der eerste reden tot hun verschil staat gelijk de som van de termen der tweede reden tot hun verschil, zoo komt er

$$x^2 : x = x : x^2 - 2y^2 + 2y \text{ of } x : x = 1 : x^2 - 2y^2 + 2y,$$

$$\text{en } 2y^2 : 2y = 2y : 2y^2 - x^2 - x \text{ of } 2y : 2y = 2 : 2y^2 - x^2 - x;$$

uit deze evenredigheden volgt, dat wij hebben

$$x^2 - 2y^2 + 2y = 1,$$

en

$$2y^2 - x^2 - x = 2,$$

door optelling hiervan is $2y - x = 3$,

of

$$x = 2y - 3,$$

 de-

deze waarde van x ſubſtitueerende in $x^2 - 2y^2 + 2y = 1$, komt er na herleiding

$$y^2 - 5y + 4 = 0,$$

of

$$(y-1)(y-4) = 0,$$

zoodat $y = 1$, of $y = 4$ zijn moet; dewijl echter $y = 1$ eene negative waarde voor x zou geven, nemen wij alleen $y = 4$, dan wordt $x = 2y - 3 = 5$, en bij gevolg is de reeks

10, 12, 15 en 20.

XXXIV. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Men vraagt eenen vierhoek te berekenen en te conſtrueren, wanneer de drie zijden gegeven zijn en daarenboven bekend is, dat de diagonalen elkander regthoekig doorſnijden?

OPGELOST *door* I. WARNSINCK, D. HOOLA VAN NOOTEN, L. J. ULMAN, C. F. JULIUS, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER *en* J. SCHOTBORGH, Hz.

OPLOSSING *van* I. WARNSINCK.

Dewijl er in het algemeen ter bepaling van eenen vierhoek vijf van elkander onafhankelijke gegevens vereiſcht worden, zoo is dit vraagſtuk onbepaald; om zulks nader te doen blijken, zullen wij in de eerſte plaats de conſtructie van den gevraagden vierhoek aanwijzen. Laten a, b en c de drie gegevene zijden zijn; beſchrijven wij dan op eene lijn $AB = a$ (*Fig.* 10) eenen halven cirkel, nemen wij in deszelfs omtrek een willekeurig punt E, en trekken wij, uit A en B, door dat punt E onbepaalde regte lijnen AM en BN; indien wij dan verder uit A, met eenen ſtraal $= c$, een boogje beſchrijven, dat BN in C ſnijdt, even zoo uit B, met eenen ſtraal $= b$, een boogje, dat AM in D ſnijdt, en eindelijk de punten C en D vereenigen, dan zal ABCD de begeerde vierhoek zijn. Daar nu het punt E willekeurig in den omtrek des halven cirkels is genomen, zal men, door verplaatſing van dit punt, een oneindig aantal in gedaante verſchillende vierhoeken kunnen conſtrueren, die aan de vraag voldoen. Het is echter opmerkenswaardig, dat, waar men ook het punt E neemt, de vierde zijde CD altijd even groot zal blijven; men heeft namelijk

$$AE^2 = AB^2 - BE^2,$$

dus

dus $CE^2 = AC^2 - AE^2 = AC^2 - AB^2 + BE^2$ . . (1);
voorts $DE^2 = BD^2 - BE^2$,
en dus $CE^2 = CD^2 - DE^2 = CD^2 - BD^2 + BE^2$ . . (2);
de vergelijkingen (1) en (2) met elkander verbonden, geven

$$CD^2 = AC^2 + BD^2 - AB^2,$$

of, zoo wij $CD = x$ ſtellen,

$$x = \sqrt{(b^2 + c^2 - a^2)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3).$$

Wat dus de berekening van den gevraagden vierhoek betreft, blijkt het, dat wel uit de drie gegevene zijden de vierde kan gevonden worden, zoo als dezelve in (3) werkelijk gevonden is, maar verder kan zich ook de vraag om den vierhoek te berekenen niet uitſtrekken, want hoeken, inhoud, diagonalen, enz. zijn niet door de gegevens bepaalbaar.

Aanmerkingen. 1°. De boog uit B, met b als ſtraal beſchreven, ſnijdt AM andermaal in d; ABdC is dus ook een vierhoek, die aan de voorwaarden der vraag voldoet, en het is hier ligt in te zien, dat werkelijk $CD = Cd$ is, de begeerde vierhoek kan dus eenen inſpringenden hoek hebben. Wilde men te gelijker tijd op BN het andere ſnijpunt c nemen, zoo zoude men, in plaats van eenen eigenlijken vierhoek, de figuur ABmdc verkrijgen, hetwelk alsdan moet aangemerkt worden als eenen vierhoek, waarvan, behalven AB en cd, ook Ac en Bd zijden zijn, en die Ad en Bc tot diagonalen heeft.

2°. Uit (3) hebben wij

$$x^2 + a^2 = b^2 + c^2;$$

daar deze vergelijking alleen rust op de eigenſchap dat de diagonalen elkander regthoekig ſnijden, zal zij geen plaats hebben, indien de diagonalen eenigen ſcherpen of ſtompen hoek vormen; en wij kunnen dus hieruit beſluiten, *dat, als in eenen vierhoek de ſom der vierkanten van twee der overſtaande zijden gelijk is aan de ſom der vierkanten van de twee andere tegen elkander overſtaande zijden, de diagonalen elkander regthoekig zullen ſnijden.*

XXXV. VOORSTEL.

Door C. van Schaick.

Men vraagt de waarde van x en y uit de vergelijkingen $x^2 + y^2 + x + y = 530$ en $xy + x + y = 230$ te vinden?

Opgelost *door* J. Köhler, J. Schotborgh, Hz., I. Warnsinck,

UINCK, J. S. SPYER, C. F. JÜLIUS, C. VAN SCHAICK, L. J. ULMAN, M. G. SNOER, M. L. GOEDE, G. BRANDSTEDER, D. HOOZA VAN NOOTEN en B. LUBBERS.

OPLOSSING van J. KÖHLER.

Het dubbeld der tweede opgegevene vergelijking bij de eerste optellende, verkrijgt men

$$(x+y)^2+3(x+y)=990,$$

waaruit men vindt

$$x+y=30 \text{ of } =-33.$$

Gebruikt men nu de positieve waarde van $x+y$, dan verkrijgt men, door van elk der opgegevene vergelijkingen $x+y=30$ af te trekken,

$$x^2+y^2=500 \text{ en } xy=200.$$

Van deze beide vergelijkingen de eerste, met het dubbeld der laatste, verminderende, verkrijgt men

$$(x-y)^2=100,$$

dus is $x-y=\pm 10$;

maar $x+y=30$

zijnde, zoo vinden wij door optelling en aftrekking

$$2x=40 \text{ en } 2y=20,$$

dat is $x=20$ en $y=10$,

of $2x=20$ en $2y=40$,

dat is $x=10$ en $y=20$.

Gebruikt men de negatieve waarde voor $x+y$, en handelt men als voren, dan vindt men achtervolgens

$$x^2+y^2=563 \text{ en } xy=263,$$

$$(x-y)^2=37,$$

$$x-y=\pm\sqrt{37};$$

die verbonden met $x+y=-33$,

geeft $2x=-33\pm\sqrt{37}$ en $2y=-33\mp\sqrt{37}$,

of $x=\frac{1}{2}(-33\pm\sqrt{37})$ en $y=\frac{1}{2}(-33\mp\sqrt{37})$.

XXXVI. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Van eenen regthoekigen driehoek is de hypothenusa en de loodlijn, die uit den regten hoek op dezelve valt, in geheele getallen uitgedrukt; men vraagt nu ook de regthoekszijden in geheele getallen te bepalen?

OP-

OPGELOST *door* L. J. ULMAN, D. HOOLA VAN NOOTEN, J. KÖHLER, B. LUBBERS, G. BRANDSTEDER *en* C. F. JULIUS.

OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

Daar het er hier alleen op aankomt eenen regthoekigen driehoek zoodanig te bepalen, dat niet alleen de drie zijden, maar ook de loodlijn, die uit den regten hoek op de hypothenusa wordt nedergelaten, in geheele getallen worden uitgedrukt, zoo nemen wij als genoegzaam bekend aan, dat men de drie zijden van eenen regthoekigen driehoek in geheele getallen wete te vinden.

Laten dan a, b en c de drie zijden van eenen regthoekigen driehoek in geheele getallen en respectivelijk de kortste regthoekszijde, de langste regthoekszijde en de hypothenusa voorstellen; indien wij dan deze drie zijden eerst met a en daarna met b vermenigvuldigen, verkrijgen wij

$$a^2,\ ab \text{ en } ac,$$

en

$$ab,\ b^2 \text{ en } bc,$$

voor de zijden van twee nieuwe regthoekige driehoeken, die elk in het bijzonder met den eersten, en dus ook onderling gelijkvormig zijn. Verder is de langste regthoekszijde van de eerste dier twee nieuwe driehoeken gelijk aan de kortste van de tweede; voegen wij nu deze twee driehoeken met hunne gelijke regthoekszijden tegen elkander, zoo als in *Fig.* 11, dan ontstaat daaruit weder eenen nieuwen regthoekigen driehoek ABC, waarvan niet alleen de zijden maar ook de loodlijn in geheele getallen zijn uitgedrukt, en wij hebben alzoo

$$AB = a^2 + b^2 = c^2,$$
$$BC = bc,$$
$$AC = ac,$$
$$CD = ab,$$

nemen wij nu voor a, b en c de bekende getallen 3, 4 en 5, zoo is $AB = 25$, $BC = 20$, $AC = 15$ en $CD = 12$.

AANMERKING. Het is bekend dat de drie zijden van eenen regthoekigen driehoek in geheele getallen algemeen kunnen voorgesteld worden door

$$p^2 - q^2,\quad 2pq \text{ en } p^2 + q^2,$$

waar-

waarin p en q alle mogelijke geheele getallen kunnen zijn, mits $p > q$ zij.

Stellen wij dus $a = p^2 - q^2$,

$b = 2pq$,

en $c = p^2 + q^2$;

zoo vinden wij $AB = (p^2+q^2)^2$,

$BC = 2pq(p^2+q^2)$,

$AC = p^4 - q^4$,

$CD = 2pq(p^2-q^2)$;

welke algemeene vormen aan het gevraagde beantwoorden, en die wij nog algemeener kunnen maken, door op te merken, dat ook alle veelvouden der reeds gevonden vormen aan de vraag moeten voldoen; als dus m eenig willekeurig geheel getal voorstelt, hebben wij

$$AB = m(p^2+q^2)^2,$$
$$BC = 2pqm(p^2+q^2),$$
$$AC = m(p^4-q^4),$$
$$CD = 2pqm(p^2-q^2);$$

voor $m = 10$, $p = 3$ en $q = 1$, hebben wij

$AB = 1000$, $BC = 600$, $AC = 800$ en $CD = 480$.

XXXVII. VOORSTEL.

Door L. F. BEAULIEU.

Welke betrekking bestaat er 1°. tusschen de Sinussen en 2°. tusschen de Cosinussen van vier hoeken, wanneer de som gelijk is aan $(2m+1)$ maal twee regte hoeken; zijnde m een geheel positief getal?

OPGELOST *door* L. F. BEAULIEU, A. L. HECTOR, J. SCHOTBORGH, Hz. *en* D. HOOLA VAN NOOTEN.

I. OPLOSSING *van* L. F. BEAULIEU.

Noemen wij u, x, y en z de vier hoeken of bogen, waarvan de som $u+x+y+z = 2R(2m+1)$ is, zijnde $R = 90°$, dan heeft men terstond de drie volgende identieke vergelijkingen

$$u+x = 2R(2m+1) - (y+z),$$
$$u+y = 2R(2m+1) - (x+z),$$
$$u+z = 2R(2m+1) - (x+y);$$

nu is algemeen

Cos.

$$Cos.(2R(2m+1)-A) = Cos.(4Rm+2R-A) = \ldots$$
$$= Cos.(2R-A) = -Cos.A,$$

en dus zal men hebben

$$Cos.(u+x) = -Cos.(y+z),$$
$$Cos.(u+y) = -Cos\ (x+z),$$
$$Cos.(u+z) = -Cos.(x+y);$$

wanneer wij nu deze vergelijkingen ontwikkelen, en daarbij kortheidshalve de Sinusſen van u, x, y en z reſpectivelijk door s, s', s'', s''', en derzelver Coſinusſen door c, c', c'', c''', voorſtellen, vinden wij

$$\left.\begin{aligned} ss' + s''s''' &= cc' + c''c''' \\ ss'' + s's''' &= cc'' + c'c''' \\ ss''' + s's'' &= cc''' + c'c'' \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (A),$$

en het zijn nu deze vergelijkingen, die wij tot het vinden der gezochte betrekkingen zullen gebruiken.

1°. *Betrekking tusſchen de Sinusſen.*

Vermenigvuldigt men de drie vergelijkingen (A) met elkander, kortheidshalve $(ss'+s''s''')(ss''+s's''')(ss'''+s's'') = P$ ſtellende, dan komt er

$$P = cc'c''c'''(c^2+c'^2+c''^2+c'''^2) + c^2c'^2(c''^2+c'''^2) \ldots$$
$$+ c''^2c'''^2(c^2+c'^2) \ldots\ldots (B),$$

terwijl men uit de eerſte der vergelijkingen (A), na dezelve in het vierkant gebragt te hebben, trekt

$$2cc'c''c''' = (ss'+s''s''')^2 - c^2c'^2 - c''^2c'''^2;$$

wanneer men nu (B) met 2 vermenigvuldigt en dan daarin deze waarde voor $2cc'c''c'''$ overbrengt, vindt men

$$2P = (c^2+c'^2+c''^2+c'''^2)(ss'+s''s''')^2$$
$$-c^2c'^2(c^2+c'^2) - c^2c'^2(c''^2+c'''^2)$$
$$-c''^2c'''^2(c^2+c'^2) - c''^2c'''^2(c''^2+c'''^2)$$
$$+2c^2c'^2(c''^2+c'''^2) + 2c''^2c'''^2(c^2+c'^2),$$

of na herleiding

$$2P = (c^2+c'^2+c''^2+c'''^2)(ss'+s''s''')^2 - (c^2c'^2 - c''^2c'''^2)$$
$$(c^2+c'^2-c''^2-c'''^2) \ldots\ldots (C),$$

hierin nu voor elke Cos^2. zijne waarde $1 - Sin^2$. ſubſtituerende, verandert onze vergelijking in

$$2P = (4-s^2-s'^2-s''^2-s'''^2)(ss'+s''s''')^2 - \ldots\ldots$$
$$(s^2+s'^2-s''^2-s'''^2-s^2s'^2+s''^2s'''^2)(s^2+s'^2-s''^2-s'''^2),$$

 of

of wat hetzelfde is

$$2P = 4(ss' + s''s''')^2 - (ss' + s''s''')^2(s^2 + s'^2 + s''^2 + s'''^2)$$
$$-(s^2+s'^2-s''^2-s'''^2)^2+(s^2s'^2-s''^2s'''^2)(s^2+s'^2-s''^2-s'''^2) \text{ (D)},$$

maar de ſom van de tweede en vierde termen kan geſchreven worden

$$-(ss'+s''s''')\{(ss'+s''s''')(s^2+s'^2+s''^2+s'''^2)-(ss'-s''s''')$$
$$(s^2+s'^2-s''^2-s'''^2)\} =$$
$$= -(ss'+s''s''')\{ss'(2s''^2+2s'''^2)+s''s'''(2s^2+2s'^2)\} =$$
$$= -2(ss'+s''s''')\{ss''(ss'''+s's'')+s's'''(ss'''+s's'')\} =$$
$$= -2(ss'+s''s''')(ss''+s's''')(ss'''+s's'') =$$
$$= -2P;$$

de vergelijking (D) komt dus op de volgende neder

$$2P = 4(ss'+s''s''')^2 - (s^2+s'^2-s''^2-s'''^2)^2 - 2P,$$

of $4P = 4(ss'+s''s''')^2 - (s^2+s'^2-s''^2-s'''^2)^2$,

hierin nu voor P weder zijne waarde ſtellende, verkrijgt men voor de gevraagde betrekking tuſſchen de ſinuſſen van de hoeken u, x, y en z,

$$4(ss'+s''s''')(ss''+s's''')(ss'''+s's'') = 4(ss'+s''s''')^2 -$$
$$(s^2+s'^2+s''^2-s'''^2)^2 \quad \ldots\ldots \text{ (E)},$$

men kan echter aan deze vergelijking nog eenen anderen vorm geven, door op te merken, dat het tweede lid het verſchil van twee vierkanten is, en dus kan geſchreven worden als volgt

$$(2ss'+2s''s'''+s^2+s'^2-s''^2-s'''^2)(2ss'+2s''s'''-s^2-s'^2+s''^2+s'''^2) =$$
$$= \{(s+s')^2-(s''-s''')^2\} \cdot \{(s''+s''')^2-(s-s')^2\}$$
$$= (s+s'+s''-s''')(s+s'-s''+s''')(s-s'+s''+s''')(-s+s'+s''+s'''),$$

waardoor de vergelijking (E) gebragt wordt onder den ſymmetrieken vorm

$$4(ss'+s''s''')(ss''+s's''')(ss'''+s's'') =$$
$$= (s+s'+s''+s''')(s+s'-s''+s''')(s-s'+s''+s''')(-s+s'+s''+s''') \text{ (F)}.$$

2°. *Betrekking tusſchen de Coſinusſen.*

In de formule $u+x+y+z = 2R(2m+1)$, ſtellen wij $u = u'-R$, $x = x'-R$, $y = y'-R$, $z = z'-R$ en $m = n-1$, dan gaat dezelve over in

$$u'+x'+y'+z' = 2R(2n+1);$$

hieruit blijkt dat de ſinuſſen der hoeken u', x', y' en z' aan de vergelijkingen (E) en (F) zullen voldoen, maar nu is

Sin.

$$Sin. u' = Sin. (u + R) = Sin. (R - u) = Cos. u = c,$$

en even zoo $Sin. x' = c'$, $Sin. y' = c''$ en $Sin. z' = c'''$; men zal dus, de vergelijkingen (E) en (F) op de sinusfen der hoeken u', x', y' en z' toepasfende, en, in plaats van die sinusfen, de cosinusfen der hoeken u, x, y en z of c, c', c'' en c''' schrijvende, vinden

$$4(cc'+c''c''')(cc''+c'c''')(cc'''+c'c'') = 4(cc'+c''c''')^2 - \ldots$$
$$(c^2+c'^2-c''^2-c'''^2)^2 \quad \ldots\ldots \quad (E'),$$

en $4(cc'+c''c''')(cc''+c'c''')(cc'''+c'c'') = (c+c'+c''-c''')$
$$(c+c'-c''+c''')(c-c'+c''+c''')(-c+c'+c''+c''') \quad . \quad (F'),$$

welke vergelijkingen de gevraagde betrekking, tusfchen de cosinusfen der hoeken u, x, y en z uitdrukken.

Aanmerkingen. 1°. Wanneer men $m = 0$ stelt, heeft men

$$u + x + y + z = 180°,$$

hetwelk de kleinste som van vierhoeken is, waarvoor de vergelijkingen (E), (F), (E') en (F') doorgaan.

2°. Het zou kunnen gebeuren dat een, twee of drie der hoeken u, x, y en z nul of negatief werden; dewijl echter $Sin. 0° = 0$ en $Sin. (-A) = -Sin. A$ is, zou men in dit geval, in de vergelijkingen (E) en (F), de overeenkomstige sinusfen ook gelijk nul of negatief moeten nemen. Had men, bij voorbeeld, $x + y + z = 180°$ of in het algemeen $x + y + z = (2m+1) 180°$, dan is $u = 0$ en $s = 0$, de vergelijking (F) geeft voor dit geval de vergelijking

$$4s'^2s''^2s'''^2 = (s'+s''+s''')(s'+s''-s''')(s'-s''+s''')(-s'+s''+s'''),$$

welke dus de betrekking tusfchen de sinusfen der hoeken van eenen driehoek aanwijst.

3°. Dewijl $Cos. 0° = 1$ en $Cos. (-A) = Cos. A$ is, zoude men in de vergelijkingen (E') en (F') alleen de cosinusfen der hoeken die nul worden, gelijk 1 hebben te stellen, terwijl het negatief worden van sommige hoeken die vergelijkingen onveranderd zou laten. Had men ook hier weder $x + y + z = 180°$ of $(2m+1) 180°$, dan was $u = 0$ en $c = 1$; hierdoor geeft de vergelijking (E') voor dit geval

$$4(c'+c''c''')(c''+c'c''')(c'''+c'c'') = 4(c'+c''c''')^2 -$$
$$(1+c'^2-c''^2-c'''^2)^2,$$

de-

dewelke herleidbaar is tot de bekende formule

$$c'^2 + c''^2 + c'''^2 + 2c'c''c''' = 1. \ (*)$$

II. OPLOSSING *van* A. L. HECTOR.

Laten 2 A, 2 B, 2 C en 2 D de middelpuntshoeken zijn van eenen onregelmatigen vierhoek, beschreven in eenen cirkel, waarvan de straal als eenheid wordt aangenomen, dan is

$$2\,A + 2\,B + 2\,C + 2\,D = 360^\circ,$$

of

$$A + B + C + D = 180^\circ;$$

laten nu a, b, c en d de zijden van dien vierhoek zijn, respectivelijk over de middelpuntshoeken 2 A, 2 B, 2 C en 2 D staande, dan is, omdat de eenheid voor straal is genomen, $\frac{1}{2}a = Sin.\,A$, $\frac{1}{2}b = Sin\,B$, $\frac{1}{2}c = Sin.\,C$ en $\frac{1}{2}d = Sin.\,D$, of, deze sinussen door s, s', s'' en s''' aanduidende, $a = 2s$, $b = 2s'$, $c = 2s''$ en $d = 2s'''$.

Nu heeft, tusschen de vier zijden van eenen vierhoek in den cirkel beschreven en de straal van dezen cirkel, de volgende betrekking plaats

(*ab*

(*) Dewijl men bij deze herleiding zwarigheid zou kunnen ontmoeten, zullen wij aantoonen hoe dezelve kan geschieden; nemen wij daartoe in plaats van c', c'' en c''' gemakshalve de letters p, q en r, dan is de te herleidene vergelijking

$$4(p+qr)(q+pr)(r+pq) = 4(p+qr)^2 - (1+p^2-q^2-r^2)^2,$$

of $$(1+p^2-q^2-r^2)^2 = 4\{(p+qr)^2 - (p+qr)(q+pr)(r+pq)\},$$

het eerste lid onder een' anderen vorm schrijvende en het tweede ontwikkelende, vindt men

$$\{(1-q^2-r^2)+p^2\}^2 = 4\{p^2 + pqr - p^2q^2 - p^2r^2 - pqr(p^2+q^2+r^2) - p^2q^2r^2\},$$

maar $$4(1-q^2-r^2)p^2 = 4\{p^2 \quad - p^2q^2 - p^2r^2 \quad\}$$

hiervan aftrekkende, blijft het eerste lid der komende vergelijking een volkomen vierkant, waarvan $(1-q^2-r^2)-p^2$ de wortel is; dus hebben wij $$\{(1-q^2-r^2)-p^2\}^2 = 4\{pqr - pqr(p^2+q^2+r^2) - p^2q\,r^2\},$$

of $$(1 \ p^2-q^2-r^2)^2 = 4\{1-p^2-q^2-r^2)pqr - p^2q^2r^2\};$$

herleiden wij deze vergelijking op nul, dan wordt het eerste lid weder een volkomen vierkant, namelijk

$$(1 \ p^2-q^2-r^2)^2 - 4(1-p^2-q^2-r^2)pqr + 4p^2q^2r^2 = 0,$$

waarvan de wortel is $$1 \ p^2 - p^2 - r^2 - 2pqr = 0,$$

en wij hebben dus $$p^2+q^2+r^2+2pqr = 1,$$

of $$c'^2 + c''^2 + c'''^2 + 2c'c''c''' = 1.$$

$$\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}=r^2=1;$$

(zie J. DE GELDER, *Beginselen der Meetkunst*, § 377.)

In deze laatste vergelijking voor a, b, c en d hunne waarden substituerende, komt er

$$4(ss'+s''s''')(ss''+s's''')(ss'''+s's'')= \ldots$$
$$=(s+s'+s''-s''')(s+s'-s''+s''')(s-s'+s''+s''')(-s+s'+s''+s''').$$

Voorts wordt uit de algemeene bepalingen, die men van den vierhoek geven kan, (zie ter aangehaalde plaats § 1397 en § 1398) gemakkelijk afgeleid, dat deze gevondene vergelijking doorgaat, voor elk viertal hoeken, waarvan de som gelijk is aan $(2m+1)\times 180°$.

De vergelijking, voor de betrekking tusschen de Cosinussen, wordt even als in de vorige oplossing uit die voor de Sinussen gevonden.

XXXVIII. VOORSTEL.

Door L. F. BEAULIEU.

Welke betrekking bestaat er 1°. tusschen de Sinussen en 2°. tusschen de Cosinussen van vier hoeken, waarvan de eene gelijk is aan de som der drie andere?

OPGELOST *door* L. F. BEAULIEU, A. L. HECTOR, J. SCHOTBORGH, Hz. *en* D HOOLA VAN NOOTEN.

OPLOSSING *van* L. F. BEAULIEU.

Laat z de som der drie hoeken of bogen u, x en y zijn, zoo dat wij hebben

$$u+x+y=z;$$

stellen wij verder $z=(2m+1)180°-z'$,

dan wordt $u+x+y+z'=(2m+1)180°$,

de sinussen van u, x, y en z' zullen dus voldoen aan de vergelijkingen (E) en (F) uit het voorgaande Voorstel, en derzelver cosinussen aan de vergelijkingen (E') en (F'); maar

$$Sin.\,z'=Sin.((2m+1).180°-z)=Sin.(m\times 360°+180°-z)$$
$$=Sin.(180°-z)=Sin.\,z,$$

en

$$Cos.\,z'=Cos.((2m+1).180°-z)=Cos.(m\times 360°+180°-z)$$
$$=Cos.(180°-z)=-Cos.\,z.$$

Wanneer wij alzoo, even als in het voorgaande Voorstel, de sinussen van u, x, y en z door s, s', s'' en s''' en derzelver

co-

cosinussen door c, c', c'' en c''' blijven voorstellen, is het klaar dat voor het geval, dat $u+x+y=z$ is, de vergelijkingen (E) en (F) aldaar gevonden, onveranderd doorgaan, terwijl in de vergelijkingen (E′) en (F′) c''' negatief zal moeten genomen worden. Wij hebben dus

voor de betrekking tusschen de Sinussen,

$$4(ss'+s''s''')(ss''+s's''')(ss'''+s's'')=4(ss'+s''s''')^2-(s^2+s'^2-s''^2-s'''^2)^2,$$

of $=(s+s'+s''-s''')(s+s'-s''+s''')(s-s'+s''+s''')(-s+s'+s''+s''')$;

en *voor de betrekking tusschen de Cosinussen,*

$$4(cc'-c''c''')(cc''-c'c''')(c'c''-cc''')=4(cc'-c''c''')^2-(c^2+c'^2-c''^2-c'''^2),$$

of $=(c+c'+c''+c''')(c+c'-c''-c''')(c-c'+c''-c''')(-c+c'+c''-c''')$.

Gevolgen. 1°. Is de som van de drie hoeken $z=0$ of $=360°$, of in het algemeen $=n\times 360°$, dan heeft men $Sin.\,z=s'''=0$ en $Cos.\,z=c'''=1$; en de betrekking tusschen de sinussen van u, x en y wordt alsdan uitgedrukt door de vergelijking

$$4s^2s'^2s''^2=(s+s'+s'')(s+s'-s'')(s-s'+s'')(-s+s'+s''),$$

terwijl die tusschen de cosinussen alsdan herleid kan worden tot

$$c^2+c'^2+c''^2-2cc'c''=1.\ (*)$$

2°. Is $z=90°$, of $=(4n+1)\times 90°$, dan wordt $s'''=1$ en $c'''=0$; en men vindt in dat geval

$$s^2+s'^2+s''^2+2ss's''=1,\ (*)$$

en $4c^2c'^2c''^2=(c+c'+c'')(c+c'-c'')(c-c'+c'')(-c+c'+c'')$.

3°. Is $z=180°$, of $=(2n+1)\times 180°$, dan is $s'''=0$ en $c'''=-1$; en alsdan worden de vergelijkingen

$$4s^2s'^2s''^2=(s+s'+s'')(s+s'-s'')(s-s'+s'')(-s+s'+s''),$$

en $$c^2+c'^2+c''^2+2cc'c''=1.\ (*)$$

4°. Is eindelijk $z=270°$, of $=(4n+3)\times 90°$, zoo is $s'''=-1$ en $c'''=0$; en dan verkrijgt men

$$s^2+s'^2+s''^2-2ss's''=1,\ (*)$$

en

(*) In de vorige noot is gebleken, hoe men de vergelijkingen, na daarin voor een der Sinussen of Cosinussen ± 1 gesteld te hebben, tot deze vormen herleiden kan.

en $4cc'^2c''^2 = (c+c'+c'')(c+c'-c'')(c-c'+c'')(-c+c'+c'')$.

XXXIX. Voorstel.

Door L. F. Beaulieu.

Men vraagt eenen, om den cirkel beschrevenen, vierhoek te bepalen, als gegeven zijn de afstanden uit het middelpunt des cirkels tot de vier hoekpunten van den vierhoek?

Opgelost *door* L. F. Beaulieu, A. L. Hector, J. Schotborgh, Hz., D. Hoola van Nooten *en* I. Warnsinck.

Oplossing *van* L. F. Beaulieu.

Laten a, b, c en d de gegevene afstanden zijn uit het middelpunt O (*Fig.* 12) tot de hoekpunten A, B, C en D van den vierhoek; en zij r de straal van den cirkel, dan zal men, daar de lijnen OA, OB, OC en OD de hoeken des vierhoeks midden door deelen, klaarblijkelijk hebben

$a\,Sin.\tfrac{1}{2}A = r$, $b\,Sin.\tfrac{1}{2}B = r$, $c\,Sin.\tfrac{1}{2}C = r$ en $d\,Sin.\tfrac{1}{2}D = r$;

en, stellen wij nu $Sin.\tfrac{1}{2}A = s$, $Sin.\tfrac{1}{2}B = s'$, $Sin.\tfrac{1}{2}C = s''$ en $Sin.\tfrac{1}{2}D = s'''$, dan trekt men hieruit terstond

$$s = \frac{r}{a},\quad s' = \frac{r}{b},\quad s'' = \frac{r}{c} \text{ en } s''' = \frac{r}{d} \quad . \; . \; . \; (1);$$

dewijl voorts $\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}D = 180°$ is, heeft hier de vergelijking (F) van het XXXVII Voorstel plaats, dat is

$$4(ss'+s''s''')(ss''+s's''')(ss'''+s's'') =$$
$$=(s+s'+s''-s''')(s+s'-s''+s''')(s-s'+s''+s''')(-s+s'+s''+s''');$$

hierin de waarden (1) substitueerende, alles door r^4 deelende en kortheidshalve stellende

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 2E,$$

dan vindt men gemakkelijk

$$r^2 = 4\,\frac{(E-\frac{1}{a})(E-\frac{1}{b})(E-\frac{1}{c})(E-\frac{1}{d})}{(\frac{1}{ab}+\frac{1}{cd})(\frac{1}{ac}+\frac{1}{bd})(\frac{1}{ad}+\frac{1}{bc})},$$

of eindelijk

$$r = 2\,abcd \times \sqrt{\frac{(aE-1)(bE-1)(cE-1)(dE-1)}{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}};$$

de straal r alzoo bekend zijnde, zullen de vier hoeken uit de ver-

vergelijkingen (1) kunnen berekend worden, waardoor men dan ook gemakkelijk tot de waarde der zijden zal geraken.

XL. VOORSTEL.

Door L. F. BEAULIEU.

Men vraagt eenen vierhoek te bepalen, die om eenen gegevenen cirkel beschreven kan worden, als gegeven zijn de stralen van drie der cirkels, welke drie der zijden buiten den vierhoek aanraken?

OPGELOST *door* L. F. BEAULIEU. D. HOOLA VAN NOOTEN, A. L. HECTOR, I. WARNSINCK *en* J. SCHUTBORGH, Hz.

OPLOSSING *van* L. F. BEAULIEU.

Laat ABCD (*Fig.* 13) de gevraagde vierhoek zijn, waarvan wij de hoeken door A, B, C en D zullen aanduiden, en O, O′, O″ en O‴ de middelpunten der cirkels, waarvan de stralen r, R, R′ en R″ gegeven zijn; dan worden de hoeken A en B, door de lijnen OA en OB, en hunne supplementen, door de lijnen O′A en O′B midden door gedeeld; hieruit volgt, dat de hoeken OAO′ en OBO′ regt zijn, en dat dus de hoek O′AB het complement van de hoek OAB of van $\frac{1}{2}$A, even als ook de hoek O′BA het complement van $\frac{1}{2}$B is.

Laten wij nu uit O en O′ loodlijnen Op en O′q op AB vallen, dan hebben wij klaarblijkelijk

$$\left.\begin{array}{l} Ap = r\,Cot.\tfrac{1}{2}A \\ Bp = r\,Cot.\tfrac{1}{2}B \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

en dus $$AB = r(Cot.\tfrac{1}{2}A + Cot.\tfrac{1}{2}B) \quad \ldots\ldots \quad (2);$$

verder $$\left.\begin{array}{l} Aq = R\,Cot.\,O'Aq = R\,Tang.\tfrac{1}{2}A \\ Bq = R\,Cot.\,O'Bq = R\,Tang.\tfrac{1}{2}B \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3),$$

en dus $$AB = R\,(Tang.\tfrac{1}{2}A + Tang.\tfrac{1}{2}B) \quad \ldots\ldots \quad (4);$$

de vergelijkingen (2) en (4) verbindende, vinden wij

$$\frac{r}{R} = \frac{Tang.\tfrac{1}{2}A + Tang.\tfrac{1}{2}B}{Cot.\tfrac{1}{2}A + Cot.\tfrac{1}{2}B} = Tang.\tfrac{1}{2}A\,Tang.\tfrac{1}{2}B \quad \ldots \quad (5).$$

Op gelijke wijze wordt ook gevonden

$$\frac{r}{R'} = Tang.\tfrac{1}{2}D\,Tang.\tfrac{1}{2}A \quad \ldots\ldots \quad (6),$$

en $$\frac{r}{R''} = Tang.\tfrac{1}{2}C\,Tang.\tfrac{1}{2}D \quad \ldots\ldots \quad (7).$$

Stellen wij nu $Tang.\tfrac{1}{2}A = x$, dan wordt uit (5), (6) en (7) gemakkelijk getrokken

Tang.

$$Tang.\tfrac{1}{2}B = \frac{r}{Rx};\ Tang.\tfrac{1}{2}C = \frac{R'x}{R''}\ \text{en}\ Tang.\tfrac{1}{2}D = \frac{r}{R'x}\ \ (8);$$

maar $\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B = 180° - (\tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}D)$ zijnde, is $Tang.(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B) = -Tang.(\tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}D)$, waaruit door ontwikkeling volgt

$$\frac{Tang.\tfrac{1}{2}A + Tang.\tfrac{1}{2}B}{1 - Tang.\tfrac{1}{2}A\ Tang.\tfrac{1}{2}B} = -\frac{Tang.\tfrac{1}{2}C + Tang.\tfrac{1}{2}D}{1 - Tang.\tfrac{1}{2}C\ Tang.\tfrac{1}{2}D};$$

hierin de waarden der vergelijkingen (8) overbrengende, is

$$\frac{x + \frac{r}{Rx}}{1 - \frac{r}{R}} = -\frac{\frac{R'x}{R''} + \frac{r}{R'x}}{1 - \frac{r}{R''}},$$

waaruit men vindt

$$x^2 = \frac{r}{R'} \cdot \frac{(R+R')R'' - (R'+R'')r}{(R+R')r - (R'+R'')R};$$

de waarde van $x = Tang.\tfrac{1}{2}A$ alzoo in de gegevens uitgedrukt zijnde, zijn de vergelijkingen (8) geschikt om de overige hoeken te berekenen; en wat de zijden aangaat, heeft men reeds hierboven (2) gevonden

$$AB = r\,(Cot.\tfrac{1}{2}A + Cot.\tfrac{1}{2}B) = r \cdot \frac{Sin.\tfrac{1}{2}(A+B)}{Sin.\tfrac{1}{2}A\ Sin.\tfrac{1}{2}B};$$

kunnende BC, CD en DA door dergelijke formulen berekend worden.

Aanmerking. Indien wij den straal van den cirkel, die de vierde zijde BC des vierhoeks uitwendig aanraakt, door R''' voorstellen, dan volgt uit het voorgaande

$$\frac{r}{R'''} = Tang.\tfrac{1}{2}B\ Tang.\tfrac{1}{2}C \ \ \ldots\ldots\ (9);$$

nemen wij nu het product van de vergelijkingen (5) en (7), zoo mede dat van de vergelijkingen (6) en (9), dan worden de achterste leden dier producten aan elkander gelijk; en wij hebben dus

$$\frac{r^2}{RR''} = \frac{r^2}{R'R'''},$$

of

$$RR'' = R'R''';$$

dus is het product van de stralen der twee tegen over elkander staande cirkels, die drie der zijden buiten eenen vierhoek aanraken.

ken, gelijk aan het product van de stralen der twee andere tegen over elkander staande cirkels, die op gelijke wijze drie zijden van den vierhoek raken.

Aanmerking *van* D. Hoola van Nooten. Wanneer wij de vergelijkingen (1) met elkander vermenigvuldigen, komt er

$$A p \times p B = r^2 \, Cot.\, \tfrac{1}{2} A \, Cot.\, \tfrac{1}{2} B,$$

volgens (5) is

$$\frac{r}{R} = Tang.\, \tfrac{1}{2} A \, Tang.\, \tfrac{1}{2} B,$$

en hieruit volgt door vermenigvuldiging

$$A p \times p B \times \frac{r}{R} = r^2,$$

of

$$A p \times p B = r R.$$

Uit de vergelijkingen (3) en (5) kan men op dezelfde wijze afleiden dat ook $A q \times q B = r R$ is; *dus is het product der deelen, waarin de zijden van den vierhoek, door deszelfs raakpunt met een der in- of uitwendige cirkels, verdeeld wordt, gelijk aan het product van de stralen der cirkels, welke die zijde aanraken.*

XLI. Voorstel.

Door J. Bassan.

Men begeert twee vijfhoekige getallen te vinden, zoodanig, dat hun verschil en het verschil hunner wortels geheele vierkante getallen zijn?

Opgelost *door* A. L. Hector, J. Bassan, L. J. Ulman, D. Hoola van Nooten, M. H. Godefroi, C. F. Julius, M. G. Snoer, B. Lubbers, J. Köhler, J. S. Spijer, M. L. Goede *en* J. Schotborgh, Hz.

Oplossing *van* A. L. Hector.

Laten $x+y$ en $x-y$ de wortels der vijfhoekige getallen zijn; dan zijn de gevraagde vijfhoekige getallen zelve

$$\frac{3(x+y)^2-(x+y)}{2} \text{ en } \frac{3(x-y)^2-(x-y)}{2},$$

het verschil der wortels is dus

$$2y;$$

en dat der getallen zelve is

$$6xy-y;$$

om deze beide uitdrukkingen tot volkomen vierkanten te maken, stel-

stellen wij de eerste $2y = p^2$, dan verandert daardoor de tweede in $\frac{6x-1}{2} \times p^2$ en zal dus een vierkant worden, indien $\frac{6x-1}{2}$ een vierkant is.

Stel hiertoe $$\frac{6x-1}{2} = q^2,$$

dan volgt hieruit $$x = \frac{2q^2+1}{6};$$

en uit $2y = p^2$ volgt $$y = \frac{3p^2}{6},$$

zoodat wij voor de wortels hebben

$$x+y = \frac{2q^2+1+3p^2}{6} \text{ en } x-y = \frac{2q^2+1-3p^2}{6}.$$

Om nu alles in geheele getallen te hebben stelle men

$$q = 3m \pm 1 \text{ en } p = 2n+1,$$

dan wordt

$$x+y = 3m^2+2n^2 \pm 2m+n+1$$

en $$x-y = 3m^2-2n^2 \pm 2m-2n;$$

voor $m = 1$ en $n = 0$, vindt men voor de wortels

$$x+y = 6 \text{ of } 2 \text{ en } x-y = 5 \text{ of } 1,$$

en alsdan zijn de vijfhoekige getallen

51 en 35 of 5 en 1.

XLII. VOORSTEL.

Door M. H. GODEFROI. (*)

Zoek twee getallen welker product gelijk zij aan 5888, en de som van derzelver trigonalen 6358?

OPGELOST door M. H. GODEFROI, J. KÖHLER, J. S. SPIJER, A. L. HECTOR, C. F. JULIUS, B. LUBBERS, M. G. SNOER, L. J. ULMAN, D. HOOLA VAN NOOTEN, M. L. GOEDE en J. SCHOTBORGH, Hz.

OPLOSSING van M. H. GODEFROI.

Stel de getallen te zijn $x+y$ en $x-y$, dan zijn derzelver trigonalen

$$\frac{(x+y)^2+x+y}{2} \text{ en } \frac{(x-y)^2+x-y}{2},$$

nu hebben wij volgens het voorstel

$(x+y)$

(*) J. DE GELDER, *Beginselen der Stelkunst*, bl. 238. No. 105.

$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2=5888$$

en $\frac{(x+y)^2+x+y}{2}+\frac{(x-y)^2+x-y}{2}=x^2+y^2+x=6358$,

deze vergelijkingen optellende komt er terstond

$$2x^2+x=12246,$$

of $$x^2+\tfrac{1}{2}x=6123,$$

waaruit men trekt $x=78$ of $=-78\tfrac{1}{2}$;

deze waarden van x substitueerende in $x^2-y^2=5888$, vindt men gemakkelijk

$$y=14 \text{ of } =\tfrac{1}{2}\sqrt{1097};$$

alleen de eerste waarde gebruikende, zijn dus de getallen

$$x+y=92 \text{ en } x-y=64.$$

XLIII. VOORSTEL.

Door M. H. GODEFROI.

Men vraagt drie derde magten, wier som eene tweede magt is, en wier wortels eene rekenkunstige reeks uitmaken?

OPGELOST *door* A. L. HECTOR, M. H. GODEFROI, D. HOOLA VAN NOOTEN, C. F. JULIUS, B. LUBBERS, J. KÖHLER, M. L. GOEDE, M. G. SNOER, L. J. ULMAN *en* J. SCHOTBORGH, Hz.

OPLOSSING *van* A. L. HECTOR.

Wanneer a^3x^3, b^3x^3, c^3x^3, d^3x^3, *enz.* eenige derde magten voorstellen, wier wortels men, door over a, b, c, d, *enz.* naar welgevallen te beschikken, aan allerlei voorwaarden kan laten voldoen, dan behoeft men om de som dier derde magten

$$(a^3+b^3+c^3+d^3+ \textit{enz.})\,x^3$$

tot een volkomen vierkant te maken, slechts te stellen

$$x=p^2(a^3+b^3+c^3+d^3+ \textit{enz.}),$$

neemt men nu daarenboven a, b, c, d, *enz.* in eene rekenkunstige reeks, dan zullen ook de wortels van die derde magten zulk eene reeks vormen.

Dewijl nu in het Voorstel drie zulke derde magten gevraagd worden, nemen wij voor dezelve a^3x^3, b^3x^3, c^3x^3, waarin a, b en c een willekeurige rekenkunstige reeks voorstellen; nemen wij voorts $x=p^2(a^3+b^3+c^3)$, waarin p een getal naar welgevallen beteekent, dan zullen a^3x^3, b^3x^3 en c^3x^3 aan al de voorwaarden der vraag voldoen.

Zij, bij voorbeeld, $a=1$, $b=2$ en $c=3$, dan is $x=36p^2$,

neemt

neemt men voorts $p = \frac{3}{8}$, zoo wordt $x = 1$, en de gevraagde derde magten zijn 1, 8 en 27.

Men ziet ligtelijk, dat voor a, b en c andere rekenkunstige reeksen, en voor p andere waarden nemende, men zoo veel antwoorden op de vraag kan bekomen als men verlangt.

XLIV. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Men vraagt drie tweede magten in geheele getallen te vinden, die in harmonische reden zijn?

OPGELOST *door* J. KÖHLER, A. L. HECTOR, D. HOOLA VAN NOOTEN, L. J. ULMAN, J. S. SPIJER, J. BASSAN, M. H. GODEFROI, C. F. JULIUS, B. LUBBERS, M. G. SNOER, J. SCHOTBORGH, Hz. *en* M. L. GORDE.

OPLOSSING *van* J. KÖHLER.

Laat de gevraagde getallen voorgesteld worden door

$$\frac{z^2}{(x-y)^2},\quad \frac{z^2}{x^2+y^2}\quad \text{en}\quad \frac{z^2}{(x+y)^2},$$

dan zijn dezelve harmonisch evenredig, omdat, de tellers dezelfde blijvende, de noemers in een rekenkunstige reeks opklimmen; opdat het alle vierkanten zijn, behoeft men slechts x^2+y^2 tot een vierkant te maken; en wij nemen als genoegzaam bekend aan, dat men weet, welke waarden men hiertoe aan x en y geven kan; derhalve x^2+y^2 als een vierkant beschouwende, stellen wij, om alles in geheele getallen te verkrijgen, $z^2 = (x-y)^2 (x^2+y^2)(x+y)^2p^2$, dan worden de gevraagde getallen uitgedrukt door

$(x^2+y^2)(x+y)^2p^2$, $(x-y)^2(x+y)^2p^2$ en $(x-y)^2(x^2+y^2)p^2$; nemen wij nu voor x en y, de bekende getallen die x^2+y^2 tot een vierkant maken, bij voorbeeld, $x = 3$, $y = 4$, en verder p naar willekeur, bij voorbeeld, $p = 1$, dan verkrijgen wij voor de gevraagde getallen 1225, 49 en 25.

XLV. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Men verlangt drie verschillende getallen, die onderling in rekenkunstige en meetkunstige rede zijn, en wier producten twee aan twee harmonisch evenredig zijn?

OPGELOST *door* B. LUBBERS *en* M. L. GORDE.

OPLOSSING *van* B. LUBBERS.

Stellen wij dat a, b en c rekenkunstig evenredig zijn, dan hebben wij terstond de vergelijking

$$a+c=2b \quad \ldots\ldots\ldots (1);$$

wanneer nu deze drie getallen ook onderling eene meetkunstige evenredigheid zullen uitmaken, kan men veronderstellen, dat dit plaats heeft, of in dezelfde, of in eene andere orde gerangschikt, als waarin zij rekenkunstig evenredig zijn.

In dezelfde orde gerangschikt zouden a, b en c meetkunstig evenredig moeten zijn, waaruit zou volgen

$$ac=b^2 \quad \ldots\ldots\ldots (2);$$

wanneer men nu het vierkant der vergelijking (1) met het viervoud der vergelijking (2) vermindert, komt er

$$(a-c)^2=0 \quad \text{of} \quad a=c,$$

aan deze vergelijkingen kan dus, alleen door $a=c$ te nemen, te gelijker tijd voldaan worden, en dit strijdt tegen de voorwaarde, dat men drie verschillende getallen moet hebben; er blijft dus slechts over de getallen a, b en c in eene andere orde op elkander volgende als meetkunstig evenredig te onderstellen.

Wij zouden alzoo moeten hebben dat b, a en c, of b, c en a meetkunstig evenredig zijn; deze beide gevallen echter niet wezenlijk onderscheiden zijnde, bepalen wij ons tot het eerste, en dan hebben wij

$$bc=a^2 \quad \ldots\ldots\ldots (3).$$

Uit (3) trekkende $c=\frac{a^2}{b}$, en dit in (1) overbrengende, verkrijgen wij nu

$$a+\frac{a^2}{b}=2b,$$

of

$$a^2+ab=2b^2,$$

waaruit wij vinden $a=b$ of $a=-2b$;

de eerste dezer waarden voor a zou weder strijden tegen de voorwaarde dat er drie verschillende getallen moeten zijn, wij hebben dus alleen $a=-2b$, hierdoor vinden wij verder

$c=\frac{a^2}{b}=4b$; zoodat nu onze rekenkunstig evenredigen worden

$$-2b,\ +b \text{ en } +4b,$$

die

die aldus gerangschikt,

$$+b,\ -2b \text{ en } +4b$$

meetkunstig evenredig zijn; voorts moeten nog de producten twee aan twee harmonisch evenredig zijn, die producten twee aan twee zijn

$$-2b^2,\ -8b^2 \text{ en } +4b^2,$$

en wij moeten dus hebben

$$-2b^2 : +4b^2 = -6b^2 : +12b^2,$$

welke evenredigheid reeds werkelijk bestaat, zoodat de vormen

$$-2b,\ +b \text{ en } +4b,$$

waarin b volstrekt willekeurig is, in alles aan het gevraagde voldoen; nemen wij $b = 1$, zoo vinden wij

-2, $+1$ en $+4$ rekenkunstig,

$+1$, -2 en $+4$ meetkunstig

en -2, -8 en $+4$ harmonisch evenredig.

Aanmerking. Wanneer drie getallen rekenkunstig evenredig zijn, zijn hunne producten twee aan twee altijd harmonisch evenredig, want stellende de rekenkunstig evenredigen voor door

$$m,\ m+n,\ m+2n,$$

zoo zijn de producten twee aan twee

$$m^2+mn,\ m^2+2mn,\ m^2+3mn+2n^2,$$

en nu is werkelijk de eerste dezer uitdrukkingen tot de derde gelijk het verschil der twee eersten tot dat der twee laatsten, namelijk

$$m^2+mn : m^2+3mn+2n^2 = mn : mn+2n^2.$$

XLVI. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Men vraagt eene tweede magt van vier cijfers te vinden, welks omgekeerde ook eene tweede magt is, en alwaar de helft van het verschil dezer tweede magten mede eene tweede magt is, terwijl de wortels dezer tweede magten eene rekenkunstige reeks vormen?

Opgelost *door* B. Lubbers, J. Köhler, D. Hoola van Nooten, A. L. Hector, C. F. Julius, J. Schotborgh, Hz. M. H. Godefroi, L. J. Ulman, J. Bassan, M. G. Snoer *en* M. L. Goede.

Oplossing *van* B. Lubbers.

Stellen wij de wortels der drie tweede magten, waarvan in het voorstel wordt gesproken, door $x+y$, x en $x-y$ voor, dan vormen dezelve reeds eene rekenkunstige reeks; de tweede magten zelve zijn dan

$$x^2+2xy+y^2,\ x^2 \text{ en } x^2-2xy+y^2;$$

nu moet, daar de eerste derzelve de grootste is, volgens het voorstel, een der beide anderen het omgekeerde van de eerste zijn.

Veronderstellen wij dat x^2 het omgekeerde van $x^2+2xy+y^2$ was, dan zou hun halve verschil de tweede magt $x^2-2xy+y^2$ moeten zijn, en wij zouden dus hebben

$$\frac{2xy+y^2}{2}=x^2-2xy+y^2,$$

of $$y^2-6xy=-2x^2,$$

en $$y^2-6xy+9x^2=7x^2,$$

waaruit volgt $$y-3x=\sqrt{7x^2},$$

dewijl nu $7x^2$ nimmer een volkomen vierkant kan zijn, kan ook x^2 het omgekeerde niet wezen van $x^2+2xy+y^2$.

Wij moeten dus $x^2-2xy+y^2$ voor het omgekeerde van $x^2+2xy+y^2$ nemen, dan moet weder hun halve verschil gelijk zijn aan de tweede magt x^2, en wij hebben alzoo

$$\frac{4xy}{2}=x^2,$$

waaruit volgt $$x=2y,$$

hierdoor gaan de gestelde wortels over in

$$3y,\ 2y \text{ en } y,$$

en hunne tweede magten in

$$9y^2,\ 4y^2 \text{ en } y^2;$$

en van deze moet nu y^2 het omgekeerde van $9y^2$ zijn.

Dewijl deze beide laatstgenoemde tweede magten elk van vier cijfers moeten zijn, en de eene negenmaal zoo groot als de andere is, zoo moet de grootste eene 9 en de kleinste eene 1 in de plaats der duizendtallen hebben; verder, omdat de eene tweede magt het omgekeerde van de andere is, moet de grootste eene 1 en de kleinste eene 9 in de plaats der eenheden hebben; stellende dus m en n respectivelijk voor de cijfers der honderd- en tientallen van de grootste tweede magt, dan zal dezelve zijn

$$9000+100m+10n+1,$$

en deszelfs omgekeerde zal zijn

$$1000+100n+10m+9;$$

de grootste dezer beide tweede magten gelijk aan negenmaal de kleinste zijnde, hebben wij alzoo de vergelijking

9000

$$9000+100m+10n+1=9(1000+100n+10m+9),$$

waaruit volgt $m=89n+8$;

omdat nu m en n ieder eene der cijfers van o tot 9 voorstellen, kan men niet anders dan $n=0$ hebben; alsdan is $m=8$, en bij gevolg zijn de gevraagde tweede magt en deszelfs omgekeerde 9801 en 1089, die zoo wel als hun halve verschil 4356 volkomen vierkanten zijn.

XLVII. VOORSTEL.

Door B. G. VAN KELL.

Men vraagt eene rekenkunstige reeks van vier termen, alwaar het product der beide middelsten gelijk 15; *en de som der vierkanten van de beide uitersten gelijk aan tienmaal den derden term is?*

OPGELOST *door* C. F. JULIUS, D. HOOLA VAN NOOTEN, M. G. SNOER, M. H. GODEFROI, B. LUBBERS, J. SCHOTBORGH, Hz. B. G. VAN KELL, L. J. ULMAN *en* A. L. HECTOR.

OPLOSSING *van* C. F. JULIUS.

Laat de reeks voorgesteld worden door

$$x-3y,\ x-y,\ x+y \text{ en } x+3y,$$

dan geeft het voorstel onmiddelijk

$$(x-y)\times(x+y)=15 \text{ of } x^2-y^2=15 \quad . \quad (1),$$

en $(x-3y)^2+(x+3y)^2=10(x+y)$ of $x^2+9y^2=5(x+y)$. (2);

het verschil van deze twee vergelijkingen geeft terstond

$$10y^2=5(x+y)-15,$$

of $2y^2=x+y-3$,

waaruit volgt $x=2y^2-y+3$ . . . . (3);

deze vergelijking in het vierkant gebragt geeft

$$x^2=4y^4-4y^3+13y^2-6y+9,$$

en deze waarde van x^2 in de vergelijking (1) overgebragt, vindt men, na deeling door 2,

$$2y^4-2y^3+6y^2-3y-3=0;$$

de eenige meetbare wortel dezer vierdemagtsvergelijking is $y=1$; derhalve $y=1$ nemende, vindt men door (3) $x=4$, en de reeks is bij gevolg 1, 3, 5 en 7.

XLVIII. VOORSTEL.

Door M. H. GODEFROI.

Eene reken- of meetkunstige reeks van vier termen te vinden, waarvan de som der drie eerste termen, vermenigvuldigd met den

vierden 195; *en de som der drie laatste vermenigvuldigd met den eersten* 27 *geeft?*

Opgelost *door* M. H. Godefroi, D. Hoola van Nooten, M. G. Snoer, L. J. Ulman, B. Lubbers, A. L. Hector, C. F. Julius *en* J. Schotborgh, Hz.

I. Oplossing *van* M. H. Godefroi.

Laat de gevraagde reeks eene rekenkunstige zijn en stellen wij dezelve voor door

$$x-3y,\ x-y,\ x+y \text{ en } x+3y;$$

dan moeten wij volgens het voorstel hebben

$$(3x-3y)\times(x+3y)=195,$$

en $$(3x+3y)\times(x-3y)=27,$$

welke vergelijkingen, na ontwikkeling en deeling door 3, overgaan in

$$x^2+2xy-3y^2=65 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

en $$x^2+2xy-3y^2=9 \quad \ldots\ldots \quad (2);$$

het verschil der beide laatste vergelijkingen geeft terstond

$$4xy=56 \text{ of } xy=14 \quad \ldots\ldots \quad (3),$$

en derzelver som geeft

$$2x^2-6y^2=74 \text{ of } x^2-3y^2=37 \quad \ldots \quad (4);$$

wanneer wij nu de vergelijking (4) in het vierkant brengen en daarbij optellen twaalfmaal het vierkant van (3), komt er

$$x^4+6x^2y^2+9y^4=3721,$$

waaruit de vierkantswortel is

$$x^2+3y^2=61 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5);$$

verder de vergelijkingen (4) en (5) bij elkander optellende en van elkander aftrekkende, vindt men

$$2x^2=98 \text{ en } 6y^2=24,$$

waaruit $$x=7 \text{ en } y=2,$$

weshalve de gevraagde reeks is 1, 5, 9 en 13.

II. Oplossing *van* D. Hoola van Nooten.

Laat de gevraagde reeks eene meetkunstige zijn, en stellen wij dezelve voor door

$$x,\ xy,\ xy^2 \text{ en } xy^3,$$

dan moeten wij, de getallen 195 en 27 gemakshalve door a en b voorstellende, volgens het voorstel hebben

$$(x+xy+xy^2)xy^3=a \text{ en } (xy+xy^2+xy^3)x=b,$$

of

of $(1+y+y^2)x^2y^2=a$ en $(1+y+y^2)x^2y=b$;
deze vergelijkingen in elkander deelende, komt er terstond

$$y^2=\frac{a}{b} \text{ of } y=\sqrt{\frac{a}{b}},$$

en deze waarde van y in de tweede vergelijking overbrengende, hebben wij

$$(1+\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{a}{b})x^2\sqrt{\frac{a}{b}}=b,$$

waaruit volgt

$$x^2=\frac{b}{(1+\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{a}{b})\sqrt{\frac{a}{b}}},$$

of na herleiding

$$x=\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{(ab+(a+b)\sqrt{ab})}};$$

voor a en b nu weder hunne getallenwaarde schrijvende, wordt

$$x=\frac{27}{\sqrt{(195+74\sqrt{65})}} \text{ en } y=\frac{\sqrt{65}}{3},$$

zoodat alsdan de gevraagde reeks is

$$\frac{27}{\sqrt{(195+74\sqrt{65})}}, \frac{9\sqrt{65}}{\sqrt{(195+74\sqrt{65})}}, \frac{195}{\sqrt{(195+74\sqrt{65})}}$$

$$\text{en } \frac{65\sqrt{65}}{\sqrt{(195+74\sqrt{65})}}.$$

XLIX. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Men vraagt de zijden van eenen regthoekigen driehoek te vinden, als gegeven zijn de stralen van de in- en omgeschreven cirkels?

OPGELOST *door* L. J. ULMAN, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, D. HOOLA VAN NOOTEN, C. F. JULIUS, J. S. SPIJER, J. KÖHLER, A. L. HECTOR, B. LUBBERS, M. G. SNOEK *en* J. SCHOTBORGH, Hz.

I. OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

Laat ABC (*Fig.* 14) den gezochten driehoek voorstellen, waarvan de hoek A regt is, en om en in welke de cirkels zijn beschreven, welker stralen gelijk R en r gegeven zijn, dan ligt, omdat hoek A regt is, het middelpunt des omgeschreven cirkels

klaar.

kaarblijkelijk in het midden P, der hypothenuse, en wij hebben terstond

$$BC = 2R;$$

uit het middelpunt O des ingeschreven cirkels, stralen naar de raakpunten D, E en F getrokken hebbende, zijn dezelve loodregt op de zijden des driehoeks, en bij gevolg is ADOF een vierkant, derhalve is

$$AD = AF = r,$$

ook hebben wij uit de eigenschappen des cirkels

$$BD = BE \text{ en } CE = CF;$$

dus is $AB = BD + AD = BE + r,$

en $AC = CF + AF = EC + r,$

waaruit door optelling volgt, omdat $BE + EC = BC = 2R$ is,

$$AB + AC = 2R + 2r,$$

welke vergelijking aantoont, dat *de som der regthoekszijden van eenen regthoekigen driehoek gelijk is aan de som van de middellijnen der in en om dien driehoek beschreven cirkels.*

De laatste vergelijking in het vierkant brengende, hebben wij

$$AB^2 + 2AB \times AC + AC^2 = 4R^2 + 8Rr + 4r^2,$$

door de eigenschap des regthoekigen driehoeks is

$$AB^2 + AC^2 = 4R^2,$$

en dus vinden wij door aftrekking

$$2AB \times AC = 8Rr + 4r^2;$$

de beide laatste vergelijkingen wederom van elkander aftrekkende, komt er

$$AB^2 - 2AB \times AC + AC^2 = 4R^2 - 8Rr - 4r,$$

waaruit volgt

$$AB - AC = 2\sqrt{(R^2 - 2Rr - r^2)};$$

deze vergelijking door optelling en aftrekking verbindende met de reeds gevondene

$$AB + AC = 2R + 2r,$$

hebben wij, na deeling door 2,

$$AB = R + r + \sqrt{(R^2 - 2Rr - r^2)}$$

en $AC = R + r - \sqrt{(R^2 - 2Rr - r^2)},$

waardoor nu ook de regthoekszijden in de gegevens zijn uitgedrukt.

AAN-

AANMERKINGEN. Wij zouden de vergelijking $AB+AC=2R+2r$ ook hebben kunnen afleiden uit *Voorstel* 192, *Deel* IV, waar aangetoond is, dat van eenen regthoekigen driehoek de som der regthoekszijden met de hypothenusa verminderd, juist de middellijn des ingeschreven cirkels is.

Ook zouden wij de regthoekszijden hebben kunnen vinden, door volgens *Voorstel* 66, *Deel* III, of *Voorstel* 172, *Deel* IV, de afstand der middelpunten OP als bekend aan te nemen, aldaar is namelijk gevonden $OP^2=R^2-2Rr$, nu is

$$EP=\sqrt{(OP^2-OE^2)}=\sqrt{(R^2-2Rr-r^2)},$$
$$BE=BP+EP=R+\sqrt{(R^2-2Rr-r^2)},$$
$$CE=CP-EP=R-\sqrt{(R^2-2Rr-r^2)};$$

en dus $AB=BE+r=R+r+\sqrt{(R^2-2Rr-r^2)}$,

en $AC=CE+r=R+r-\sqrt{(R^2-2Rr-r^2)}$.

Wanneer de driehoek, de stralen R en r gegeven zijnde, moest geconstrueerd worden, zoude men eerst EP moeten construeren, hetgeen gemakkelijk geschied, wanneer men de waarde van EP schrijft in den vorm

$$EP=\sqrt{\{(R-r)^2-2r^2\}},$$

na alsdan den omgeschreven cirkel met deszelfs middellijn BC te hebben beschreven, zoude men uit P de gevondene EP moeten uitzetten, uit E eene loodlijn EO gelijk r op BC oprigten; hierdoor het punt O gevonden zijnde, behoeft men slechts den ingeschreven cirkel te beschrijven en uit B en C raaklijnen aan denzelven te trekken, die dan de regthoekszijden des begeerden driehoeks zijn, en elkander in een punt A des omgeschreven cirkels zullen snijden.

II. OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Laten (*Fig.* 14) nog de lijnen BO en OC getrokken worden, dan weet men, dat dezelve de hoeken B en C midden door deelen; stellen wij dan *hoek* $ABC=\phi$, zoo is *hoek* $OBE=\frac{1}{2}\phi$, *hoek* $ACB=90°-\phi$ en *hoek* $OCE=45°-\frac{1}{2}\phi$; nu hebben wij uit de figuur terstond

$$BE=OE\times Cot.\,OBE=r\,Cot.\tfrac{1}{2}\phi,$$

en $$EC=OE\times Cot.\,OCE=r\,Cot.\,(45°-\tfrac{1}{2}\phi);$$

daar nu

BE +

$BE + EC = BC = 2R$ en $Cot. (45° - \frac{1}{2}\phi) = \frac{Cot. \frac{1}{2}\phi + 1}{Cot. \frac{1}{2}\phi - 1}$

is, zoo vinden wij, door optelling der twee voorgaande vergelijkingen,

$$2R = r\left(Cot. \tfrac{1}{2}\phi + \frac{Cot. \frac{1}{2}\phi + 1}{Cot. \frac{1}{2}\phi - 1}\right),$$

hetgeen herleid wordt tot;

$$Cot^2. \tfrac{1}{2}\phi - \frac{2R}{r} Cot. \tfrac{1}{2}\phi + \frac{2R + r}{r} = 0,$$

waaruit volgt

$$Cot. \tfrac{1}{2}\phi = \frac{R}{r} \pm \sqrt{\left\{\frac{R^2}{r^2} - \frac{2R + r}{r}\right\}},$$

of $$Cot. \tfrac{1}{2}\phi = \frac{R \pm \sqrt{(R^2 - 2Rr - r^2)}}{r},$$

waardoor $\frac{1}{2}\phi$ en dus ook ϕ bekend wordt, terwijl als nu de regthoekszijden gemakkelijk gevonden worden, door de vergelijkingen

$$AB = BC \times Cos. ABC = 2R\, Cos. \phi,$$

en $$AC = BC \times Sin. ABC = 2R\, Sin. \phi.$$

L. VOORSTEL.

Door J. MESSCHERT VAN VOLLENHOVEN.

Het getal 62 in twee reeksen, elk van drie termen, te verdeelen, de eerste eene rekenkunstige, en de tweede eene meetkunstige, onder de voorwaarden: 1°. *dat het verschil der rekenkunstige reeks gelijk zij aan het dubbeld der meetkunstige rede;* 2°. *dat de grootste term der rekenkunstige reeks gelijk zij aan den grootsten term der meetkunstige; en* 3°. *dat als men de termen der rekenkunstige reeks deelt door de termen der meetkunstige, dat is, de grootste term van de eene door den grootsten term van de andere, en zoo vervolgens, de quotienten op nieuw eene rekenkunstige reeks uitmaken?*

OPGELOST *door* B. LUBBERS, J. KÖHLER, C. F. JULIUS, J. BASSAN, L. J. ULMAN, A. L. HECTOR, J. S. SPIJER, M. L. GOEDE, D. HOOLA VAN NOOTEN, J. MESSCHERT VAN VOLLENHOVEN, M. H. GODEFROI, M. G. SNOEK *en* J. SCHOTBORGH, Hz.

OPLOSSING *van* B. LUBBERS.

Men stelle de kleinste term der meetkunstige reeks door x,

en

en derzelver gemeene rede door n voor, dan is de meetkunstige reeks zelve

$$x,\ nx \text{ en } n^2x;$$

volgens de tweede voorwaarde van het voorstel, moet nu ook n^2x de grootste term der rekenkunstige reeks zijn, en volgens de eerste voorwaarde, moet derzelver verschil $2n$ zijn, zoodat dan de rekenkunstige reeks is

$$n^2x - 4n;\ n^2x - 2n \text{ en } n^2x;$$

de termen der laatste reeks door de overeenkomstige termen der eerste deelende, zijn de quotienten

$$\frac{n^2x - 4n}{x},\ \frac{nx - 2}{x} \text{ en } 1;$$

deze quotienten nu volgens de derde voorwaarde des voorstels weder eene rekenkunstige reeks moetende uitmaken, moet het dubbeld van den middelsten term gelijk aan de som der beide uitersten zijn, dus is

$$\frac{n^2x - 4n}{x} + 1 = 2.\frac{nx - 2}{x},$$

of $\qquad n^2x - 4n + x = 2nx - 4,$

en $\qquad x(n^2 - 2n + 1) = 4(n - 1),$

waaruit volgt $\qquad x = \frac{4(n-1)}{(n-1)^2} = \frac{4}{n-1};$

deze waarde van x in de gestelde reeksen overbrengende, gaat de meetkunstige over in

$$\frac{4}{n-1},\ \frac{4n}{n-1},\ \frac{4n^2}{n-1};$$

en de rekenkunstige in

$$\frac{4n}{n-1},\ \frac{2n^2 + 2n}{n-1},\ \frac{4n^2}{n-1};$$

de som van beide deze reeksen te zamen 62 moetende zijn, hebben wij

$$\frac{10n^2 + 10n + 4}{n-1} = 62,$$

of na herleiding $\qquad n^2 - \frac{52}{10}n + \frac{66}{10} = 0,$

waaruit men vindt $\qquad n = 3 \text{ of } n = 2\frac{1}{5};$

door deze waarden voor n, gaan de meet- en rekenkunstige reeksen over in

2,

2, 6, 18; en 6, 12, 18;

of $3\frac{1}{3}$, $7\frac{1}{2}$, $16\frac{2}{15}$; en $7\frac{1}{2}$, $11\frac{1}{15}$, $16\frac{2}{15}$.

LI. VOORSTEL.

Door I. WARNSINCK.

Men vraagt in eene gegevene ellips eenen regthoek te beschrijven, zoodat deszelfs inhoud de grootst mogelijke zij?

OPGELOST *door* I. WARNSINCK, L. J. ULMAN, D. HOOLA VAN NOOTEN, A. L. HECTOR *en* J. BASSAN.

OPLOSSING *van* I. WARNSINCK.

Laat *Fig.* 15 de gegevene ellips voorstellen, waarvan wij de halve groote as a en de halve kleine as b noemen; zij voorts ABCD eene in die ellips beschrevene regthoek, dan is het klaar, dat de zijden van dien regthoek evenwijdig loopen aan de assen der ellips, en door die assen worden midden door gedeeld; stellende dan die zijden $AB = 2x$ en $BD = 2y$, dan is $4xy$ de inhoud des regthoeks, welke een maximum moet worden, en wij behoeven dus slechts x en y zoodanig te bepalen, dat xy en dus ook $4xy$ een maximum worde.

De gewone middelpuntsvergelijking der ellips geeft tusschen $OP = x$ en $PD = y$ de volgende betrekking

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)},$$

dus is

$$xy = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)x^2};$$

om nu deze uitdrukking tot een maximum te maken, behoeft slechts $\sqrt{(a^2 - x^2)x^2}$ of $\sqrt{(a^2x^2 - x^4)}$ een maximum te worden; stellen wij daartoe

$$z = \sqrt{(a^2x^2 - x^4)},$$

dan is

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)}},$$

en deze uitdrukking gelijk o stellende, vinden wij

$$x = \tfrac{1}{2}a\sqrt{2};$$

voorts het tweede differentiaal quotient opmakende, vinden wij

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{x(2x^2 - 3a^2)}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}},$$

en hierin voor x de gevondene waarde $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$ substitueerende,

wordt

wordt $\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}$ negatief; zoodat, voor $x = \frac{1}{2} a \sqrt{2}$, zoowel z, als xy en de ingeschreven regthoek maxima worden; deze waarde van x in de middelpunts-vergelijking der ellips overbrengende, vinden wij

$$y = \tfrac{1}{2} b \sqrt{2},$$

zoodat wij voor de zijden van den begeerden regthoek hebben

$$AB = a\sqrt{2} \text{ en } AD = b\sqrt{2},$$

en deszelfs inhoud door $2ab$ wordt uitgedrukt; de zijden van dezen regthoek zullen dus respectivelijk gelijk moeten zijn aan de zijden der vierkanten, beschreven in de cirkels, die de assen der ellips tot middellijnen hebben.

Aanmerking *van* A. L. Hector. De gevonden regthoek, $a\sqrt{2}$ en $b\sqrt{2}$ tot zijden hebbende, is klaarblijkelijk gelijkvormig aan den om de ellips beschrevene regthoek EFGH, die $2a$ en $2b$ tot zijden heeft; hieruit volgt, dat men, om den grootst mogelijken regthoek in eene ellips te beschrijven, slechts om de ellips eenen regthoek EFGH behoeft te beschrijven en daarin de diagonalen EH en FG te trekken, die dan, door hunne snijding met de ellips, de hoekpunten van den begeerden regthoek zullen aanwijzen.

Het verdient nog opmerking, dat de inhoud van den begeerden regthoek *juist gelijk is* aan de helft van den inhoud des omgeschreven regthoeks EFGH.

LII. Voorstel.

Door M. de Leon.

Wanneer de hoeken, onder welke de verlengden der tegenoverstaande zijden van eenen vierhoek, in eenen halven cirkel beschreven, elkander snijden, bekend zijn, benevens de straal des cirkels, zoo vraagt men de zijden te bepalen?

Opgelost *door* A. L. Hector. J. Köhler, M. de Leon, C. F. Julius, L. J. Ulman *en* D. Hoola van Nooten.

Oplossing *van* A. L. Hector.

Laat ABCD (*Fig.* 16) de vierhoek zijn, die in den halven cirkel beschreven is, en welks zijden tot aan hunne onderlinge snijpunten E en F verlengd zijn; stellen wij dat de bekende hoeken E en F respectivelijk α en β graden bevatten, en noemen

wij m, n, p het getal graden in de boogen AC, CD en BD begrepen; dewijl nu een hoek, welks hoekpunt buiten een cirkel ligt, gemeten wordt door het halve verschil der bogen tusschen zijne beenen begrepen, zoo hebben wij vooreerst

$$\beta = \tfrac{1}{2}(180^\circ - n),$$

en dus $$n = 180^\circ - 2\beta;$$

daar voorts $n = 180^\circ - (m + p)$ is, hebben wij ook

$$\beta = \tfrac{1}{2}(m + p),$$

tevens is $$\alpha = \tfrac{1}{2}(m - p),$$

en hieruit volgt door optelling en aftrekking terstond

$$m = \beta + \alpha \text{ en } n = \beta - \alpha;$$

Wijders de straal des cirkels, die almede gegeven is, gelijk r stellende, hebben wij uit de figuur onmiddelijk

$$\text{AC} = r \text{ koorde } m, \quad \text{CD} = r \text{ koorde } n \text{ en } \text{BD} = r \text{ koorde } p,$$

of de koorden in sinussen uitdrukkende

$$\text{AC} = 2r\,Sin.\tfrac{1}{2}m, \quad \text{CD} = 2r\,Sin.\tfrac{1}{2}n \text{ en } \text{BD} = 2r\,Sin.\tfrac{1}{2}p,$$

hierin nu de gevondene waarden voor m, n en p overbrengende, verkrijgen wij eindelijk voor de gevraagde zijden

$$\text{AC} = 2r\,Sin.\tfrac{1}{2}(\beta + \alpha), \quad \text{CD} = 2r\,Cos.\,\beta \text{ en } \text{BD} = 2r\,Sin.\tfrac{1}{2}(\beta - \alpha).$$

LIII. VOORSTEL.

Door L. F. BEAULIEU.

De oppervlakte eener ellips te vinden, in functie der coëfficienten van derzelver algemeene vergelijking, ten opzigte van willekeurige coördinaten assen?

OPGELOST *door* L. F. BEAULIEU *en* D. HOOLA VAN NOOTEN.

OPLOSSING *van* L. F. BEAULIEU.

Laten AX en AY (*Fg.* 17) twee willekeurig aangenomen assen van coördinaten zijn, die elkander onder eenen hoek α snijden, dan is de algemeenste vergelijking der ellips ten aanzien dezer assen altijd van den vorm

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0,$$

waaruit men ligtelijk vindt

$$y = -\frac{b}{2a}x - \frac{d}{2a} \pm$$

$$\frac{1}{2a}\sqrt{\{(b^2 - 4ac)x^2 + 2(bd - 2ae)x + d^2 - 4af\}} \quad . \quad (1),$$

of

of $$x = -\frac{b}{2c}y - \frac{e}{2c} \pm$$
$$\frac{1}{2c}\sqrt{\{(b^2 - 4ac)y^2 + 2(be - 2cd)y + e^2 - 4cf\}} \quad . \quad (2);$$

gelijk bekend is, kan men met behulp van eene dezer vergelijkingen de ellips door punten beschrijven; hiertoe, bij voorbeeld, de vergelijking (1) gebruikende, construeert men eerst de regte lijn MN, die door het eerste gedeelte der vergelijking (1), te weten door

$$y = -\frac{b}{2a}x - \frac{d}{2a},$$

wordt voorgesteld; dan berekent men, voor de abscis $x = AG$ van een willekeurig punt S der lijn MN, de waarde van

$$\frac{1}{2a}\sqrt{\{(b^2 - 4ac)x^2 + 2(bd - 2ae)x + d^2 - 4af\}} = D,$$

die wij slechts kortheidshalve gelijk D stellen, waarna men op de ordinaat GS, ter wederzijde van het punt S, SE = SF = D maakt, zullende E en F alsdan twee punten der ellips zijn. Uit deze wijze van de ellips te construeeren volgt, dat MN eene middellijn derzelve is, en daar voor de punten M en N, waar die middellijn de ellips snijdt, D = o is, zijn de ordinaten PM en QN *raaklijnen* aan dezelve, waaruit al verder volgt, dat de lijn BC, door het midden O van MN, evenwijdig aan die raaklijnen of aan de as der ordinaten getrokken, de toegevoegde middellijn tot MN zijn zal.

De gevraagde oppervlakte door I voorstellende, hebben wij, volgens de bekende formule voor den inhoud eener ellips,

$$I = \pi \times MO \times BO \times Sin. BON \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

en het komt er dus nu alleen op aan, om MO, BO en *Sin.*BON in de coëfficienten der algemeene vergelijking uit te drukken.

Daar de rationale gedeelten der vergelijkingen (1) en (2)

$$y = -\frac{b}{2a}x - \frac{d}{2a} \quad \text{en} \quad x = -\frac{b}{2c}y - \frac{e}{2c} \quad . \quad . \quad (4)$$

vergelijkingen zijn van twee middellijnen der ellips, zoo zullen de coördinaten van derzelver snijpunt niet anders zijn dan de coördinaten AR en RO van het middelpunt O; uit de vergelijkingen (4) x en y oplossende, vinden wij voor die coördinaten

 $x =$

$$x = \mathrm{AR} = \frac{bd - 2ae}{4ac - b^2} \text{ en } y = \mathrm{RO} = \frac{be - 2cd}{4ac - b^2};$$

om nu BO = CO te bepalen, merke men op, dat deze halve middellijnen niet anders zijn dan de waarden van D, wanneer men daarin $x = \mathrm{AR}$ neemt; derhalve vinden wij, door substitutie voor x der gevondene waarde van AR in D, na herleiding

$$\mathrm{BO} = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{(bd - 2ae)^2 + (4ac - b^2)(d^2 - 4af)}{4ac - b^2}} \quad . \quad (5).$$

Om MO = ½ MN te vinden moeten wij van de coördinaten der punten M en N gebruik maken; stellen wij voor dezelve

$$\mathrm{AQ} = x', \ \mathrm{QN} = y', \ \mathrm{AP} = x'' \text{ en } \mathrm{PM} = y'',$$

zoo hebben wij vooreerst

$$\mathrm{MN}^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + 2(x' - x'')(y' - y'')\,Cos.\alpha,$$

maar de punten M en N zich bevindende op de lijn, door de eerste der vergelijkingen (4) voorgesteld, moeten hunne coördinaten aan die vergelijking voldoen, en dus hebben wij ook

$$y' = -\frac{b}{2a}x' - \frac{d}{2a} \text{ en } y'' = -\frac{b}{2a}x'' - \frac{d}{2a},$$

waaruit volgt

$$y' - y'' = -\frac{b}{2a}(x' - x'');$$

en deze waarde voor $y' - y''$ overbrengende, in de bovenstaande uitdrukking voor MN^2, gaat dezelve over in

$$\mathrm{MN}^2 = \frac{4a^2 + b^2 - 4ab\,Cos.\alpha}{4a^2}.(x' - x'')^2 \quad . \quad (6);$$

overigens is, voor de punten M en N, D = o; stellen wij dus

$$\mathrm{D} = \frac{1}{2a}\sqrt{\{(b^2 - 4ac)x^2 + 2(bd - 2ae)x + d^2 - 4af\}} = o,$$

of $$x^2 + \frac{2(bd - 2ae)}{b^2 - 4ac}x + \frac{d^2 - 4af}{b^2 - 4ac} = o,$$

dan moeten de waarden, die x in deze vergelijking heeft, de abscissen AQ en AP, dat is x' en x'' zijn. Door de wet, volgens welke de coëfficienten eener vergelijking van hare wortels afhangen, hebben wij alzoo

$$x' + x'' = \frac{2(bd - 2ae)}{4ac - b^2} \text{ en } x'x'' = -\frac{d^2 - 4af}{4ac - b^2},$$

bren-

brengen wij nu van deze beide vergelijkingen de eerste in het vierkant en trekken er viermaal de tweede af, zoo bekomen wij

$$(x'-x'')^2=\frac{4\{(bd-2ae)^2+(4ac-b^2)(d^2-4af)\}}{(4ac-b^2)^2},$$

de wortel hiervan met de gevondene waarde voor BO vergeleken wordende, geeft zulks

$$x'-x''=\frac{4a}{\sqrt{(4ac-b^2)}}\times \text{BO};$$

en deze waarde van $x'-x''$ in (6) overbrengende, vinden wij eindelijk

$$\text{MN}^2=4\left\{\frac{4a^2+b^2-4ab\,Cos.\,\alpha}{4ac-b^2}\right\}\times \text{BO}^2,$$

zoodat wij hebben

$$\text{MO}=\tfrac{1}{2}\text{MN}=\text{BO}\times\sqrt{\frac{4a^2+b^2-4ab\,Cos.\,\alpha}{4ac-b^2}} \quad . \quad . \quad (7).$$

Om eindelijk $Sin.$ BON te bepalen, stellen wij den hoek BON$=\phi$ en merken op, dat, in de vergelijking van de regte lijn MN

$$y=-\frac{b}{2a}x-\frac{d}{2a},$$

de coëfficient van x niets anders is dan $\frac{Sin.\,(\text{YAX}-\text{YDN})}{Sin.\,\text{YDN}}$,

zoodat wij, daar *hoek* YDN$=$*hoek* BON$=\phi$ is, hebben

$$-\frac{b}{2a}=\frac{Sin.\,(\alpha-\phi)}{Sin.\,\phi},$$

de teller van het achterste lid ontwikkelende, vindt men hieruit ligtelijk

$$Tang.\,\phi=\frac{2a\,Sin.\,\alpha}{2a\,Cos\,\alpha-b},$$

en bij gevolg is

$$Sin.\text{BON}=Sin.\phi=\frac{Tang.\,\phi}{\sqrt{(1+Tang^2.\phi)}}=\frac{2a\,Sin.\,\alpha}{\sqrt{(4a^2+b^2-2abCos.\alpha)}}. \ (8).$$

Substitueeren wij nu de waardijen (5), (7) en (8) in de vergelijking (3), dan blijkt dat, wanneer de vergelijking eener ellips, ten opzigte van twee coördinaten assen, die eenen hoek α insluiten, voorgesteld wordt door

 ay^2+

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0,$$

de oppervlakte der ellips alsdan uitgedrukt wordt, door de formule

$$I=\pi\, Sin.\, \alpha \frac{(bd-2ae)^2+(4ac-b^2)(d^2-4af)}{2a\sqrt{(4ac-b^2)^3}} \quad . \; (9);$$

of, wanneer men den teller ontwikkelt en herleid, door deze

$$I=2\pi\, Sin.\, \alpha . \frac{ae^2+cd^2+fb^2-bde-4acf}{\sqrt{(4ac-b^2)^3}} \quad . \; (10).$$

De tellers van deze beide uitdrukkingen, alsmede $4ac-b^2$, zijn juist de functien der coëfficienten van de algemeene vergelijking der kromme lijnen van den tweeden graad, die positief moeten wezen, opdat dezelve tot eene ellips behoore; dus zullen de formulen (9) en (10) altijd bestaanbare uitkomsten opleveren.

LIV. VOORSTEL.

Door L. F. BEAULIEU.

De vergelijking te vinden van de meetkunstige plaats der middelpunten van al de ellipsen, eene gegeven oppervlakte hebbende, die in eenen driehoek beschreven kunnen worden?

OPGELOST *door* L. F. BEAULIEU *en* D. HOOLA VAN NOOTEN.

I. OPLOSSING *van* L. F. BEAULIEU.

Laat ABC (*Fig.* 18) de gegevene driehoek zijn, nemen wij de zijden AB en AC tot assen der x en y aan, en laat

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+1=0 \quad . \; . \; . \; . \; (1)$$

de vergelijking eener ingeschrevene ellips voorstellen. Dewijl deze ellips AC raakt, heeft dezelve met de as der y slechts één punt gemeen en dus moet, indien wij in de vergelijking (1) $x=0$ stellen, waardoor dezelve overgaat in

$$ay^2+dy+1=0,$$

deze laatste vergelijking twee gelijke wortels hebben. Daar de ellips ook AB of de as der x raakt, moet even zoo, indien wij in (1) $y=0$ nemen, de komende vergelijking

$$cx^2+ex+1=0$$

twee gelijke wortels hebben; hieruit volgt

$$d^2=4a \text{ en } e^2=4c \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Zij voorts $y=mx+n$ de vergelijking van de lijn BC, waarin m en n bekenden zijn; indien wij dan, tusschen deze vergelijking en (1), y elimineren, zal de komende vergelijking

$(am^2+$

$(am^2+bm+c)x^2+(2amn+bn+dm+e)x+(an^2+dn+1)=0$
de waarden van x aanwijzen, voor de punten, die de lijn BC met de ellips gemeen heeft; daar echter de ellips de lijn BC flechts raken moet, moeten ook de wortels der laatfte vergelijking, om flechts eene waarde voor x te geven, aan elkander gelijk zijn, en hieruit volgt

$(2amn+bn+dm+e)^2=4(am^2+bm+c)(an^2+dn+1)$;
dit ontwikkelende en met behulp der vergelijkingen (2) vereenvoudigende, verkrijgt men

$(4ac-b^2)n^2+2(bd-2ae)mn-2(be-2cd)n-2(de-2b)m=0$ (3).

Laat verder α en β de coördinaten van het middelpunt der ellips verbeelden, dan volgt uit het voorgaande voorftel, dat men heeft

$$\alpha(4ac-b^2)=bd-2ae \quad . \; . \; . \; . \; (4),$$
en
$$\beta(4ac-b^2)=be-2cd \quad . \; . \; . \; . \; (5).$$

Stellen wij eindelijk de gegevene ftandvastige oppervlakte der ellips door $R^2\pi$ voor, als wanneer dezelve gelijk is aan den inhoud eens cirkels, R tot ftraal hebbende, dan is volgens het voorgaande vraagftuk (*vergelijking* (9))

$$R^2\pi=\pi\, Sin.\, A\, .\frac{(bd-2ae)^2+(4ac-b^2)(d^2-4af)}{2a\sqrt{(4ac-b^2)^3}},$$

of daar hier wegens de gefteldo vergelijking voor de ellips $f=1$ en $d^2=4a$ gevonden is

$$R^2=Sin.\, A.\frac{(bd-2ae)^2}{2a\sqrt{(4ac-b^2)^3}} \quad . \; . \; . \; . \; (6).$$

Wij hebben dus nu *zes* vergelijkingen (2), (3), (4), (5) en (6) tusfchen de *vijf* coëfficienten der vergelijking (1), de coördinaten α en β van het middelpunt der door die vergelijking (1) voorgeftelde ellips en de ftandvastige gegevens A, m, n en R; alzoo die vijf coëfficienten uit die zes vergelijkingen verdrijvende, zal men tot eene vergelijking tusfchen α, β en ftandvastigen geraken, welke dus de meetkunstige plaats zal uitdrukken, van de middelpunten der ellipfen naar de voorwaarden van het voorftel befchreven.

Om deze verdrijving gemakkelijker te maken, trekke men uit (2) de waarden van a en c en fubftitueere die in (3), (4), (5) en (6), dan zullen elk dezer vergelijkingen, in alle derzelver

termen, den gemeenen factor $de-2b$ verkrijgen; deze factor kan in het onderhavige geval nimmer nul worden, want $de-2b=0$ of $de=2b$ stellende, zouden wij, voor d en e hunne waarden uit (2) substitueerende, ook $4ac=b^2$ of $4ac-b^2=0$ hebben, en dit is alleen het geval, als de vergelijking (1) tot eene parabool behoort; wij kunnen dus dien gemeenen factor weglaten, en daardoor zullen dan de vergelijkingen (3), (4), (5) en (6) overgaan in de volgende:

$$(de+2b)n^2-4dmn+4en-8m=0 \quad . \quad . \quad (3'),$$

$$\alpha(de+2b)=-2d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4'),$$

$$\beta(de+2b)=-2e \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5'),$$

$$R^2=4\,Sin.A.\frac{\sqrt{(de-2b)}}{\sqrt{(de+2b)^3}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6');$$

verder beschouwe men $de+2b$, d en e, als drie onbekenden in de drie vergelijkingen (3'), (4') en (5') en losse dezelve daaruit op, als wanneer men vinden zal

$$de+2b=\frac{8m}{n^2+2mn\alpha-2n\beta},$$

$$d=-\frac{4m\alpha}{n^2+2mn\alpha-2n\beta},$$

en

$$e=-\frac{4m\beta}{n^2+2mn\alpha-2n\beta},$$

hieruit leide men de waarde van $de-2b$ af, door op te merken dat

$$de-2b=2de-(de+2b)$$

is, en men vindt alsdan

$$de-2b=\frac{32m^2\alpha\beta-8m(n^2+2mn\alpha-2n\beta)}{(n^2+2mn\alpha-2n\beta)^2};$$

en als nu substitueere men de gevondene waarden voor $de-2b$ en $de+2b$ in de vergelijking (6'), na die in het vierkant te hebben gebragt, als wanneer men vinden zal

$$R^4=\frac{n\,Sin^2.A}{4m^2}.(4m\alpha\beta+2n\beta-2mn\alpha-n^2)(2m\alpha+n-2\beta)$$

$$\text{of } R^4=\frac{n\,Sin^2.A}{4m^2}.(2m\alpha+n)(2m\alpha+n-2\beta)(2\beta-n) \quad . \quad (7),$$

welke laatste vergelijking de betrekking aanwijst, tusschen de coördinaten van het middelpunt eener willekeurige in den driehoek be-

beschrevene ellips, πR^2 tot inhoud hebbende; en alzoo de vergelijking is van de gevraagde meetkunstige plaats.

Deze laatste vergelijking zal eenvoudiger worden, als men den oorsprong in het midden M van AB plaatst en MY′ evenwijdig aan AC tot as der y aanneemt, de andere as behoudende; want ten opzigte van de assen AX en AY is de vergelijking van BC, $y=mx+n$; hierin $x=0$ stellende, vindt men $y=n$; en voor $y=0$, vindt men $x=-\frac{n}{m}$; weshalve $AB=-\frac{n}{m}$ en $AC=n$ is; stellen wij nu $AB=-\frac{n}{m}=p$, dan is $m=-\frac{n}{p}$, en deze waarde voor m in de vergelijking (7) gesubstitueerd, verandert dezelve in

$$R^4=\tfrac{1}{4}\,Sin^2.A\,(pn-2n\alpha-2p\beta)(p-2\alpha)(2\beta-n)\quad .\ (8);$$

wil men nu dezelfde vergelijking ten opzigte der nieuwe coördinaten assen MX en MY′ uitdrukken, dan zal men, de nieuwe coördinaten x' en y' noemende, klaarblijkelijk in (8) moeten stellen

$$\alpha=\tfrac{1}{2}p+x' \text{ en } \beta=y',$$

waardoor dezelve overgaat in

$$R^4=Sin^2.A\,(nx'+py')(2y'-n)x'\quad .\ .\ (9);$$

de bedoelde middelpunten zijn dus in eene kromme lijn van den derden graad gelegen.

II. Oplossing *van* D. Hoola van Nooten.

Zij ABC (*Fig.* 19) de gegeven driehoek, O het middelpunt, F het eene en F′ het andere brandpunt eener in dien driehoek beschrevene ellips; nemen wij de zijde AB des driehoeks tot as der x en AY, loodregt op AB, tot as der y aan; stellen wij de halve groote as der ingeschrevene ellips gelijk a, de halve kleine as gelijk b, en de coördinaten der punten O, F en F′, $AP=x$, $PO=y$, $AE=m$, $EF=n$, $AE'=m'$, $E'F'=n'$, dan hebben wij vooreerst, door de dubbelde uitmiddelpuntigheid der ellips in de halve assen uit te drukken, $FF'^2=4(a^2-b^2)$; en ten andere, door den afstand der punten F en F′ in de coördinaten dier punten uit te drukken, $FF'^2=(m'-m)^2+(n'-n)^2$, waaruit volgt

$$4(a^2-b^2)=(m'-m)^2+(n'-n)^2\quad .\ .\ .\ (1),$$

 de-

dewijl het product der loodlijnen, uit de brandpunten eener ellips op de raaklijn vallende, gelijk is aan het vierkant der halve kleine as, en de zijden des driehoeks raaklijnen aan de ellips zijn, is

$$EF \times E'F' = b^2 \quad \text{of} \quad nn' = b^2,$$

ten andere hebben wij ook uit de figuur onmiddelijk

$$n + n' = 2y,$$

en uit deze twee laatste vergelijkingen vindt men ligtelijk

$$n = y - \sqrt{(y^2 - b^2)} \quad \text{en} \quad n' = y + \sqrt{(y^2 - b^2)} \quad . \ . \ (2);$$

deze waarden voor n en n' in (1) substitueerende, komt er, na verschikking der termen en herleiding,

$$(m' - m)^2 = 4(a^2 - y^2),$$

of

$$m' - m = 2\sqrt{(a^2 - y^2)},$$

uit de figuur volgt weder terstond

$$m' + m = 2x,$$

en nu geeft de verbinding der beide laatste vergelijkingen

$$m = x - \sqrt{(a^2 - y^2)} \quad \text{en} \quad m' = x + \sqrt{(a^2 - y^2)} \ . \ (3).$$

Stellen wij de tangens van den hoek CAB gelijk t, dan is de vergelijking van de lijn AC

$$y' = tx',$$

de loodlijnen, uit F en F′ op die lijn AC getrokken, zijn alsdan, volgens de bekende formule,

$$FG = \frac{n - tm}{\sqrt{(1 + t^2)}} \quad \text{en} \quad F'G' = \frac{n' - tm'}{\sqrt{(1 + t^2)}};$$

het product dezer loodlijnen wederom gelijk aan het vierkant van de halve kleine as moetende zijn, hebben wij

$$b^2 = \frac{(n - tm)(n' - tm')}{1 + t^2},$$

hierin, voor m, m', n en n', substitueerende de waarden in (2) en (3) gevonden, komt er na herleiding

$$t\{x^2 + y^2 - (a^2 + b^2)\} = 2xy - 2\sqrt{\{y^2(a^2 + b^2) - a^2b^2 - y^4\}} \ . \ (4).$$

Stellen wij de tangens van den hoek CBX $= t'$ en de lijn AB $= p$, dan is de vergelijking van de lijn BC, makende met de as der abscissen een hoek welks tangens t' is, en gaande door het punt B, waarvan de coördinaten p en 0 zijn,

$$y'' = t'x'' - t'p,$$

de loodlijnen, uit F en F′ op die lijn BC getrokken, zijn alsdan

FH =

$$FH = \frac{n - t'm + t'p}{\sqrt{(1 + t'^2)}} \quad \text{en} \quad F'H' = \frac{n' - t'm' + t'p}{\sqrt{(1 + t'^2)}},$$

BC insgelijks eene raaklijn aan de ellips zijnde, hebben wij wederom voor het product dier loodlijnen

$$b^2 = \frac{(n - t'm + t'p)(n' - t'm' + t'p)}{1 + t'^2},$$

hier insgelijks de gevondene waarden (2) en (3), voor m, m', n en n' inbrengende, zal men na herleiding verkrijgen

$$t'\{x^2 + y^2 - (a^2 + b^2) - 2px + p^2\} + 2py = \ldots$$

$$\ldots = 2xy - 2\sqrt{\{y^2(a^2 + b^2) - a^2b^2 - y^4\}} \quad \ldots (5).$$

De tweede leden der vergelijkingen (4) en (5) volkomen aan elkander gelijk zijnde, hebben wij dus ook

$$t\{x^2 + y^2 - (a^2 + b^2)\} = t'\{x^2 + y^2 - (a^2 + b^2) - 2px + p^2\} + 2py,$$

dat is

$$(t - t')\{x^2 + y^2 - (a^2 + b^2)\} = p(pt' - 2t'x + 2y),$$

of
$$x^2 + y^2 - (a^2 + b^2) = \frac{p(pt' - 2t'x + 2y)}{t - t'},$$

waaruit volgt

$$a^2 + b^2 = x^2 + y^2 - \frac{p(pt' - 2t'x + 2y)}{t - t'} \quad . (6).$$

Stellende eindelijk den gegevenen standvastigen inhoud der in den driehoek beschrévene ellips gelijk I, zoo hebben wij nog gelijk bekend is

$$I = ab\pi,$$

waaruit men heeft
$$ab = \frac{I}{\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7),$$

indien men nu de waarden voor $a^2 + b^2$ en voor ab, in (6) en (7) gevonden, in de vergelijking (4) overbrengt, en daarna het wortelteeken door magtsverheffing verdrijft, zal men na herleiding vinden

$$\frac{4^2}{\pi^2} = \frac{pt' - 2t'x + 2y}{t - t'} \cdot \left\{4py(tx - y) - \frac{t^2p^2(pt' - 2t'x + 2y)}{t - t'}\right\} \quad . (8);$$

welke vergelijking, behalve de coördinaten x en y van het middelpunt eener ingeschrevene ellips, geene andere dan de standvastige grootheden p, t, t' en I bevat, en alzoo de vergelijking van de bedoelde meetkunstige plaats is.

AAN-

Aanmerking. *van* J. Badon Ghijben. Om te doen blijken, dat de vergelijkingen, in beide deze oplossingen gevonden, inderdaad dezelfde zijn, zal men vooreerst de regthoekige coördinaten x en y der laatste oplossing, in de scheefhoekige coördinaten α en β der vorige, waarvan de assen eenen hoek A maken, moeten uitdrukken; daar de oorsprong en de as der abscissen dezelfde zijn, en alleen de rigting van de as der ordinaten verschilt, heeft men hiervoor

$$x = \alpha + \beta \, Cos. A \quad \text{en} \quad y = \beta \, Sin. A,$$

in de tweede plaats zal men de standvastige grootheden der laatste oplossing, insgelijks in die der eerste moeten uitdrukken, en hiervoor is

$$p = p,$$

die in beide oplossingen de zijde AB des driehoeks voorstelt;

$$I = R^2 \pi$$

voor den standvastigen inhoud der in den driehoek beschrevene ellipsen;

$$t = Tang. A = \frac{Sin. A}{Cos. A}$$

voor de tangens van den hoek, die de lijn AC met de as der abscissen maakt.

Wat eindelijk t' betreft, merke men op, dat dezelve de tangens van den hoek CBX voorstelt, en dat de zijde AC des driehoeks, in de eerste oplossing, door n is voorgesteld; nu is in driehoek ABC

$$AB : AC = Sin. C : Sin. CBX,$$

of

$$p : n = Sin. (CBX - A) : Sin. CBX,$$

dus

$$\frac{p}{n} = \frac{Sin. (CBX - A)}{Sin. CBX} = \frac{Sin. CBX \, Cos. A - Cos. CBX \, Sin. A}{Sin. CBX}$$
$$= Cos. A - Cot. CBX \, Sin. A,$$

en hieruit trekt men onmiddelijk

$$Cot. CBX = \frac{Cos. A - \frac{p}{n}}{Sin. A} = \frac{n \, Cos. A - p}{n \, Sin. A},$$

dus is

$$t' = Tang. CBX = \frac{n \, Sin. A}{n \, Cos. A - p}.$$

In-

Indien men nu alle deze waarden in de vergelijking (8) der tweede oplossing substitueert, zal men na eenige herleidingen juist de vergelijking (8) der eerste oplossing zien te voorschijn komen.

LV. VOORSTEL.

Door L. F. Beaulieu.

De grootst mogelijke ellips te bepalen, die in eenen driehoek beschreven kan worden?

Opgelost *door* L. F. Beaulieu *en* D. Hoola van Nooten.

Oplossing *van* L. F. Beaulieu.

In *Fig.* 20. stelle ABC den driehoek voor, waarin de grootst mogelijke ellips beschreven moet worden; nemen wij dan, even als in de vorige voorstellen, AB en AC tot assen der x en y aan, en zij

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+1=0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

de vergelijking der gezochte ellips, welker middelpunt α en β tot coördinaten heeft, en waarvan wij den inhoud gelijk πR^2 stellen; dan volgt uit het voorgaande voorstel, dat men (na in (3') voor m zijne waarde $-\frac{n}{p}$ te hebben gesteld) het onderstaande stelsel vergelijkingen zal hebben, waarin p de zijde AB en n de zijde AC des driehoeks is:

$$\left.\begin{array}{c} d^2=4a, \quad e^2=4c, \\ (de+2b)np+4dn+4ep+8=0, \\ \alpha(de+2b)=-2d, \\ \beta(de+2b)=-2e, \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (2),$$

en $$(pn-2n\alpha-2p\beta)(p-2\alpha)(2\beta-n)=\frac{4R^4}{Sin^2. A} \quad . \quad (3),$$

de waarden van α en β, die het eerste lid van de laatste vergelijking tot een maximum zullen maken, zullen ook de grootst mogelijke waarde van R en dus van πR^2 aanwijzen; en bij gevolg de coördinaten van het middelpunt der gezochte ellips leeren kennen; stellende dus

$$z=(pn-2n\alpha-2p\beta)(p-2\alpha)(2\beta-n),$$

en differentiëerende deze uitdrukking, ten opzigte van α en β ieder afzonderlijk, zal men ter bepaling van het maximum hebben

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = -4(2\beta - n)(pn - 2n\alpha - p\beta) = 0,$$

en
$$\frac{\partial z}{\partial \beta} = 4(p - 2\alpha)(pn - n\alpha - 2p\beta) = 0;$$

men kan nu noch $2\beta - n = 0$, noch $p - 2\alpha = 0$ ftellen, want door de vergelijking (3) zou men dan ook $R = 0$ hebben; zoo er dus een maximum beftaat, moet hetzelve gevonden worden, door te ftellen

$$pn - 2n\alpha - p\beta = 0,$$

en
$$pn - n\alpha - 2p\beta = 0,$$

waaruit men α en β oplosfende, vindt $\alpha = \frac{1}{3}p$, $\beta = \frac{1}{3}n$, welke waarden werkelijk tot een maximum behooren, want de tweede differentiaal quotienten opmakende en daarin die waarden voor α en β overbrengende, heeft men

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} = +8n(2\beta - n) = -\frac{8}{3}n^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2} = -8p(p - 2\alpha) = -\frac{8}{3}p^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha\, \partial \beta} = -4(3pn - 4n\alpha - 4p\beta) = -\frac{4}{3}pn;$$

en het blijkt dus, dat men, zoo als voor een maximum vereischt wordt, heeft

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} \times \frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2} > \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha . \partial \beta}\right)^2.$$

Trekken wij nu, naar het midden M van AB, eene lijn CM en nemen wij daarop $MO = \frac{1}{3}MC$, dan blijkt, na door O eene lijn GF evenwijdig aan AB getrokken te hebben, dat O het middelpunt der gezochte grootfte ingefchrevene ellips is; want de coördinaten van het punt O zijn

$$GO = \frac{2}{3}AM = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3}p \quad \text{en} \quad AG = \frac{1}{3}AC = \frac{1}{3}n.$$

Om deze ellips verder geheelenal te bepalen, zoeken wij de waarde der coefficienten van derzelver aangenomene vergelijking (1); men heeft tusfchen dezelve de vijf vergelijkingen (2), waaruit men, na fubftitutie van $\alpha = \frac{1}{3}p$ en $\beta = \frac{1}{3}n$, ligtelijk vinden zal

$$a = \frac{4}{n^2},\ b = \frac{4}{np},\ c = \frac{4}{p^2},\ d = -\frac{4}{n} \ \text{en} \ = -\frac{4}{p};$$

hier-

hierdoor gaat de vergelijking (1) over in

$$p^2y^2+pnxy+n^2x^2-p^2ny-pn^2x+\tfrac{1}{4}p^2n^2=0 \quad . \; (4);$$

de grootst mogelijke ellips in eenen driehoek beschreven, waarvan p en n zijden zijn, heeft dus, ten opzigte dier zijden als coördinaten assen, (4) tot vergelijking.

Stellen wij in deze vergelijking $y=0$, dan is $n^2x^2-pn^2x+\frac{1}{4}p^2n^2=0$, waaruit volgt $x=\frac{1}{2}p=\frac{1}{2}AB=AM$; de ellips raakt dus de zijde AB, in derzelver midden M, en daar CM ook door het middelpunt gaat, is CM eene middellijn, waarvan de toegevoegde gelegen is in de lijn EOF, evenwijdig aan de raaklijn AB loopende, stellen wij in (4) $x=0$, dan komt er $p^2y^2-p^2ny+\frac{1}{4}p^2n^2=0$, waaruit wij hebben $y=\frac{1}{2}n=\frac{1}{2}AC$, dus raakt de ellips ook de zijde AC in derzelver midden N; en zoo men vervolgens, door het punt N, NP evenwijdig aan de raaklijn AB trekt, zal NP door de middellijn CM worden midden door gedeeld, waaruit blijkt, dat de zijde BC, al weder in derzelver midden P, door de ellips zal worden aangeraakt. Tot hetzelfde besluit zou men ook gebragt worden, door de vergelijking $y=mx+n$ of $y=-\frac{n}{p}x+n$ van de zijde BC, met die der ellips (4) te verbinden, waaruit men zoude vinden $y=\frac{1}{2}n$ en $x=\frac{1}{2}p$, welke coördinaten juist het punt P, in het midden van BC, aanwijzen. Wij hebben reeds gezien dat $MD=2MO=\frac{2}{3}MC$ eene middellijn der ellips is; om nu de daaraan toegevoegde middellijn EF te bepalen, behoeft men slechts in (4) $y=AG=\frac{1}{3}n$ te stellen, hetwelk na herleiding geeft

$$x^2-\tfrac{2}{3}px+\tfrac{1}{36}p^2=0;$$

de beide waarden, die x in deze vergelijking heeft, moeten klaarblijkelijk de lijnen GF en GE zijn, en wij hebben dus, door de eigenschap van de coefficienten der vierkants-vergelijkingen,

$$GF+GE=\tfrac{2}{3}p \quad \text{en} \quad GF\times GE=\tfrac{1}{36}p^2;$$

het viervoud van de laatste van deze beide vergelijkingen van het vierkant der eerste aftrekkende, vindt men

$$(GF-GE)^2=\tfrac{1}{3}p^2,$$

of

of eindelijk voor de toegevoegde middellijn

$$EF = GF - GE = \sqrt{\tfrac{1}{3}p^2} = \tfrac{1}{3}p\sqrt{3}.$$

LVI. Voorstel.

Door L. F. Beaulieu.

De boog ϕ *uit de vergelijking* $3\,Cos.\phi\,Sin.\tfrac{1}{2}(\alpha-\phi)Cos\tfrac{1}{2}(\alpha+3\phi) + 4\,Sin.\phi\,Sin.\tfrac{1}{2}(\alpha-\phi)\,Sin\tfrac{1}{2}(\alpha+3\phi) + Cos.\phi\,Sin.\tfrac{1}{2}(\alpha+3\phi)\,Cos.\tfrac{1}{2}(\alpha-\phi) = 0$ *op te losſen?*

Opgelost *door* L. F. Beaulieu.

Oplossing *van* L. F. Beaulieu.

De voorgeſtelde vergelijking kan geſchreven worden onder den vorm

$$\left.\begin{array}{l} 3\,Sin.\tfrac{1}{2}(\alpha-\phi)\{Cos.\phi\,Cos.\tfrac{1}{2}(\alpha+3\phi)+Sin.\phi Sin.\tfrac{1}{2}(\alpha+3\phi)\} \\ +\,Sin.\tfrac{1}{2}(\alpha+3\phi)\{Cos\,\phi\,Cos.\tfrac{1}{2}(\alpha-\phi)+Sin.\phi Sin.\tfrac{1}{2}(\alpha-\phi)\} \end{array}\right\} = 0,$$

maar, volgens de bekende formules, heeft men

$$Cos.\phi\,Cos.\tfrac{1}{2}(\alpha+3\phi)+Sin.\phi\,Sin.\tfrac{1}{2}(\alpha+3\phi) = Cos.(\tfrac{1}{2}(\alpha+3\phi)-\phi)$$
$$= Cos.\tfrac{1}{2}(\alpha+\phi),$$

en $Cos.\phi Cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\phi)+Sin.\phi\,Sin.\tfrac{1}{2}(\alpha-\phi) = Cos.(\tfrac{1}{2}(\alpha-\phi)-\phi)$
$$= Cos.\tfrac{1}{2}(\alpha-3\phi),$$

en dus komt onze vergelijking op de volgende neder

$$3Sin.\tfrac{1}{2}(\alpha-\phi)Cos.\tfrac{1}{2}(\alpha+\phi)+Sin\tfrac{1}{2}(\alpha+3\phi)Cos.\tfrac{1}{2}(\alpha-3\phi) = 0 \quad (A);$$

vervolgens heeft men, naar de algemeene formule,

$$Sin\,p\,Cos.\,q = \tfrac{1}{2}Sin.(p+q)+\tfrac{1}{2}Sin.(p-q),$$
$$Sin.\tfrac{1}{2}(\alpha-\phi)\,Cos.\tfrac{1}{2}(\alpha+\phi) = \tfrac{1}{2}Sin.\alpha - \tfrac{1}{2}Sin.\phi,$$

en $Sin.\tfrac{1}{2}(\alpha+3\phi)\,Cos.\tfrac{1}{2}(\alpha-3\phi) = \tfrac{1}{2}Sin.\alpha + \tfrac{1}{2}Sin.3\phi;$

deze waarden in (A) ſubſtitueerende, vindt men na herleiding

$$4\,Sin.\alpha - 3\,Sin.\phi + Sin.3\phi = 0,$$

maar nu is $Sin.3\phi = 3\,Sin.\phi - 4\,Sin^3.\phi,$

alzoo is ook $4\,Sin.\alpha - 4\,Sin^3.\phi = 0,$

waaruit wij hebben $Sin.\phi = \sqrt[3]{Sin.\alpha}.$

LVII. Voorstel.

Door L. F. Beaulieu.

De boog ϕ *op te losſen uit de vergelijking*

$$\left.\begin{array}{l} Cos.\phi\,Cos.(\beta-\phi)\,Sin.(2\phi+\alpha-\beta) \\ +\,Sin.(\alpha+\phi)\,Sin.(\beta-\phi)\,Sin.(\beta-2\phi) \end{array}\right\} = 0?$$

Opgelost *door* L. F. Beaulieu, L. J. Ulman, J. Bassan *en* D. Hoola van Nooten.

I. Op-

I. OPLOSSING *van* L. F. BEAULIEU.

Naar de bekende formulen

$$\left.\begin{array}{l} Sin.\,p\,Cos.\,q = \tfrac{1}{2}\,Sin.(p+q) + \tfrac{1}{2}\,Sin.(p-q) \\ Sin.\,p\,Sin.\,q = \tfrac{1}{2}\,Cos.(p-q) - \tfrac{1}{2}\,Cos.(p+q) \end{array}\right\} \;.\;.\; (A),$$

heeft men vooreerst

$$Cos.\,\phi\,Sin.(2\phi+\alpha-\beta) = \tfrac{1}{2}\,Sin.(3\phi+\alpha-\beta) + \tfrac{1}{2}\,Sin.(\phi+\alpha-\beta),$$
$$Sin.(\alpha+\phi)\,Sin.(\beta-2\phi) = \tfrac{1}{2}\,Cos\,(3\phi+\alpha-\beta) - \tfrac{1}{2}\,Cos\,(\phi-\alpha-\beta);$$

deze waarden in de voorgestelde vergelijking substitueerende, verandert dezelve, na vermenigvuldiging met 2, in

$$\left.\begin{array}{l} Cos.(\beta-\phi)Sin.(3\phi+\alpha-\beta)+Cos.(\beta-\phi)Sin.(\phi+\alpha-\beta) \\ +Sin.(\beta-\phi)Cos.(3\phi+\alpha-\beta)-Sin.(\beta-\phi)Cos.(\phi-\alpha-\beta) \end{array}\right\} = 0\ (B);$$

maar nu is

$$\left.\begin{array}{l} Cos.(\beta-\phi)\,Sin.(3\phi+\alpha-\beta) \\ +Sin.(\beta-\phi)Cos.(3\phi+\alpha-\beta) \end{array}\right\} = Sin.(3\phi+\alpha-\beta+\beta-\phi) = Sin.(2\phi+\alpha),$$

en verder, volgens de eerste der formulen (A),

$$Cos.(\beta-\phi)\,Sin.(\phi+\alpha-\beta) = \tfrac{1}{2}\,Sin.\,\alpha + \tfrac{1}{2}\,Sin.(2\phi+\alpha-2\beta),$$
$$Sin.(\beta-\phi)\,Cos.(\phi-\alpha-\beta) = -\tfrac{1}{2}Sin.\,\alpha - \tfrac{1}{2}\,Sin.(2\phi-\alpha-2\beta),$$

door substitutie dezer waarden, verandert de vergelijking (B) in

$$Sin.(2\phi+\alpha)+Sin.\,\alpha+\tfrac{1}{2}Sin.(2\phi+\alpha-2\beta)+\tfrac{1}{2}Sin.(2\phi-\alpha-2\beta)=0;$$

nu is nog

$$\tfrac{1}{2}Sin.(2\phi+\alpha-2\beta)+\tfrac{1}{2}\,Sin.(2\phi-\alpha-2\beta)=Sin.(2\phi-2\beta)\,Cos.\,\alpha,$$

waardoor wij verkrijgen

$$Sin.(2\,\phi+\alpha) + Sin.\,\alpha + Sin.(2\,\phi-2\,\beta)\,Cos.\,\alpha = 0;$$

en alsnu $Sin.(2\,\phi+\alpha)$ en $Sin.(2\,\phi-2\,\beta)$ ontwikkelende, vinden wij

$$Sin\,2\phi(1+Cos\,2\beta)Cos\,\alpha+Cos\,2\phi(Sin.\,\alpha-Sin.\,2\beta\,Cos.\,\alpha)+Sin.\,\alpha=0\ (C);$$

door nu uit deze vergelijking de waarde van $Sin.\,2\,\phi$, of van $Cos.\,2\,\phi$ te trekken en dezelve in $Sin^2.\,2\,\phi+Cos^2.\,2\,\phi=1$ te substitueren, zoude men, door de oplossing eener tweede magts-vergelijking, $Cos.\,2\,\phi$, of $Sin.\,2\,\phi$ kunnen bepalen; echter zal op de volgende wijze de uitkomst veel eenvoudiger worden. Men substituere in (C) voor $Sin.\,2\,\phi$ en $Cos.\,2\,\phi$ de waardijen $2\,Sin.\,\phi\,Cos.\,\phi$ en $Cos^2.\,\phi-Sin^2.\,\phi$, dan zal men, in het oog houdende dat $Sin^2.\,\phi+Cos^2.\,\phi=1$ is, de vergelijking (C) onder den volgenden vorm kunnen brengen

$$2Sin.\,\phi\,Cos.\,\phi(1+Cos.\,2\beta)Cos.\,\alpha+(Cos^2.\,\phi-Sin^2.\,\phi)(Sin.\,\alpha-Sin.\,2\beta\,Cos.\,\alpha)$$
$$+(Sin^2.\,\phi+Cos^2.\,\phi)Sin\,\alpha=0,$$

en nu al de termen dezer vergelijking door $Cos^2.\phi\,Cos.\alpha$ deelende, verkrijgt men

$$2\,Tang.\phi\,(1+Cos.2\beta)+(1-Tang^2.\phi)\,(Tang.\alpha-Sin.2\beta)+(1+Tang^2.\phi)\,Tang.\alpha=0,$$

hetwelk ontwikkeld en herleid wordende geeft

$$Tang^2.\phi\,Sin.2\beta+2\,Tang.\phi\,(1+Cos.2\beta)+2\,Tang.\alpha-Sin.2\beta=0,$$

of door $Sin.2\beta$ deelende, met in het oog houding dat

$$\frac{1+Cos.2\beta}{Sin.2\beta}=Cot.\beta \text{ en } Sin.2\beta=2\,Sin.\beta\,Cos.\beta \text{ is,}$$

$$Tang^2.\phi+2\,Cot.\beta\,Tang.\phi=1-\frac{Tang.\alpha}{Sin.\beta\,Cos.\beta},$$

waaruit wij terstond trekken

$$Tang.\phi=-Cot.\beta\pm\sqrt{(Cot^2.\beta+1-\frac{Tang.\alpha}{Sin.\beta\,Cos.\beta})},$$

$$=-Cot.\beta\pm\sqrt{(\frac{1}{Sin^2.\beta}-\frac{-Sin.\alpha}{Sin.\beta\,Cos.\beta\,Cos.\alpha})},$$

$$=-Cot.\beta\pm\sqrt{\frac{Cos.\alpha\,Cos\,\beta-Sin\,\alpha\,Sin.\beta}{Sin^2.\beta\,Cos.\beta\,Cos.\alpha}},$$

of eindelijk

$$Tang.\phi=-Cot\,\beta\pm Cosec.\beta\sqrt{\frac{Cos.(\alpha+\beta)}{Cos.\alpha\,Cos\,\beta}}.$$

II. Oplossing van L. J. Ulman.

Op gelijke wijze als in de vorige oplossing de vergelijking (C) verkregen hebbende, deele men dezelve door $Cos.\alpha$, dan verkrijgt men

$$Sin.2\phi\,(1+Cos.2\beta)+Cos.2\phi\,(Tang.\alpha-Sin\,2\beta)+Tang.\alpha=0,$$

of $Cos.2\phi\,(Sin.2\beta-Tang.\alpha)-Sin.2\phi\,(1+Cos.2\beta)=Tang.\alpha$,

dat is: $Cos.2\phi-Sin.2\phi\,\frac{1+Cos.2\beta}{Sin.2\beta-Tang.\alpha}=\frac{Tang.\alpha}{Sin.2\beta-Tang.\alpha}$;

stellende nu $\frac{1+Cos.2\beta}{Sin.2\beta-Tang.\alpha}=Tang.\delta=\frac{Sin.\delta}{Cos.\delta}$,

en $$\frac{Tang.\alpha}{Sin.2\beta-Tang.\alpha}=p;$$

dan gaat de laatste vergelijking over in

$$Cos.2\phi-Sin.2\phi\,\frac{Sin.\delta}{Cos.\delta}=p,$$

of $$Cos.2\phi\,Cos.\delta-Sin.2\phi\,Sin.\delta=p\,Cos.\delta,$$

dus

dus is
$$Cos.(2\phi+\delta)=p\,Cos.\,\delta,$$
en
$$\phi=-\tfrac{1}{2}\delta+\tfrac{1}{2}\,Boog.\,Cos\,(p\,Cos.\,\delta).$$

LVIII. VOORSTEL.

Door J. VAN WIJK, ROELANDZ.

Het is bekend, dat de zijden eens driehoeks of derzelver verlengsten door vier cirkels kunnen geraakt worden. Is nu de driehoek regthoekig, dan is de straal van den cirkel boven de schuinsche zijde gelijk aan de som der drie andere stralen; en verder, wanneer in dien driehoek de zijden volgens de bekende getallen 3, 4 en 5 bepaald zijn, zullen de stralen in rede staan als 1, 2, 3 en 6. Men vraagt naar het bewijs? (*)

OPGELOST *door* J. VAN WIJK, ROELANDZ., L. J. ULMAN, C. F. JULIUS, D. HOOLA VAN NOOTEN, A. L. HECTOR, J. BASTIAN en J. SCHOTBOROGH, HZ.

OPLOSSING *van* J. VAN WIJK, ROELANDZ.

Laat ABC (*Fig.* 21) een in A regthoekige driehoek zijn, binnen en buiten welke de vier bedoelde cirkels zijn beschreven; laat voorts, uit elk der middelpunten P, Q, R en S van die cirkels, stralen getrokken worden, naar de drie punten, waarin de cirkels de zijden des driehoeks raken, dan ontstaan in de figuur vier vierkanten AP, AQ, AR en AS, die elk eene van de stralen der rakende cirkels tot zijde hebben. Men heeft dus

$$2\,Pp=Ap'+Ap''=AC+Cp'+AB+Bp'',$$
$$2\,Rr=Ar'+Ar''=Cr'-AC+AB-Br'';$$
$$2\,Qq=Aq'+Aq''=AC-Cq'+Bq''-AB,$$
$$2\,Ss=As'+As''=AC-Cs'+AB-Bs'';$$

wanneer wij nu de zijden des driehoeks, over de hoeken A, B en C staande, kortheidshalve door *a*, *b* en *c* voorstellen, en uit de eigenschap des cirkels, dat de beide raaklijnen, aan den cirkel uit een punt buiten denzelven getrokken, even lang zijn, afleiden, dat wij hebben

$$Cp'+Bp''=Cp+Bp=BC=a,$$
$$Cr'-Br''=Cr-Br=BC=a,$$
$$Bq''-Cq'=Bq-Cq=BC=a,$$
$$Cs'+Bs''=Cs+Bs=BC=a;$$

dan

(*) CRELLE, *Journal*, III Band, 2tes Heft, No. 16.

dan gaan onze vier eerste vergelijkingen terstond over in

$$\left.\begin{array}{l} 2\,Pp = a + b + c, \\ 2\,Rr = a - b + c, \\ 2\,Qq = a + b - c, \\ 2\,Ss = -a + b + c; \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (A)$$

daar nu, van deze vier vergelijkingen, het achterste lid der eerste gelijk is aan de som van de achterste leden der drie laatste, zoo moet ook dit zelfde bij de voorste leden plaats hebben, en wij hebben dus, na deeling door 2,

$$Pp = Rr + Qq + Ss,$$

waardoor het eerste gedeelte der vraag is bewezen.

Om nu het tweede gedeelte te betoogen, stellen wij dat $a:b:c = 5:3:4$ is, of $a = 5n$, $b = 3n$ en $c = 4n$, dan vinden wij, door substitutie dezer waarden voor a, b en c in de vergelijkingen (A),

$$Pp = 6n,\ Rr = 3n,\ Qq = 2n \text{ en } Ss = 1n,$$

en het blijkt dus, dat, ingeval de zijden des driehoeks met de getallen 3, 4, 5 evenredig zijn, de stralen der vier rakende cirkels met de getallen 1, 2, 3, 6 evenredig zijn zullen, waardoor ook het tweede gedeelte der vraag bewezen is.

LIX. VOORSTEL.

Door J. VAN WIJK, ROELANDZ.

Twee getallen te vinden, waarvan de som der vierkanten, zoo veel grooter dan de som der getallen is, als tweemaal het vierkant van het eerste getal bedraagt? (*)

OPGELOST *door* J. VAN WIJK, ROELANDZ., L. J. ULMAN, A. L. HECTOR, D. HOOLA VAN NOOTEN, M. H. GODEFROI, C. F. JULIUS, J. KÖHLER, M. L. GORDE, B. LUBBERS, J. SCHOTBORGH, Hz., A. VOLKERSE, J. BASSAN *en* M. G. SNOER.

OPLOSSING *van* J. VAN WIJK, ROELANDZ.

De getallen door x en y voorstellende, heeft men, volgens het voorstel, de vergelijking

$$x^2 + y^2 - (x + y) = 2\,x^2,$$

de eenige voorwaarde bevattende, waaraan voldaan moet worden; men zou dus, voor x of y een van beide, een getal naar willekeur kun-

(*) UFLAKKENS, *Exempelbuch*, *Anhang*, No. 6.

kunnen nemen en daaruit het andere bepalen, dat dan echter wel eens onmeetbaar konde worden; om dus, voor x en y, beide meetbare getallen te vinden, stelle men $x = yz$, dan gaat de eerste vergelijking, na verschikking der termen en deeling door y, over in

$$y - yz^2 = 1 + z,$$

waaruit wij hebben $y = \frac{1+z}{1-z^2} = \frac{1}{1-z}$;

de beide getallen zijn dus in de vormen $\frac{z}{1-z}$ en $\frac{1}{1-z}$ begrepen; en, voor elke willekeurige waarde van z, zullen zij aan de voorwaarde der vraag beantwoorden.

Begeert men echter voor x en y geheele positieve getallen, dan moet $z < 1$ en dus eene eigenlijke breuk zijn. Stel deze breuk, nadat dezelve tot hare kleinste benaming gebragt is, door $z = \frac{m}{m+d}$ voor, dan is $1 - z = \frac{d}{m+d}$, en hierdoor wordt $x = \frac{m}{d}$ en $y = 1 + \frac{m}{d}$.

Om nu x en y tot geheele getallen te maken, moet d een factor van m zijn, indien d een factor van m is, kan de breuk $z = \frac{m}{m+d}$ niet, zoo als wij veronderstelden, tot hare kleinste benaming gebragt zijn, ten zij $d = 1$ is; wij moeten dus $d = 1$ nemen; nemen wij voorts m willekeurig aan, dan zullen wij hebben, voor

$$m = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7, \text{ enz.}$$

$$z = \frac{m}{m+1} = \tfrac{1}{2},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{3}{4},\ \tfrac{4}{5},\ \tfrac{5}{6},\ \tfrac{6}{7},\ \tfrac{7}{8}, \text{ enz.}$$

$$x = \frac{m}{1} = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7, \text{ enz.}$$

$$y = 1 + \frac{m}{1} = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8, \text{ enz.}$$

AANMERKING. Men had ook uit de eerste vergelijking kunnen trekken

$$y^2 - y = x^2 + x,$$

waaruit men terstond vindt

$y =$

$$y = +\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{(x^2 + x + \tfrac{1}{4})} = +\tfrac{1}{2} \pm (x + \tfrac{1}{2}),$$

dat is: $y = -x$ of $y = x + 1$;

deze eerste waarde voor y geeft geene oplossing in positieve getallen, en de laatste waarde voor y toont aan, dat alle getallen aan de vraag voldoen zullen, die de eenheid van elkander verschillen.

LX. VOORSTEL.

Door J. VAN WIJK, ROELANDZ.

Drie personen A, B *en* C *kochten met hunne vrouwen* D, E *en* F *schapen, doch men is vergeten wie de vrouw van elk der mannen was, alleen weet men, dat ieder der zes genoemde personen voor elk schaap zoo vele Engelsche schellingen (waarvan* 21 *eene guinje maken) betaalde als dezelve schapen gekocht had; dat* A 23 *schapen meer kocht dan* E, B 11 *meer dan* D, *en dat elke man drie guinjes meer uitgaf dan zijne vrouw. Men vraagt hieruit te vinden bij welken man iedere vrouw behoorde?*

OPGELOST *door* J. BASSAN, L. J. ULMAN, A. L. HECTOR, J. VAN WIJK, ROELANDZ., D. HOOLA VAN NOOTEN, J. KÖHLER, C. F. JULIUS, M. H. GODEFROI, A. VOLKERSE, B. LUBBERS, J SCHOTBORGH, HZ., M. L. GOEDE, M. G. SNOER *en* J. S. SPEIJER.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Stellen wij de getallen schapen, door elk der mannen gekocht, voor door x, x' en x'', en de getallen schapen door elk hunner respectieve vrouwen gekocht door y, y' en y'', dan zijn de vierkanten daarvan de getallen schellingen door elk betaald; deze moeten nu voor elken man 63 meer dan voor zijne vrouw zijn, en wij hebben dus

$$x^2 - y^2 = 63,\ x'^2 - y'^2 = 63 \text{ en } x''^2 - y''^2 = 63;$$

dewijl nu, volgens het voorstel, al de x en y verschillende geheele positieve getallen verbeelden, en de eerste leden dezer vergelijkingen in twee factoren ontbonden kunnen worden, moeten ook de tweede leden, dat is het getal 63, in die zelfde factoren ontleedbaar zijn; aangezien nu 63 in geene andere factoren ontbonden kan worden dan 63×1, 21×3 en 9×7, hebben wij klaarblijkelijk

$$(x+y)(x-y) = 63 \times 1 \text{ of } x + y = 63 \text{ en } x - y = 1,$$

$(x'+y')$

$(x'+y')(x'-y')=21\times 3$ of $x'+y'=21$ en $x'-y'=3$,
$(x''+y'')(x''-y'')=9\times 7$ of $x''+y''=9$ en $x''-y''=7$;
waaruit wij vinden $x=32$, $y=31$, $x'=12$, $y'=9$, $x''=8$ en $y''=1$, dus behooren bij elkander

een man die 32 en eene vrouw die 31 schapen kocht,
» » » 12 » » » » 9 » » ,
» » » 8 » » » » 1 » » ,

daar nu A 23 schapen meer kocht dan E, en 32 en 9 van de bovenstaande zes getallen de eenige zijn die 23 tot verschil hebben, is het A die 32 en E die 9 schapen kocht; daar B 11 schapen meer kocht dan D, is het, om gelijke reden, B die 12 en D die 1 schapen kocht; het getal van 8 schapen moet dus door de overblijvende man C en het getal van 31 schapen door de overblijvende vrouw F gekocht zijn; en hieruit volgt derhalve, dat bij elkander behooren: A en F, B en E, C en D.

LXI. VOORSTEL.

Door J. MESSCHERT VAN VOLLENHOVEN.

Het getal 138 in drie deelen te verdeelen, die eene harmonische reeks uitmaken; onder voorwaarde, dat het verschil der beide kleinste met het verschil der beide grootste deelen vermenigvuldigd wordende, het product 360 zij?

OPGELOST door L. J. ULMAN, J. MESSCHERT VAN VOLLENHOVEN, J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz., C. F. JULIUS, J. SCHOTBORGH, Hz., A. C. BELINFANTE, J. KÖHLER, J. S. SPEIJER, B. LUBBERS, S. T. BOAS, M. H. GODEFROI, M. G. SNOER, C. VAN SCHAICK, D. HOOLA VAN NOOTEN, H. W. BLOEM, A. DE MOLL VAN OTTERLOO, M. DE LEON en M. L. GOEDE.

OPLOSSING van L. J. ULMAN.

Stellen wij het middelste deel door x, het verschil der twee kleinste deelen door y, en het verschil der beide grootste deelen door z voor, dan zijn de deelen zelve

$$x-y,\quad x \quad\text{en}\quad x+z;$$

volgens de voorwaarden in het voorstel opgegeven, hebben wij terstond de vergelijkingen

$$3x-y+z=138 \text{ of } z-y=138-3x,$$

en

$$yz=360;$$

terwijl wij, uit den aard der harmonische reeksen, hebben

$$x - y : x + z = x - (x - y) : (x + z) - x,$$

of

$$x - y : x + z = y : z;$$

door de producten der uiterste en middelste termen dezer evenredigheid te nemen, verkrijgen wij na herleiding

$$x(z - y) = 2yz,$$

hierin nu de bovenstaande waarden voor $z - y$ en yz overbrengende, komt er

$$x(138 - 3x) = 720,$$

of na herleiding $x^2 - 46x = 240$,

waaruit volgt $x = 40$ of $x = 6$;

deze waarden voor x in de eerste onzer vergelijkingen overbrengende, vindt men

$$z - y = 18 \text{ of } z - y = 120;$$

brengt men nu deze vergelijkingen in het vierkant, telt men vervolgens het viervoud der vergelijking $yz = 360$ daarbij op, en trekt men uit de komende vergelijking den vierkantswortel, dan verkrijgt men

$$z + y = 42 \text{ of } z + y = 12\sqrt{110},$$

en nu de overeenkomstige waarden van $z - y$ en $z + y$ met elkander verbindende, vindt men dadelijk

$z = 30$ en $y = 12$ of $z = 60 + 6\sqrt{110}$ en $y = -60 + 6\sqrt{110}$;

wij hebben dus $x = 40$, $y = 12$ en $z = 30$,

of $x = 6$, $y = -60 + 6\sqrt{110}$ en $z = 60 + 6\sqrt{110}$,

weshalve de gevraagde deelen van het getal 138 zijn:

$$28,\ 40 \text{ en } 70 \text{ of } 66 - 6\sqrt{110},\ 6 \text{ en } 66 + 6\sqrt{110}.$$

LXII. VOORSTEL.

Door B. G. VAN KELL.

Van eene meetkunstige reeks van vijf termen staat de tweede magt des eersten terms tot de derde magt des tweeden terms als 1 *tot* 8; *en het vierkant der reden staat tot dat van den middelsten term als* 1 *tot* 4. *Men vraagt naar deze reeks?*

OPGELOST *door* J. SCHOTBORGH, Hz., D. HOOLA VAN NOOTEN, J. KÖHLER, C. F. JULIUS, H. W. BLOEM, L. J. ULMAN, J. S. SPEIJER, M. L. GOEDE, J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz., A. DE MOL VAN OTTERLOO, M. G. SNOER, B. G. VAN KELL, M. H. GODEFROI, B. LUBBERS, M. DE LEON, A. C. BELINFANTE *en* C. VAN SCHAICK.

Op-

OPLOSSING *van* J. SCHOTBORGH, Hz.

Laat de gevraagde reeks voorgesteld worden door

$$x,\ xy,\ xy^2,\ xy^3 \text{ en } xy^4,$$

dan is volgens de opgave

$$x^2 : x^2y^3 = 1 : 8 \quad \text{en} \quad y^2 : x^2y^4 = 1 : 4,$$

of

$$xy^3 = 8 \quad \text{en} \quad x^2y^2 = 4;$$

trekken wij nu den vierkantswortel uit de tweede dezer vergelijkingen, zoo vinden wij

$$xy = \pm 2,$$

en dit in de eerste deelende, komt er

$$y^2 = \pm 4;$$

wij behouden hier alleen het bovenste teeken, omdat anders y onbestaanbaar zoude worden, en wij hebben derhalve

$$y = \pm 2,$$

deze waarde voor y overbrengende in $xy = \pm 2$, vinden wij verder

$$x = \pm 1,$$

weshalve dan de bedoelde reeks is

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16;\ \text{of} -1,\ 2,\ -4,\ 8,\ -16.$$

LXIII. VOORSTEL.

Door C. VAN SCHAICK.

Men vraagt naar den ouderdom van A, B *en* C, *als gegeven is: dat de tweede magten der jaren van* A *en* B, *min de jaren van* C, 1972 *uitmaken; dat het product der jaren van* B *en* C, *door de jaren van* A *gedeeld wordende, het quotient* 14 *zij; en dat de jaren van* A *tot die van* C *staan als* 10 *tot* 7?

OPGELOST *door* C. VAN SCHAICK, L. J. ULMAN, B. LUBBERS, J. SCHOTBORGH, Hz., S. T. BOAS, H. W. BLOEM, A. DE MOL VAN OTTERLOO, M. H. GODEFROI, J. KÖHLER, D. HOOLA VAN NOOTEN, C. F. JULIUS, A. C. BELINFANTE, M. DE LEON, M. G. SNOER, J. S. SPEIJER, M. L. GORDE *en* J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz.

OPLOSSING *van* C. VAN SCHAICK.

Indien wij de jaren van A, B en C respectivelijk x, y en z noemen, hebben wij uit de voorwaarden van het voorstel

$$x^2 + y^2 - z = 1972 \quad \ldots\ldots \quad (1),$$

$$\frac{yz}{x} = 14 \quad \text{of} \quad yz = 14x \quad \ldots\ldots \quad (2),$$

 en

en $x : z = 10 : 7$ of $z = \frac{7}{10}x$ . . . . (3),
de vergelijking (2) door (3) deelende, vindt men terstond $y = 20$; deze waarde van y, en de waarde van z uit (3), in de eerste vergelijking substituerende, gaat dezelve over in

$$x^2 + 400 - \frac{7}{10}x = 1972,$$

of

$$x^2 - \frac{7}{10}x = 1572,$$

waaruit men vindt

$$x = 40 \text{ of } x = -39\tfrac{3}{10};$$

de negatieve waarde van x hier onbruikbaar zijnde, nemen wij alleen $x = 40$, en vinden alsdan door (3) $z = 28$; derhalve tellen A, B en C respectievelijk 40, 20 en 28 jaren.

LXIV. VOORSTEL.

Door N. J. BARENDS.

Er is gegeven eene oneindige reeks van eigenlijke breuken $\frac{x^m}{y^m}$, $\frac{x^m}{y^{m+1}}$, $\frac{x^m}{y^{m+2}}$, *enz. blijvende de tellers steeds dezelfde, terwijl de noemers in eene meetkunstige reeks opklimmen, waarvan y de reden is. De som dezer* eerste *reeks is de eerste term eener* tweede *oneindige reeks van breuken, die insgelijks alle dezelfde tellers hebben, en wier noemers almede opklimmen in eene meetkunstige reeks, y tot reden hebbende. De som dezer* tweede *reeks is de eerste term eener* derde *oneindige reeks, die op gelijke wijze als de vorige reeksen uit dien eersten term gevormd wordt, en zoo vervolgens. Welke waarden kan men nu aan x en y geven, opdat de som van de m^de reeks, die men op deze wijze verkrijgt, gelijk aan de eenheid zij?*

OPGELOST *door* J. KÖHLER, J. S. SPEIJER, D. HOOLA VAN NOOTEN, L. J. ULMAN, H. W. BLOEM, C. F. JULIUS, J. SCHOTBORGH, Hz., A. C. BELINFANTE, J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz., M. L. GOEDE *en* N. J. BARENDS.

OPLOSSING *van* J. KÖHLER.

Daar al de termen van de gegevene oneindige reeks den factor $\frac{x^m}{y^m}$ gemeen hebben, kan men de som dier reeks schrijven onder de gedaante $\frac{x^m}{y^m}$

$$\frac{x^m}{y^m}\left(1+\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y^3}+enz.\right),$$

maar in deze uitdrukking is de laatste factor niets anders dan de ontwikkeling der breuk $\frac{y}{y-1}$, die wij alzoo in plaats van dien factor kunnen stellen, waardoor wij voor de som der reeks vinden

$$\frac{x^m}{y^m}\times\frac{y}{y-1};$$

naardien dit nu de eerste term der tweede reeks is, die wederom $\frac{1}{y}$ tot gemeene reden heeft, hebben wij voor de som der tweede reeks

$$\frac{x^m}{y^m}\times\frac{y}{y-1}\times\left(1+\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y^3}+enz.\right)$$

of voor den laatsten factor dezer uitdrukking weder $\frac{y}{y-1}$ schrijvende,

$$\frac{x^m}{y^m}\times\left(\frac{y}{y-1}\right)^2;$$

voor de som der derde reeks vinden wij op gelijke wijze

$$\frac{x^m}{y^m}\times\left(\frac{y}{y-1}\right)^3,$$

en het is klaar dat wij, door voortzetting dezer bewerking, voor de som van de m^{de} reeks zullen hebben

$$\frac{x^m}{y^m}\times\left(\frac{y}{y-1}\right)^m \quad \text{of} \quad \frac{x^m}{(y-1)^m};$$

volgens de voorwaarde in het vraagstuk opgegeven, moet deze laatste som gelijk zijn aan de eenheid, wij hebben dus

$$\frac{x^m}{(y-1)^m}=1,$$

waaruit de m^{de} magtswortel is

$$\frac{x}{y-1}=1,$$

en waardoor wij vinden

$$x=y-1.$$

Hieruit blijkt, dat men aan x en y, om aan de voorwaarden der

der vraag te voldoen, alle mogelijke getallenwaarden geven kan, mits men slechts y de eenheid grooter dan x neme.

AANMERKING *van* J. BADON GHIJBEN. Men zoude op het denkbeeld kunnen geraken, dat men, bij het nemen van den m^{de} magtswortel uit de vergelijking $\frac{x^m}{(y-1)^m}=1$, de verschillende m^{de} magtswortels uit de eenheid had behooren te gebruiken, en zulks behoorde ook werkelijk te geschieden, indien men het vraagstuk voor eene bijzondere waarde van m wilde beantwoorden; bij voorbeeld, voor $m=4$ zoude men hebben voor de som der vierde reeks

$$\frac{x^4}{(y-1)^4}=1,$$

waaruit men zoude vinden

$$\frac{x}{y-1}=1,\ \frac{x}{y-1}=-1,\ \frac{x}{y-1}=\sqrt{-1} \text{ en } \frac{x}{y-1}=-\sqrt{-1},$$

of $x=y-1$, $x=1-y$, $x=y\sqrt{-1}-\sqrt{-1}$ en $x=-y\sqrt{-1}+\sqrt{-1}$; wanneer men nu, bij voorbeeld, de derde dezer vergelijkingen gebruikte en $y=3$ nam, zou men vinden $x=2\sqrt{-1}$, en de waarden $x=2\sqrt{-1}$ en $y=3$ voldoen dan ook werkelijk aan de vergelijking $\frac{x^4}{(y-1)^4}=1$, *enz.* Maar indien men het vraagstuk beschouwt als in het algemeen voor alle waarden van m te moeten doorgaan, dan komt geene andere dan de rekenkunstige wortel uit de eenheid in aanmerking; moet namelijk de vergelijking $\frac{x^m}{(y-1)^m}=1$ voor alle waarden van m doorgaan, zoo hebben wij het regt om in dezelve $m=1$ te nemen, en daardoor vinden wij dan alleen $x=y-1$.

LXV. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Men vraagt de waarden van x en y zoodanig te bepalen, dat de uitdrukkingen x^2+5y en y^2+5x volkomen vierkanten worden?

OPGELOST *door* C. F. JULIUS, L. J. ULMAN, J SCHOTBORGH, Hz., H. W. BLOEM, A. DE MOL VAN OTTERLOO, A. C. BELINFANTE, J. KÖHLER, D. HOOLA VAN NOOTEN, J. TEIXEIRA DE

MAT-

Mattos, Bz., M. L. Goede, J. S. Speijer, J. Bassan, B. Lubbers, M. de Leon en M. H. Godefroi.

Oplossing van C. F. Julius.

Stellen wij dat de wortel uit de eerste der gegevene uitdrukkingen $x+n$ zij, dan hebben wij

$$x^2+5y=x^2+2nx+n^2,$$

waaruit volgt

$$x=\frac{5y-n^2}{2n} \quad \ldots\ldots\ldots (1),$$

door deze waarde voor x wordt dus x^2+5y een volkomen vierkant; brengen wij deze zelfde waarde voor x in de tweede uitdrukking y^2+5x over, dan verandert dezelve in

$$y^2+\frac{25y-5n^2}{2n},$$

en wij behoeven dus nog slechts deze laatste uitdrukking tot een volkomen vierkant te maken; stellen wij dat $y+p$ de wortel van dit vierkant zij, dan is

$$y^2+\frac{25y-5n^2}{2n}=y^2+2yp+p^2,$$

waaruit wij vinden

$$y=\frac{2np^2+5n^2}{25-4np} \quad \ldots\ldots\ldots (2);$$

nemen wij nu voor n en p willekeurige getallen, dan zullen de waarden, die de vergelijking (2) voor y geeft en die wij vervolgens door (1) voor x vinden, aan de voorwaarden der vraag voldoen; nemende, bij voorbeeld, $n=2$ en $p=3$, zoo wordt daardoor $y=56$ en $x=69$; en alsdan zijn $x^2+5y=(71)^2$ en $y^2+5x=(59)^2$ volkomen vierkanten.

LXVI. VOORSTEL.

Door J. Bassan.

Van eenen driehoek gegeven zijnde één hoek, de inhoud en de som der zijden, begeert men dien driehoek te bepalen? (*)

Op-

(*) In het I Deel dezer Verzameling, XXXV Voorstel, is van dit zelfde vraagstuk bereids eene andere oplossing, dan de beide alhier geplaatste, gegeven.

OPGELOST *door* D. HOOLA VAN NOOTEN, J. S. SPEIJER, J. BAIBAN, M. H. GODEFROI, C. F. JULIUS, L. J. ULMAN, J. KÖHLER, M. L. GORDE, A. C. BELINFANTE *en* J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz.

I. OPLOSSING *van* D. HOOLA VAN NOOTEN.

Laat de gegeven hoek door a, de inhoud door I, de som der zijden door s worden voorgesteld, stellen wij verder de zijden om den gegevenen hoek gelijk x en y, dan is de zijde over dien hoek $s-x-y$; door de bekende eigenschappen der driehoeken hebben wij nu

$$I = \tfrac{1}{2} x y Sin. a,$$

en
$$(s-x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2 x y Cos. a;$$

uit de eerste dezer vergelijkingen volgt terstond

$$x y = \frac{2 I}{Sin. a}.$$

wanneer wij de tweede vergelijking ontwikkelen en de termen, die elkander vernietigen, weglaten, komt er

$$s^2 - 2 s (x+y) + 2 x y = -2 x y Cos. a,$$

of
$$2 s (x+y) = s^2 + 2 x y (1 + Cos. a),$$

brengen wij hierin voor xy de boven gevondene waarde, dan hebben wij

$$2 s (x+y) = s^2 + \frac{1 + Cos. a}{Sin. a} . 4 I,$$

waaruit volgt

$$x + y = \tfrac{1}{2} s + \frac{1 + Cos. a}{Sin. a} . \frac{2 I}{s};$$

dewijl nu $x+y$ en xy beide bekend geworden zijn, kunnen wij de daarvoor gevondene waarden $x+y=p$ en $xy=q$ stellen, en dan volgt, uit de eigenschappen der tweede magts vergelijkingen, dat de waarden van x en y de wortels zijn der vergelijking

$$X^2 - pX + q = 0,$$

zoodat de zijden om den gegeven hoek uitgedrukt worden door

$$\tfrac{1}{2}p + \sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)} \text{ en } \tfrac{1}{2}p - \sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)};$$

kunnende men vervolgens de overige deelen van den driehoek op de gewone wijze bepalen.

II. OPLOSSING *van* J. S. SPEIJER.

Wij stellen de gegevens door dezelfde letters voor als in de vo-

vorige oplossing, maar nemen voor onbekenden aan de zijde over den gegeven hoek, die wij door z, en het halve verschil der onbekende hoeken, dat wij door ϕ aanduiden. Laat nu, van eenen driehoek ABC, A de bekende hoek zijn, die dus gelijk α is, dan is $B + C = 180° - \alpha$, en daar wij $B - C = 2\phi$ gesteld hebben, volgt hieruit

$$B = 90° + \phi - \tfrac{1}{2}\alpha \text{ en } C = 90° - (\phi + \tfrac{1}{2}\alpha) \quad . \ (1),$$

dus ook $Sin.B = Cos.(\phi - \tfrac{1}{2}\alpha)$ en $Sin.C = Cos.(\phi + \tfrac{1}{2}\alpha)$;
uit de eigenschappen der driehoeken is

$$AB = BC \times \frac{Sin.C}{Sin.A} \quad \text{en} \quad AC = BC\frac{Sin.B}{Sin.A},$$

daar nu BC de zijde over den gegeven hoek is en wij die zijde door z hebben voorgesteld, hebben wij door substitutie der bovenstaande waarden voor $Sin.B$ en $Sin.C$

$$AB = z \times \frac{Cos\ (\phi + \tfrac{1}{2}\alpha)}{Sin.\alpha} \text{ en } AC = z \times \frac{Cos.(\phi - \tfrac{1}{2}\alpha)}{Sin.\alpha} \ . \ (2),$$

derhalve is

$$s = AB + AC + BC = z.\frac{Cos.(\phi + \tfrac{1}{2}\alpha)}{Sin.\alpha} + z\frac{Cos.(\phi - \tfrac{1}{2}\alpha)}{Sin.\alpha} + z =$$

$$= z.\frac{Cos.(\phi + \tfrac{1}{2}\alpha) + Cos.(\phi - \tfrac{1}{2}\alpha) + Sin.\alpha}{Sin.\alpha};$$

omdat $Cos.(\phi + \tfrac{1}{2}\alpha) + Cos.(\phi - \tfrac{1}{2}\alpha) = 2\ Cos.\phi\ Cos.\tfrac{1}{2}\alpha$ en $Sin.\alpha = 2\ Sin.\tfrac{1}{2}\alpha Cos.\tfrac{1}{2}\alpha$ is, kunnen wij de laatste vergelijking tot de volgende gedaante brengen,

$$s = z.\frac{Cos.\phi + Sin.\tfrac{1}{2}\alpha}{Sin.\tfrac{1}{2}\alpha} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (3).$$

Voor den inhoud des driehoeks hebben wij

$$I = \tfrac{1}{2} AB \times AC \times Sin.\alpha,$$

hierin de boven gevondene waarden voor AB en AC overbrengende, verkrijgen wij

$$2I = z^2.\frac{Cos.(\phi + \tfrac{1}{2}\alpha).Cos.(\phi - \tfrac{1}{2}\alpha)}{Sin.\alpha},$$

of, omdat $Cos.(\phi + \tfrac{1}{2}\alpha) Cos.(\phi - \tfrac{1}{2}\alpha) = Cos^2.\phi - Sin^2.\tfrac{1}{2}\alpha$ en $Sin.\alpha = 2\ Sin.\tfrac{1}{2}\alpha\ Cos.\tfrac{1}{2}\alpha$ is,

$$4I = z^2.\frac{Cos^2.\phi - Sin^2.\tfrac{1}{2}\alpha}{Sin.\tfrac{1}{2}\alpha\ Cos.\tfrac{1}{2}\alpha} \quad . \ . \ . \ . \ (4);$$

en wij hebben dus nu in de vergelijkingen (3) en (4) twee verge-

gelijkingen met de twee onbekenden z en ϕ; om dezelve daaruit op te losſen, ſchrijven wij de vergelijking (4) in den vorm

$$4\,\mathrm{I} = z^2 . \frac{(Cos.\,\phi + Sin.\,\tfrac{1}{2}\alpha)(Cos.\,\phi - Sin.\,\tfrac{1}{2}\alpha)}{Sin.\,\tfrac{1}{2}\alpha\,Cos.\,\tfrac{1}{2}\alpha},$$

en deelen dezelve daarna door het vierkant der vergelijking (3), als wanneer wij vinden

$$\frac{4\,\mathrm{I}}{s^2} = \frac{Cos.\,\phi - Sin.\,\tfrac{1}{2}\alpha}{Cos.\,\phi + Sin.\,\tfrac{1}{2}\alpha}\,Tang.\,\tfrac{1}{2}\alpha,$$

waaruit wij onmiddelijk trekken kunnen

$$Cos.\,\phi = Sin.\,\tfrac{1}{2}\alpha . \frac{s^2\,Tang.\,\tfrac{1}{2}\alpha + 4\,\mathrm{I}}{s^2\,Tang.\,\tfrac{1}{2}\alpha - 4\,\mathrm{I}} \quad \ldots \quad (5);$$

om z te bepalen kunnen wij nu, daar ϕ bekend geworden is, uit (3) trekken

$$z = \frac{s\,Sin.\,\tfrac{1}{2}\alpha}{Cos.\,\phi + Sin.\,\tfrac{1}{2}\alpha},$$

doch wij kunnen ook z onmiddelijk in de gegevens uitdrukken; deelen wij daartoe de vergelijking (3) in (4), dan komt er

$$\frac{4\,\mathrm{I}}{s} = z . \frac{Cos.\,\phi - Sin.\,\tfrac{1}{2}\alpha}{Cos.\,\tfrac{1}{2}\alpha},$$

of hieruit $Cos.\,\phi$ afzonderende

$$Cos.\,\phi = \frac{4\,\mathrm{I}\,Cos.\,\tfrac{1}{2}\alpha}{s\,z} + Sin.\,\tfrac{1}{2}\alpha;$$

ook uit de vergelijking (3) $Cos.\,\phi$ afzonderende, vinden wij

$$Cos.\,\phi = \frac{s\,Sin.\,\tfrac{1}{2}\alpha}{z} - Sin.\,\tfrac{1}{2}\alpha;$$

deze twee uitdrukkingen voor $Cos.\,\phi$ aan elkander gelijk ſtellende en alles door $Cos.\,\tfrac{1}{2}\alpha$ deelende, zullen wij gemakkelijk daaruit vinden

$$z = \frac{s^2\,Tang.\,\tfrac{1}{2}\alpha - 4\,\mathrm{I}}{2\,s\,Tang.\,\tfrac{1}{2}\alpha} = \tfrac{1}{2}s - \frac{2\,\mathrm{I}}{s}\,Cot.\,\tfrac{1}{2}\alpha \text{ (*)} \quad . \quad (6);$$

de beide overige zijden des driehoeks zijn nu ook door de vergelijkingen (2) bepaald, terwijl de daarover ſtaande hoeken door (1) gevonden worden, weshalve alzoo de geheele driehoek bepaald is.

LXVII.

(*) Deze waarde voor z is volmaakt dezelfde, die in het XXXV Voorſtel I Deel uit geheel andere gronden is afgeleid.

LXVII. VOORSTEL.

Door M. H. GODEFROI.

Zoek een getal van twee cijfers, het cijfer der tientallen grooter zijnde dan dat der eenheden; zoodanig dat het getal met deszelfs omgekeerde vermenigvuldigd zijnde, het product gelijk zij aan 5605; en dat de som der cijfers van dit getal met de som van derzelver vierkanten te zamen genomen gelijk zij aan 120?

OPGELOST *door* M. H. GODEFROI, M. G. SNOER, J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz., A. C. BELINFANTE, L. J. ULMAN, D. HOOLA VAN NOOTEN, J. KÖHLER, B. LUBBERS, J. SCHOTBORGH, Hz., C. F. JULIUS, M. L. GOEDE, H. W. BLOEM, M. DE LEON *en* A. DE MOL VAN OTTERLOO.

I. OPLOSSING *van* M. H. GODEFROI.

Stel voor de cijfers der tientallen en eenheden $x+y$ en $x-y$, dan is, wanneer wij x en y alleen positieve waarden toekennen, voldaan aan de voorwaarde, dat het cijfer der tientallen grooter dan dat der eenheden moet zijn; het gevraagde getal is alsnu

$$10(x+y)+(x-y) \text{ of } 11x+9y,$$

en deszelfs omgekeerde

$$10(x-y)+(x+y) \text{ of } 11x-9y;$$

de tweede voorwaarde van het voorstel geeft dus

$$(11x+9y)(11x-9y)=5605,$$

of

$$121x^2-81y^2=5605 \quad \ldots\ldots \quad (1),$$

de laatste voorwaarde geeft

$$(x+y)+(x-y)+(x+y)^2+(x-y)^2=120,$$

of

$$x^2+x+y^2=60,$$

waaruit volgt

$$y^2=60-x^2-x \quad \ldots\ldots \quad (2);$$

brengen wij deze waarde van y^2 in de vergelijking (1) over, dan komt er, na verschikking en vereeniging der termen,

$$202x^2+81x=10465,$$

of

$$x^2+\frac{81}{202}x=\frac{10465}{202},$$

waaruit men vindt

$$x=7$$

(*) J. DE GELDER, *Beginselen der Stelkunst*, bl. 259. No. 108.

$$x = 7 \text{ of } x = -7\frac{81}{202};$$

daar blijkbaar alleen de eerste waarde voor x hier in aanmerking komen kan, brengen wij dezelve in (2) over, waardoor wij vinden

$$y^2 = 4,$$

of

$$y = \pm 2;$$

daar echter, zoo als wij aanvankelijk reeds opmerkten, y positief moet zijn, om aan de eerste voorwaarde des Voorstels te voldoen, kunnen wij alleen de waarde $y = 2$ gebruiken, en dus hebben wij

$$x + y = 9 \text{ en } x - y = 5;$$

zoodat het begeerde getal 95 is.

II. Oplossing *van* M. G. Snoer.

Dewijl het product van het getal met deszelfs omgekeerde 5605 zijn moet, en dus het cijfer 5 in de plaats der eenheden moet hebben, moet noodwendig ook het getal zelf of het omgekeerde daarvan het cijfer 5 in de plaats der eenheden hebben, en derhalve is 5 een der cijfers van het begeerde getal; volgens de laatste bepaling van het Voorstel, moet de som van de vierkanten der cijfers met de som der cijfers, of, met andere woorden, de som der proniken van de beide cijfers gelijk 120 zijn; het eene cijfer nu 5 zijnde is deszelfs pronik 30, er blijft dus 90 voor de pronik van het andere cijfer over, dat diensvolgens geen ander dan 9 zijn kan; en daar nu de eerste voorwaarde van het Voorstel eischt, dat het cijfer der tientallen het grootste van beiden zij, is het getal klaarblijkelijk 95.

LXVIII. Voorstel.

Door M. H. Godefroi.

Men verlangt een kubiekgetal te vinden, zoodanig, dat als men de eenheid er van aftrekt, de rest een getal van drie gelijke cijfers zij, die elk één minder zijn dan den wortel van het gevraagde kubiekgetal?

Opgelost *door* B. Lubbers, M. G. Snoer, S. T. Boas, M. H. Godefroi, M. L. Goede, D. Hoola van Nooten, C. F. Julius, J. Köhler, J. S. Speijer, J. Teixeira de Mattos, Bz.,

L.

L. J. ULMAN, A. VOLKERSE, A. C. BELINFANTE, M. DE LEON, J. SCHOTBORGH, Hz., H. W. BLOEM en A. DE MOL VAN OTTERLOO.

OPLOSSING van B. LUBBERS.

Laat x^3 het gevraagde kubiekgetal zijn, dan is deszelfs wortel x, en de drie gelijke cijfers, waaruit de rest bestaat, waarvan in het Voorstel gesproken wordt, zijn dan ieder $x-1$, wij kunnen dus die rest op tweederlei wijze uitdrukken, vooreerst door

$$x^3-1,$$

en ten andere door

$$100(x-1)+10(x-1)+x-1;$$

wij hebben dus, na herleiding dezer tweede uitdrukking, de vergelijking

$$x^3-1=111x-111,$$

of

$$x^3-111x+110=0;$$

een der wortels dezer vergelijking is in het oog loopend $x=1$, hierdoor vindt men op de gewone wijze voor de beide anderen $x=10$ en $x=-11$; strikt genomen moest elk dezer waarden van x aan het Voorstel voldoen, en doet dit ook in zekeren zin werkelijk, maar het eenige natuurlijke antwoord vinden wij door de waarde $x=10$, zoodat wij $x^3=1000$ voor het gevraagde kubiekgetal hebben.

LXIX. VOORSTEL.

Door F. VAN HEUKELOM, JR.

Een koopman koopt twee soorten van tabak in alles 1160 *pond, namelijk van de eerste soort twintig maal zoo veel ponden als het pond van die soort stuivers kost, en van de tweede soort tienmaal zoo veel ponden als het pond van die soort stuivers kost; nu verkoopt hij die beide soorten door elkander, tegen een vijfde zoo veel stuivers het pond, als hij van de eerste soort meer ponden dan van de tweede soort gekocht heeft, en wint dus doende* 984 *guldens op de geheele partij. Men vraagt hoe veel ponden hij van elke soort, en tot welke prijzen hij dezelve heeft ingekocht?*

OPGELOST *door* D. HOOLA VAN NOOTEN, F. VAN HEUKELOM, JR., J. KÖHLER, S. F. BOAS, M. H. GODEFROI, M. L. GOEDE, C. F. JULIUS, B. LUBBERS, J. SCHOTBORGH, Hz., L. J. ULMAN, H. W. BLOEM, M. DE LEON, A. DE MOL VAN OTTERLOO, M. G.

 SNOER,

SNOER, A. C. BELINFANTE, J. S. SPEIJER, J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz. *en* C. VAN SCHAICK.

OPLOSSING *van* D. HOOLA VAN NOOTEN.

Daar het aantal ingekochte ponden van de eene soort, de helft van het getal 1160 even veel moet overtreffen, als het aantal ponden, van de andere soort ingekocht, beneden die helft blijft, kunnen wij dat verschil als onbekende aannemen; doch omdat men de aantallen ingekochte ponden respectivelijk door 20 en 10 moet deelen, om de getallen stuivers te verkrijgen, die het pond van elke soort kost, nemen wij, ter vermijding van gebrokens, die onbekende zoodanig aan, dat dezelve door 20 deelbaar zij. Stellen wij dan dat:

de koopman koopt van de 1ste soort $580+20x$ ponden,
dan koopt hij van de 2de soort $580-20x$ „ ,
dan kost het pond van de 1ste soort $29+x$ stuivers,
en het pond van de 2de soort $2(29-x)$ „ .

De geheele inkoop beloopt derhalve in stuivers

$$(580+20x)(29+x)+2(580-20x)(29-x),$$

of na ontwikkeling en herleiding

$$20(3x^2-58x+2523);$$

het verschil der getallen ponden, die hij van elke soort inkoopt is $40x$, hij verkoopt dus elk pond tegen een vijfde van $40x$, dat is, tegen $8x$ stuivers; de geheele verkoopprijs in stuivers is alzoo

$$1160\times 8x,$$

of

$$20\times 464x;$$

van deze verkoopprijs de geheele inkoop aftrekkende, moet men de winst, al mede in stuivers, overhouden, en wij hebben dus de vergelijking

$$20\times 464x-20(3x^2-58x+2523)=20\times 984;$$

na deeling door 20 en verplaatsing of vereeniging van termen verandert deze vergelijking in

$$3x^2-522x=-3507,$$

of

$$x^2-174x=-1169,$$

waaruit volgt $x=7$ of $x=167$;

de laatste waarde van x beantwoord het vraagstuk niet in den eigenlijken zin, daar dezelve voor het aantal ponden der eerste

soort

soort een getal grooter dan 1160, en voor dat der tweede soort een negatief getal zoude geven; wij nemen dus alleen $x=7$, en alsdan blijkt, dat de inkoop heeft plaats gehad

van 720 ponden der eerste soort, tegen 36 stuivers het pond,
en — 440 ——— — tweede —— —— 44 ——— — ——.

LXX. VOORSTEL.

Door F. VAN HEUKELOM, JR.

Indien men uit een punt, buiten een parallelogram, eene lijn naar een der vier hoekpunten trekt, zal de driehoek, die deze lijn tot bazis en het overstaande hoekpunt tot top heeft, gelijk zijn aan de som van twee andere driehoeken, welke beide met eerstgenoemden driehoek dezelfde bazis gemeen hebben, en wier toppen in de beide andere tegen elkander overstaande hoekpunten van het parallelogram liggen. Men vraagt zulks te bewijzen?

OPGELOST *door* L. J. ULMAN, J. BASSAN, D. HOOLA VAN NOOTEN, J. KÖHLER, H. W. BLOEM, A. DE MOL VAN OTTERLOO, A. C. BELINFANTE, C. F. JULIUS, J. SCHOTBORGH, Hz., J. S. SPEIJER, J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz., M. L. GORDE, F. VAN HEUKELOM, JR. *en* M. H. GODEFROI.

OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

Zij P (*Fig.* 22) het gegeven punt, ABCD het parallelogram en D het gekozen hoekpunt, naar hetwelk de lijn PD getrokken is; laat voorts AD, AP, BP en CP getrokken worden, dan zal men moeten bewijzen, dat de driehoek ADP gelijk zij aan de som der driehoeken BDP en CDP. Men verlenge te dien einde PD onbepaaldelijk, trekke door het hoekpunt A, dat over het eerst gekozene staat, eene insgelijks onbepaalde lijn evenwijdig met PD, voorts door de andere over elkander staande hoekpunten B en C de lijnen EBF en GCH loodregt op PD, dan zijn de driehoeken ABE en DCH gelijk en gelijkvormig, omdat $AB=CD$ is, en uit de snijding der evenwijdige lijnen GE en HF met de evenwijdige zijden des parallelograms volgt, dat de hoeken BAE en CDH gelijk zijn, terwijl de hoeken AEB en DHC beide regt zijn; wij hebben dus $BE=CH$, waaruit volgt:

$$EF=BF+CH.$$

 Nu

Nu is EF de hoogte des driehoeks ADP,
BF „ „ „ „ BDP.
en CH „ „ „ „ CDP,
en, daar alle deze driehoeken dezelfde bazis hebben, is klaarblijkelijk ook

drieh. ADP = *drieh.* BDP + *drieh.* CDP,

waardoor dus de ſtelling, voor den, in *Fig.* 22, aangenomen ſtand van het punt P ten opzigte van het gekozen hoekpunt D, bewezen is.

Wanneer echter het punt P zoodanig ten opzigte van het gekozen hoekpunt D gelegen ware, dat de lijn PD eene zijde van het parallelogram ſneed, en diensvolgens de beide driehoeken BDP en CDP niet aan denzelfden kant der bazis vielen, zoo als, in *Fig.* 23, is aangewezen, dan zou de driehoek, die het over D ſtaande hoekpunt A tot top heeft, niet gelijk aan de *ſom*, maar aan het *verſchil* der beide andere driehoeken zijn, zoodat men alsdan heeft

drieh. ADP = *drieh.* BDP — *drieh.* CDP;

dit blijkt reeds terſtond daaruit, dat de driehoek CDP als nu aan de andere zijde der bazis liggende, ten opzigte der driehoeken ADP en BDP als negatief moet worden aangemerkt; doch wanneer men, zoo als wij, in *Fig.* 23, verrigt hebben, hier dezelfde lijnen, als tot het voorgaand bewijs, trekt, zal men zulks ook, op eene volmaakt overeenkomſtige wijze, regtſtreeks bewijzen kunnen.

Deze laatſte vergelijking geldt ook dan nog, wanneer wij het punt P binnen het parallelogram nemen, gelijk in *Fig.* 24, en diensvolgens de lijn PD, of wel haar verlengde, eene zijde des parallelograms ſnijdt; ook hier is

drieh. APD = *drieh.* BPD — *drieh.* CPD,

en ook dit zal men gemakkelijk op dezelfde wijze regtſtreeks kunnen bewijzen, daartoe weder, in *Fig.* 24, dezelfde hulplijnen trekkende als in de vorige figuren.

Wanneer het punt P zoodanig genomen wordt, dat hetzelve met het hoekpunt D op eene zelfde zijde of diagonaal des parallelograms of derzelver verlengden ligt, zal eene der driehoeken gelijk nul zijn, zoodat alsdan de beide andere aan elkander gelijk zullen wezen.

Uit

Uit dit alles blijkt, dat de opgegevene ſtelling algemeener genomen aldus luidt: *Indien men uit een punt* buiten *of* binnen *een parallelogram eene lijn naar een der vier hoekpunten trekt, zal de driehoek, die deze lijn tot bazis en het overſtaande hoekpunt tot top heeft, gelijk zijn aan* de ſom *of* het verſchil *van twee andere driehoeken, welke beide met eerstgenoemden driehoek denzelfde bazis gemeen hebben, en wier toppen in de beide andere tegen elkander overſtaande hoekpunten van het parallelogram liggen; namelijk aan* de ſom, *wanneer die twee driehoeken* aan dezelfde zijde *en aan* het verſchil, *wanneer zij* aan de verſchillende zijden *der bazis vallen.*

Aanmerking *van* J. Badon Ghijben. Men zal hebben opgemerkt, dat de genoemde ſtelling eigenlijk ſlechts daarop neerkomt, dat, wanneer men door een der hoekpunten D eene lijn trekt, de loodlijn, uit het overſtaande hoekpunt A op die lijn vallende, gelijk zal zijn aan de ſom of het verſchil der loodlijnen, uit de beide andere hoekpunten B en C, op die zelfde lijn neder gelaten; dit is echter ſlechts een bijzonder geval van de volgende algemeene ſtelling: *Wanneer men uit de hoekpunten van een parallelogram loodlijnen op eene zelfde lijn laat vallen, is de ſom der loodlijnen, uit twee tegen elkander overſtaande hoekpunten, gelijk aan de ſom der loodlijnen, uit de twee andere tegen over elkander ſtaande hoekpunten.*

Om deze ſtelling te bewijzen neme men, in *Fig.* 22, CX en CY als regthoekige coördinaten-asſen aan, dan kan men de vergelijkingen voorſtellen

van de lijn BD door $y = ax + b$,
„ „ „ AC „ $y = ax$,
„ „ „ AB „ $y = c$,
„ „ „ CD „ $y = 0$;

hieruit vindt men, voor de coördinaten

van het punt A, $\frac{c}{a}$ en c, van het punt B, $\frac{c-b}{a}$ en c,

— — — C, o en o, — — — D, $-\frac{b}{a}$ en o;

nu kan de vergelijking van elke willekeurige lijn ten aanzien der aangenomene coördinaten-asſen voorgeſteld worden door $y = mx + n$;

uit eenig punt, waarvan de coördinaten α en β zijn, eene loodlijn op die lijn latende vallen, wordt de lengte van die loodlijn uitgedrukt door

$$\frac{\beta - m\alpha - n}{\sqrt{(1+m^2)}},$$

(zie I. R. SCHMIDT, *Hoogere Meetkunst*, §. 41); vervangen wij dus α en β door de boven opgegevene coördinaten der punten A, B, C en D, dan verkrijgen wij de lengte der loodlijnen, uit die punten neergelaten op eene willekeurige lijn, waarvan de vergelijking is $y = mx + n$; deze loodlijnen respectievelijk door p, p', p'' en p''' voorstellende, hebben wij alzoo

$$p = \frac{ac - mc - an}{a\sqrt{(1+m^2)}},\quad p' = \frac{ac - mc + mb - an}{a\sqrt{(1+m^2)}},$$

$$p'' = \frac{-an}{a\sqrt{(1+m^2)}},\quad p''' = \frac{mb - an}{a\sqrt{(1+m^2)}};$$

en daaruit is het klaar, dat men heeft

$$p + p''' = p' + p'',$$

waardoor onze stelling in het algemeen bewezen is.

Ligt de lijn, waarvan $y = mx + n$ de vergelijking is, geheel buiten het parallelogram, dan zijn alle vier de loodlijnen te gelijker tijd positief of negatief; en dus gaat alsdan de stelling letterlijk door. Snijdt die lijn echter het parallelogram, dan liggen of *één* hoekpunt, bijv. C *aan de eene*, en de *drie* overige hoekpunten *aan de andere zijde* van die lijn; de loodlijn uit C heeft in dit geval het tegengestelde teeken van de drie andere loodlijnen, en wij hebben alsdan

$$p + p''' = p' - p'';$$

of er liggen *twee* hoekpunten, bijv. C en D *aan de eene* en *de beide overige aan de andere zijde* van de snijlijn, in dit geval is

$$p - p''' = p' - p'';$$

door alzoo den positieven en negatieven toestand der loodlijnen te onderscheiden, zien wij, dat, indien men al de loodlijnen als positief wil aanmerken, en de lijn, waarop die loodlijnen getrokken zijn, het parallelogram snijdt, het woord *som*, dat twee malen in onze algemeene stelling voorkomt, of eenmaal of beide malen door het woord *verschil* moet vervangen worden.

Gaat

Gaat de lijn, waarvan wij de vergelijking $y = mx + n$ stelden, door een hoekpunt, bijv. D, dan wordt klaarblijkelijk $p''' = 0$, en dus

$$p = p' + p'';$$

dit geval vindt in het opgegevene Voorstel zijne toepassing, waarbij dan wederom, even als boven, de betrekkelijk positieve of negatieve toestand van p, p' en p'' moet onderscheiden worden.

Gaat de lijn door twee op elkander volgende hoekpunten, bijv. C en D, dan worden $p'' = 0$ en $p''' = 0$, zoodat alsdan $p = p'$ is; maar gaat de lijn door twee over elkander staande hoekpunten, bijv. A en D, dan is $p = 0$ en $p''' = 0$, zoodat alsdan $p' + p'' = 0$ zijn zoude, doch in dit geval heeft p' het tegengestelde teeken van p'', dus is alsdan eigenlijk $p' - p'' = 0$ of $p' = p''$.

LXXI. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

De naam van eenen beroemden letterkundigen der voorgaande eeuw wordt met acht letters geschreven; indien men de letters van het alphabet van a tot z door de getallen 1 tot 26 voorstelt, dan vormen de $5^{de} + 8^{ste}$, 6de, 3de, 2de, 7de en $1^{ste} - 5^{de}$ letters eene opklimmende rekenkunstige reeks, terwijl de 1ste, 4de en 7de eene af dalende vormen; voorts zijn de 3de, 2de en 4de in eene klimmende, en de 7de, 3de en 6de in eene dalende harmonische orde. Wie is die letterkundige?

OPGELOST *door* B. LUBBERS, A. C. BELINFANTE, H. W. BLOEM, M. H. GODEFROI, M. L. GOEDE, D. HOOLA VAN NOOTEN, C. F. JULIUS, J. KÖHLER, A. DE MOL VAN OTTERLOO, J. S. SPEIJER, J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz, L. J. ULMAN *en* J. SCHOTBORGH, Hz.

OPLOSSING *van* B. LUBBERS.

Stellen wij voor de getallen, die de plaats der te vindene acht letters in het alphabet aanwijzen,

$$s, t, u, v, w, x, y, z \ . \ . \ . \ (1);$$

waarin s het getal beteekent, dat tot de eerste letter van den naam behoort, t dat tot de tweede letter behoorende, enz.

Volgens de eerste voorwaarde, moeten x, u, t en y vier op elkander volgende termen eener rekenkunstige reeks zijn; wanneer wij dus het verschil van die reeks a noemen, is $u = x + a$,

 $t =$

$t = x + 2a$ en $y = x + 3a$, zoodat dan de acht getallen (1) voorgesteld worden, door

$$s,\ x+2a,\ x+a,\ v,\ w,\ x,\ x+3a,\ z\ .\ (2).$$

De laatste voorwaarde bepaalt, dat $x+3a$, $x+a$ en x harmonisch evenredig zijn; en dit geeft

$$x+3a : x = (x+3a)-(x+a) : (x+a)-x,$$

of

$$x+3a : x = 2a : a,$$

waaruit terstond volgt $x+3a = 2x$ of $x = 3a$; de rei der getallen (2) gaat derhalve over in

$$s,\ 5a,\ 4a,\ v,\ w,\ 3a,\ 6a,\ z\ .\ .\ (3).$$

Volgens de tweede voorwaarde, moeten nu weder s, v en $6a$ een afdalende rekenkunstige reeks vormen; stellen wij derzelver verschil door b voor, dan is $v = 6a+b$ en $s = 6a+2b$, hierdoor verkrijgen wij voor de getallen, in plaats van (3),

$$6a+2b,\ 5a,\ 4a,\ 6a+b,\ w,\ 3a,\ 6a,\ z\ .\ (4).$$

De derde voorwaarde houdt in, dat nu $4a$, $5a$ en $6a+b$ harmonisch evenredig moeten wezen, dus is

$$4a : 6a+b = 5a-4a : (6a+b)-5a,$$

of

$$4a : 6a+b = a : a+b,$$

hieruit volgt terstond $6a+b = 4(a+b)$, waaruit men vindt $b = \frac{2}{3}a$, zoodat onze rei van getallen (4) nogmaals verandert, in

$$7\tfrac{1}{3}a,\ 5a,\ 4a,\ 6\tfrac{2}{3}a,\ w,\ 3a,\ 6a,\ z\ .\ (5).$$

De rekenkunstige reeks, waarvan in de eerste voorwaarde gesproken wordt, is dan nu

$$w+z,\ 3a,\ 4a,\ 5a,\ 6a,\ 7\tfrac{1}{3}a-w,$$

dus is klaarblijkelijk $w+z = 2a$ en $7\frac{1}{3}a - w = 7a$; uit de laatste van deze beide vergelijkingen vindt men $w = \frac{1}{3}a$, en daarna uit de eerste $z = 1\frac{2}{3}a$, weshalve wij in plaats van (5) hebben

$$7\tfrac{1}{3}a,\ 5a,\ 4a,\ 6\tfrac{2}{3}a,\ \tfrac{1}{3}a,\ 3a,\ 6a,\ 1\tfrac{2}{3}a\ .\ .\ (6);$$

dewijl dit nu alle geheele getallen moeten wezen, moet a gelijk 3 of een veelvoud van 3 zijn, maar daarenboven mag geen dezer getallen grooter dan 26 zijn, en dus kan a geen veelvoud van 3 zijn, want $a = 6$ zoude reeds voor $7\frac{1}{3}a$ het getal 44 geven; derhalve kan alleen $a = 3$ zijn, en onze acht getallen worden alsdan, volgens (6),

$$22,\ 15,\ 12,\ 20,\ 1,\ 9,\ 18,\ 5,$$

waarmede overeenstemmen de letters

V

VOLTAIRE,

die alzoo den naam des bedoelden letterkundigen doen kennen.

LXXII. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Het jaartal der vorige eeuw, waarin de bij het voorgaand voorstel bedoelde geleerde stierf, is door 2 deelbaar, en wanneer dit sterfjaar en het jaartal 1823 *beide door hun verschil gedeeld worden, zal elk dezer deelingen eene rest overlaten, gelijk aan de som der getalmerken van het sterfjaar; zijnde deze som* 9 *meer, dan de som der getalmerken van het jaar* 1823. *In welk jaar is die geleerde gestorven?*

OPGELOST *door* B. LUBBERS, M. H. GODEFROI, A. C. BELINFANTE, H. W. BLOEM, M. L. GOEDE, D. HOOLA VAN NOOTEN, J. KÖHLER, J. SCHOTBORGH, Hz., J. S. SPEIJER, J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz., L. J. ULMAN, C. F. JULIUS, M. DE LEON *en* A. DE MOL VAN OTTERLOO.

I. OPLOSSING *van* B. LUBBERS.

Het bedoelde jaartal tot de vorige eeuw behoorende, zoo is 1 het cijfer der duizendtallen en 7 dat der honderdtallen; de som der getalmerken van het jaar 1823 is 14, die van het gevraagde jaartal moet 9 meer zijn en is dus 23; de som van de cijfers der tientallen en eenheden van dat jaartal is dus $23-(1+7)=15$; stellen wij nu x voor het cijfer der tientallen, dan is $15-x$ dat der eenheden, en wij hebben dus voor het sterfjaar

$$1000+700+10x+(15-x)=1715+9x,$$

en het verschil van dit sterfjaar met het jaartal 1823 is $108-9x$; nu moeten de deelingen van $1715+9x$ en van 1823 door $108-9x$ eene rest overlaten, gelijk aan de som der cijfers van het gezochte jaartal, en deze rest moet alzoo 23 zijn; verminderen wij dus beide de jaargetallen met 23, dan moeten zij na die vermindering zonder overschot door $108-9x$ deelbaar wezen, dat is:

$$\frac{1692+9x}{108-9x} \text{ en } \frac{1800}{108-9x}$$

moeten geheele getallen zijn. Daar echter de tellers dezer uitdrukkingen juist den gemeenen noemer tot verschil hebben, zal, als x zoodanig bepaald wordt dat een derzelve een geheel getal is,

is, ook de andere een geheel getal zijn, en wij behoeven ons dus slechts met een van beide bezig te houden; kiezen wij hiertoe de tweede en stellen wij door a het geheele getal voor, waaraan die uitdrukking gelijk moet zijn, dan is

$$\frac{1800}{108-9x}=\frac{200}{12-x}=a,$$

waaruit men vindt

$$x=12-\frac{200}{a};$$

nu moet, omdat het begeerde jaartal door 2 deelbaar moet wezen, het cijfer der eenheden even zijn, en de som van de cijfers der eenheden en tientallen 15 zijnde, moet dus het cijfer der tientallen, namelijk x, oneven zijn, hetwelk vordert, dat ook $\frac{200}{a}$ oneven zij; voorts is a en dus ook $\frac{200}{a}$ een deeler van 200; omdat x positief moet zijn is $\frac{200}{a}<13$, en omdat x niet grooter dan 9 kan zijn is $\frac{200}{a}>2$; dit alles te zamen genomen moet derhalve $\frac{200}{a}$ een onevene deeler van 200 tusschen 2 en 13 zijn; de eenige deeler van 200 die hieraan voldoet is 5, en wij hebben alzoo $\frac{200}{a}=5$, waaruit volgt $x=7$, en waardoor dan voor het bedoelde sterfjaar, door $1715+9x$ voorgesteld, gevonden wordt 1778.

II. Oplossing *van* M. H. Godefroi.

Daar de som der cijfers van het gevraagde jaargetal 23 zijn moet, en de twee voorste cijfers 1 en 7 zijn, blijft er voor de som der twee achterste cijfers 15 over; omdat nu geen der cijfers grooter dan 9 kan zijn, is het niet mogelijk de som 15 op eene andere wijze in de twee onbekende cijfers te splitsen, dan in 9 en 6 of 7 en 8, waarbij, opdat het jaartal door 2 deelbaar zij, altijd het evene cijfer het laatste moet komen; het begeerde jaargetal kan dus slechts 1796 of 1778 zijn, en toetst men elk dezer aan de overige voorwaarden des Voorstels, dan vindt men,

dat

dat daaraan alleen het laatstgenoemde beantwoordt, weshalve 1778 het bedoelde sterfjaar is.

LXXIII. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Men vraagt eenen regthoekigen driehoek te bepalen, zoodanig, dat het aantal lengte-eenheden, in de schuinsche zijde begrepen, gelijk zij aan het aantal vierkante eenheden van den inhoud?

OPGELOST *door* M. G. SNOER, B. LUBBERS, A. C. BELINFANTE, M. L. GOEDE, D. HOOLA VAN NOOTEN, C. F. JULIUS, M. DE LEON, J. KÖHLER, J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz., L. J. ULMAN, J. SCHOTBORGH, Hz., J. S. SPEIJER, M. H. GODEFROI *en* A. DE MOL VAN OTTERLOO.

OPLOSSING *van* M. G. SNOER.

Stel voor de regthoekszijden $2x$ en y en voor de hypothenusa z, dan is de inhoud xy, en wij hebben terstond de vergelijkingen

$$z = xy \quad \text{en} \quad z^2 = 4x^2 + y^2;$$

door de waarde van z uit de eerste in de tweede vergelijking over te brengen, heeft men

$$x^2y^2 = 4x^2 + y^2,$$

of

$$4x^2 = y^2(x^2 - 1),$$

waaruit volgt

$$2x = y\sqrt{(x^2 - 1)} \quad \text{en} \quad y = \frac{2x}{\sqrt{(x^2 - 1)}};$$

zullen nu x en y beide rationaal zijn, dan moet $\sqrt{(a^2 - 1)}$ zulks insgelijks wezen. Stellen wij hiertoe

$$x^2 - 1 = (p - 1)^2,$$

dan vinden wij

$$x = \frac{p^2 + 1}{2p},$$

hierdoor wordt

$$y = \frac{2x}{\sqrt{(x^2 - 1)}} = \frac{2(p^2 + 1)}{p^2 - 1},$$

en

$$z = xy = \frac{(p^2 + 1)^2}{p(p^2 - 1)};$$

wij hebben dus voor de zijden des driehoeks

$$\frac{p^2 + 1}{p}, \quad \frac{2(p^2 + 1)}{p^2 - 1} \quad \text{en} \quad \frac{(p + 1)^2}{p(p^2 - 1)},$$

waarin voor p een willekeurig getal kan genomen worden, behalve de eenheid; voor $p = 2$, zijn de zijden des driehoeks $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{3}$, $4\frac{1}{6}$.

AAN-

Aanmerking. Alzoo p^2+1 niet door p deelbaar is, dan alleen in het geval van $p=1$, dat hier echter is uitgesloten, zal men op het vraagstuk geen antwoord in geheele getallen kunnen bekomen.

LXXIV. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

Een rekenkunstige reeks van vijf termen te vinden, zoodanig, dat de som der reeks een vierkant, de som der twee eerste termen insgelijks een vierkant, en de som der drie laatste termen eene derde magt zij?

Opgelost *door* W. J. C. Rammelman Elsevier, J. S. Speijer, H. W. Bloem, M. H. Godefroi, M. L. Goede, D. Hoola van Nooten, C. F. Julius, J. Köhler, B. Lubbers, A. de Mol van Otterloo, J. Schotborgh, Hz., M. de Leon, C. van Schaick, M. G. Snoer *en* L. J. Ulman.

I. Oplossing *van* W. J. C. Rammelman Elsevier.

De reeks voorstellende door

$$5x^2-2y,\quad 5x^2-y,\quad 5x^2,\quad 5x^2+y \text{ en } 5x^2+2y,$$

is derzelver som $25x^2$ en hierdoor voldaan aan de voorwaarde, dat die som een vierkant zijn moet; er blijft dus nog over de som der drie laatste termen, namelijk $15x^2+3y$ tot eene derde magt, en de som der twee eerste termen $10x^2-3y$ tot eene tweede magt te maken; wij kunnen terstond $15x^2+3y$ tot eene derde magt maken, door te stellen $3y=p^3x^3-15x^2$ en hieruit volgt

$$y=\tfrac{1}{3}x^2(p^3x-15);$$

brengen wij nu deze waarde voor y over in $10x^2-3y$, dan hebben wij

$$25x^2-p^3x^3=x^2(25-p^3x),$$

welke uitdrukking nu een vierkant moet worden; hieraan kunnen wij wederom terstond voldoen; door $25-p^3x=q^2$ te stellen, en alsdan is

$$x=\frac{25-q^2}{p^3};$$

nemen wij nu p en q naar willekeur, dan zullen wij, door x en y hieruit te bepalen, eene reeks vinden, die aan de voorgestelde voor-

voorwaarden voldoet; voor $p = 1$ en $q = 2$ is $x = 21$, $y = 882$ en bij gevolg de reeks

$$441, 1323, 2205, 3087 \text{ en } 3969.$$

II. Oplossing *van* J. S. Speijer.

Omdat de ſom van een willekeurig aantal op elkander volgende termen van de reeks der natuurlijke onevene getallen, mits van de eenheid af beginnende, altijd een volkomen vierkant is, ſtelle men voor de gevraagde reeks

$$x^2, \ 3x^2, \ 5x^2, \ 7x^2 \text{ en } 9x^2;$$

dan is reeds de ſom der geheele reeks $25x^2$ en de ſom van de twee eerſte termen $4x^2$ een volkomen vierkant, zoodat er nog ſlechts overblijft de ſom der drie laatſte termen $21x^2$ tot eene derde magt te maken; hieraan voldoet men terſtond, door te ſtellen $x = 21q^3$, waardoor de reeks wordt

$$441q^6, \ 1323q^6, \ 2205q^6, \ 3087q^6 \text{ en } 3969q^6,$$

waarin men aan q eene willekeurige waarde kan geven; voor $q = 1$ heeft men dezelfde reeks als in de voorgaande oplosſing.

LXXV. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

Een ſcherphoekige driehoek ABC *is door eene loodlijn* CD, *die uit het hoekpunt* C *op de overſtaande zijde* AB *valt, in twee regthoekige driehoeken* ACD *en* BCD *verdeeld. Indien men het aantal vierkante eenheden, dat de driehoek* BCD *bevat, optelt bij het aantal lengte-eenheden van de zijde* AC, *is de ſom gelijk aan een gegeven getal a; indien men even zoo de inhoud van* ACD *en de zijde* BC *zamentelt, is de ſom gelijk aan b; eindelijk bevat de omtrek des driehoeks c lengte-eenheden. Hoe kan hieruit de middellijn van den ingeſchreven cirkel in den driehoek* ABC *berekend worden?*

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, D. Hoola van Nooten *en* W. J. C. Rammelman Elsevier.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Laat *Fig.* 25 den bedoelden driehoek met de daarin getrokkene loodlijn voorſtellen; ſtellen wij $AC = x$, $BC = y$, $AB = z$ en noemen wij $4u$ de te berekenen middellijn des ingeſchreven cirkels, dan kunnen wij den inhoud van den driehoek ABC vooreerst volgens de zeer bekende formule in de drie zijden x, y en

en z uitdrukken, ten andere kunnen wij dien inhoud uitdrukken, door het product van den omtrek met de halve ſtraal des ingeſchreven cirkels, en dit geeft ons terſtond de vergelijking

$$(x+y+z)u=\tfrac{1}{4}\sqrt{(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)},$$

brengen wij nu deze vergelijking in het vierkant, ſtellen wij voor $x+y+z$ de gegevene waarde c, en ſchrijven wij voor het product der twee laatſte factoren

$$(x-y+z)(-x+y+z)=\{z+(x-y)\}.\{z-(x-y)\}=z^2-(x-y)^2,$$

dan vinden wij

$$16cu^2=\{(x+y)-z\}.\{z^2-(x-y)^2\} \quad . \quad (1).$$

Voorts is gegeven

$$\left.\begin{array}{l} \textit{drieh.}\,ADC+BC=b \text{ of } \textit{drieh.}\,ADC=b-y \\ \text{en } \textit{drieh.}\,BDC+AC=a \text{ of } \textit{drieh.}\,ADC=a-x \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (2),$$

door optelling hiervan vinden wij, omdat $\textit{drieh.}\,ADC+\textit{drieh.}BDC$ $=\textit{drieh.}\,ABC=(x+y+z)u=cu$ is,

$$cu=(a+b)-(x+y),$$

of

$$x+y=(a+b)-cu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

dit aftrekkende van $x+y+z=c$,

komt er

$$z=cu-(a+b-c) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Nu is al verder

$$AD=\frac{AC^2+AB^2-BC^2}{2\,AB}=\frac{x^2+z^2-y^2}{2z},$$

en

$$BD=\frac{BC^2+AB^2-AC^2}{2\,AB}=\frac{y+z^2-x^2}{2z},$$

waaruit door aftrekking volgt

$$AD-BD=\frac{x^2-y^2}{z}=\frac{(x-y)(x+y)}{z};$$

ook is $AD:BD=\textit{drieh.}\,ADC:\textit{drieh}\,BDC$,

of door (2)

$$AD:BD=b-y:a-x,$$

en dus

$$AD-BD:AD+BD=(b-a)+(x-y):(a+b)-(x+y),$$

dewijl nu $AD+BD=AB=z$ is, vindt men hieruit

$$AD-BD=z.\frac{(b-a)+(x-y)}{(a+b)-(x+y)};$$

de beide waarden voor $AD-BD$ gevonden, geven de vergelijking

z.

$$z.\frac{(b-a)+(x-y)}{(a+b)-(x+y)}=\frac{(x-y)(x+y)}{z},$$

hieruit $x-y$ afzonderende, heeft men

$$x-y=\frac{(b-a).z^2}{(x+y)\{(a+b)-(x+y)\}-z^2},$$

en verder hierin voor $x+y$ en z de waarden uit (3) en (4) stellende, komt er

$$x-y=\frac{(b-a)\{cu-(a+b-c)\}^2}{cu\{(a+b)-cu\}-\{cu-(a+b-c)\}^2}\ .\ (5).$$

Brengen wij nu de in (3), (4) en (5) gevondene waarden voor $x+y$, z en $x-y$ in de vergelijking (1) over, dan zullen wij eene vergelijking bekomen, die tot den zevenden graad opklimt, maar waarin u de eenige onbekende is; uit deze vergelijking kan dus u, en bij gevolg ook $4u$ of de gevraagde middellijn, bepaald worden.

Was, bij voorbeeld, gegeven $a=45$, $b=67$ en $c=42$, zoo zouden wij hebben:

$$16\times 42\,u^2=\{(x+y)-z\}.\{z^2-(x-y)^2\}\ .\ (1'),$$

$$x+y=112-42u=14(8-3u)\ .\ .\ .\ (3'),$$

$$z=42u-70=14(3u-5)\ .\ .\ .\ (4'),$$

$$\text{en } x-y=\frac{22(42u-70)^2}{42u(112-42u)-(42u-70)^2}=\frac{22(3u-5)^2}{18u^2-54u+25}\ (5');$$

brengen wij nu in (1′) de waarden (3′), (4′) en (5′) over, dan vinden wij

$$16\times 42u^2=14(13-6u)\left\{196(3u-5)^2-\frac{484(3u-5)^4}{(18u^2-54u+25)^2}\right\},$$

of na eenige herleiding

$$12u^2(18u^2-54u+25)^2$$
$$=(13-6u)(3u-5)^2\{49(18u^2-54u+25)^2-121(3u-5)^2\};$$

zonder ons op te houden met deze vergelijking tot den gewonen vorm der hoogere magts-vergelijkingen te herleiden en derzelver wortels te zoeken, zullen wij alleen opmerken, dat aan dezelve voldoet $u=2$; wij hebben dus, met deze gegevens, voor de gevraagde middellijn $4u=8$, en nu vindt men door (3′), (4′) en (5′) terstond $x+y=28$, $z=14$ en $x-y=2$, waaruit volgt dat de zijden des driehoeks zijn $x=15$, $y=13$

en $s = 14$; zoodat door onze vergelijkingen niet alleen de gezochte middellijn gevonden, maar tevens de geheele driehoek bepaald wordt.

LXXVI. Voorstel.

Door M. de Leon.

Van een trapezium in eenen halven cirkel beschreven is gegeven de hoek waaronder deszelfs diagonalen elkander snijden; indien nu ook de straal diens halven cirkels bekend is, verlangt men de zijden des trapeziums te berekenen?

Opgelost *door* M. de Leon, L. J. Ulman, A. C. Belinfante, H. W. Bloem, D. Hoola van Nooten, C. F. Julius, A. de Mol van Otterloo, J. Teixeira de Mattos, Bz. *en* J. Köhler.

Oplossing *van* M. de Leon.

Laat ABCD (*Fig.* 26) het in eenen halven cirkel beschreven trapezium voorstellen, dan is het klaar, dat AD en BC de evenwijdige zijden zijn, weshalve de bogen AB en CD, en bij gevolg ook de lijnen AB en CD aan elkander gelijk zijn; zij verder a de hoek BFA waaronder de diagonalen elkander snijden en r de straal AE des halven cirkels, dan wordt de hoek BFA $= a$ gemeten, door de halve som der bogen AB en CD, maar, daar deze bogen gelijk zijn, is hunne halve som gelijk aan een' dier bogen zelve, zoodat de hoek BFA door een' der bogen AB=CD gemeten wordt; dewijl nu de hoeken ADB en DAC, door de helften der bogen AB en CD gemeten worden, zijn deze hoeken de helften van den hoek BFA, en wij hebben dus

$$\textit{hoek}\, ADB = \textit{hoek}\, DAC = \tfrac{1}{2} a,$$

als ook

$$\textit{hoek}\, ACB = \textit{hoek}\, DBC = \tfrac{1}{2} a;$$

omdat de driehoeken ABD en ACD in eenen halven cirkel staan en dus regthoekig zijn, zijn de hoeken DAB en ADC de complementen der hoeken ADB en DAC, dus is

$$\textit{hoek}\, DAB = \textit{hoek}\, ADC = 90° - \tfrac{1}{2} a,$$

en trekt men nu de gevondene hoeken behoorlijk van elkander af, dan volgt daaruit

$$\textit{hoek}\, BAC = \textit{hoek}\, BDC = 90° - a.$$

Nu hebben wij uit den regthoekigen driehoek ABD terstond

$$AB = AD \,.\, \textit{Sin.}\, ADB = 2r\, \textit{Sin.}\, \tfrac{1}{2} a;$$

en

en uit den driehoek ABC

$$BC = \frac{AB \, . \, Sin. \, BAC}{Sin. \, ACB} = \frac{AB \, . \, Sin. \, (90^\circ - a)}{Sin. \, \frac{1}{2} a} = \frac{AB \, . \, Cos. \, a}{Sin. \, \frac{1}{2} a},$$

hierin de gevondene waarde voor AB overbrengende, komt er

$$BC = 2 \, r \, Cos. \, a;$$

waardoor, daar $AD = 2r$ is, al de zijden van het bedoelde trapezium bepaald zijn.

LXXVII. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Zoo van eenen regthoekigen driehoek de schuinsche zijde en het verschil der regthoekszijden gegeven is, vraagt men de regthoekszijden te bepalen?

OPGELOST *door* G. BRANDSTEDER, A. C. BELINFANTE, H. W. BLOEM, S. T. BOAS, M. H. GODEFROI, M. L. GORDE, D. HOOLA VAN NOOTEN, C. F. JULIUS, J. KÖHLER, B. LUBBERS, A. DE MOL VAN OTTERLOO, C. VAN SCHAICK, J. SCHOTBORGH, Hz., M. G. SNOEK, J. S. SPEIJER, J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz. *en* L. J. ULMAN.

OPLOSSING *van* G. BRANDSTEDER.

Noemen wij a de gegevene schuinsche zijde en $2b$ het gegeven verschil der beide regthoekszijden, dan kunnen wij die regthoekszijden zelve voorstellen door $x + b$ en $x - b$, en, volgens de eigenschappen der regthoekige driehoeken, hebben wij

$$(x + b)^2 + (x - b)^2 = a^2,$$

of, na ontwikkeling en vereeniging der gelijksoortige termen,

$$2(x^2 + b^2) = a^2,$$

dus is
$$x^2 + b^2 = \tfrac{1}{2} a^2,$$

of
$$x^2 = \tfrac{1}{2} a^2 - b^2,$$

en
$$x = \sqrt{(\tfrac{1}{2} a^2 - b^2)};$$

wij hebben dus voor de beide regthoekszijden

$$x + b = b + \sqrt{(\tfrac{1}{2} a^2 - b^2)},$$

en
$$x - b = -b + \sqrt{(\tfrac{1}{2} a^2 - b^2)};$$

was, bij voorbeeld, $a = 17$ en $2b = 7$ gegeven, dan zouden wij hebben $x = 11\frac{1}{2}$, zoodat alsdan de beide regthoekszijden zouden zijn 15 en 8.

AANMERKING *van* J. BADON GHIJBEN. Indien gevraagd was om, uit de gegevens van het voorstel, den regthoekigen driehoek

hoek te construeren, zoude men zulks op de volgende wijze kunnen doen: men beschrijve op de gegevene schuinsche zijde AB (*Fig.* 27) als middellijn eenen halven cirkel AMB, en op dezelfde AB een cirkel-segment ANB, dat eenen hoek van 135° bevat; in de boog ANB trekke men uit A eene koorde AD gelijk aan het gegeven verschil der regthoekszijden en verlenge dezelve tot zij den cirkel AMB in C snijdt, alsdan BC getrokken hebbende zal ABC de begeerde driehoek zijn; dewijl de driehoek ACB in eenen halven cirkel staat, is het klaar, dat die driehoek in C regthoekig en AB deszelfs schuinsche zijde is, wij behoeven dus nog slechts aan te toonen, dat het verschil der regthoekszijden, van den geconstrueerden driehoek ABC, werkelijk gelijk is aan de gegevene lijn AD; hiertoe BD trekkende, is volgens de constructie *hoek* ADB = 135° en derhalve *hoek* BDC = 45°, maar de driehoek BCD in C regthoekig zijnde, is de *hoek* CBD het complement van de *hoek* BDC, en dus ook *hoek* CBD = 45°; derhalve is de driehoek BCD gelijkbeenig of DC = BC, en nu is klaarblijkelijk

$$AC - BC = AD + DC - BC = AD.$$

LXXVIII. VOORSTEL.

— *Door* L. F. BEAULIEU.

De kleinst mogelijke ellips te bepalen, welke om eenen gegevenen driehoek kan beschreven worden?

OPGELOST *door* L. F. BEAULIEU *en* D. HOOLA VAN NOOTEN.

OPLOSSING *van* L. F. BEAULIEU.

Zij ABC (*Fig.* 28) de gegevene driehoek en nemen wij deszelfs zijden AB en AC tot coördinaten-assen aan, dan kunnen wij de vergelijking van eene om den driehoek beschrevene ellips ten opzigte van die assen voorstellen door

$$ay^2 + xy + cx^2 + dy + ex = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

want, daar dezelve door den oorsprong A gaat, kan in hare vergelijking geen standvastige term voorkomen, terwijl wij altijd de bevoegdheid hebben eene der coëfficienten gelijk aan de eenheid te nemen; indien wij verder AB $= n$ en AC $= m$ stellen, zijn de coördinaten van het punt B, $x = n$ en $y = 0$, en van het punt C, $x = 0$ en $y = m$; en daar de ellips door die punten B en C

gaat,

gaat, moet aan hare vergelijking zoo wel door $x=n$ en $y=0$, als door $x=0$ en $y=m$ voldaan worden, en dit geeft ons

$$\left.\begin{array}{ll} cn^2+en=0 & \text{of } e=-cn \\ \text{en} \quad am^2+dm=0 & \text{of } d=-am \end{array}\right\} \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Nu hebben wij in het LIII Voorstel de inhoud eener ellips uitgedrukt gevonden, in de coëfficienten van derzelver algemeene vergelijking

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0,$$

en wij zullen in die uitdrukking slechts $b=1$ en $f=0$ behoeven te nemen, om dezelve te kunnen toepassen op den inhoud der ellips die wij door de vergelijking (1) voorgesteld hebben; noemende alzoo die inhoud I, hebben wij

$$I=2\pi.Sin.\alpha.\frac{ae^2+cd^2-de}{\sqrt{(4ac-1)^3}},$$

waarin α de hoek der coördinaten assen beteekent, of, door hierin voor d en e de in (2) gevondene waarden te substitueren,

$$I=2\pi\,Sin.\alpha\,\frac{ac(m^2a+n^2c-mn)}{\sqrt{(4ac-1)^3}};$$

deze vergelijking, waarin alleen nog maar a en c onbepaalde veranderlijke grootheden zijn, drukt dus den inhoud uit eener willekeurige om den driehoek ABC beschrevene ellips, en het komt er slechts op aan a en c zoodanig te bepalen, dat die inhoud een minimum zij, waartoe het genoegzaam zijn zal de functie

$$z=\frac{ac(m^2a+n^2c-mn)}{\sqrt{(4ac-1)^3}}$$

tot een minimum te maken. Differentieren wij hiertoe deze functie beurtelings ten opzigte van a en c, dan vinden wij na herleiding

$$\frac{\partial z}{\partial a}=\frac{c}{\sqrt{(4ac-1)^5}}.\{2ac(m^2a-n^2c+mn)-2m^2a-n^2c+mn\} \quad (3)$$

en

$$\frac{\partial z}{\partial c}=\frac{a}{\sqrt{(4ac-1)^5}}.\{2ac(n^2c-m^2a+mn)-2n^2c-m^2a+mn\} \quad (4);$$

dewijl men nu klaarblijkelijk noch $a=0$, noch $c=0$ mag stellen, kan het minimum slechts aangegeven worden door te stellen

$$\left.\begin{array}{l} 2ac(m^2a-n^2c+mn)-2m^2a-n^2c+mn=0 \\ \text{en } 2ac(n^2c-m^2a+mn)-2n^2c-m^2a+mn=0 \end{array}\right\} \; . \; (5).$$

 uit

uit welke vergelijkingen alsnu a en c moeten bepaald worden; dezelve te dien einde van elkander aftrekkende, heeft men

$$4ac(m^2a-n^2c)-(m^2a-n^2c)=0,$$

of

$$(4ac-1)(m^2a-n^2c)=0,$$

en daar de factor $4ac-1$ alleen gelijk nul kan zijn, ingeval de vergelijking (1) tot eene parabool behoorde, hebben wij hier alleen

$$m^2a-n^2c=0 \text{ of } c=\frac{m^2}{n^2}a \quad . \; . \; . \; (6);$$

deze waarde van c in de eerste der vergelijkingen (5) substitueerende, verandert dezelve in

$$2m^2a^2-3mna+n^2=0,$$

of

$$a^2-\frac{3n}{2m}a+\frac{n^2}{2m^2}=0,$$

waaruit men vindt

$$a=\frac{n}{m} \text{ of } a=\frac{n}{2m};$$

deze laatste waarde $a=\frac{n}{2m}$ zoude volgens (6) en (2) geven

$$c=\frac{m}{2n},\quad d=-\tfrac{1}{2}n \text{ en } e=-\tfrac{1}{2}m,$$

en de vergelijking (1) der omgeschrevene ellips zoude hierdoor worden

$$\frac{n}{2m}y^2+xy+\frac{m}{2n}x^2-\tfrac{1}{2}ny-\tfrac{1}{2}mx=0,$$

of door herleiding achtervolgens

$$n^2y^2+2mnxy+m^2x^2-mn^2y-m^2nx=0,$$

$$(ny+mx)^2-mn(ny+mx)=0,$$

$$(ny+mx)(ny+mx-mn)=0;$$

deze vergelijking behoort echter klaarblijkelijk tot een stelsel van twee evenwijdige lijnen, waarvan de eene, door $ny+mx-mn=0$ voorgesteld, de lijn BC is; terwijl de andere, door $ny+mx=0$ voorgesteld, eene lijn is door het punt A evenwijdig met BC getrokken; de waarde $a=\frac{n}{2m}$ kan alzoo aan de vraag niet beantwoorden. Nemen wij echter $a=\frac{n}{m}$, dan volgt uit (6) en (2)

$c=$

$$c=\frac{m}{n},\quad d=-n \text{ en } e=-m,$$

en de vergelijking (1) wordt alsdan

$$\frac{n}{m}y^2+xy+\frac{m}{n}x^2-ny-mx=0,$$

of $$n^2y^2+mnxy+m^2x^2-mn^2y-m^2nx=0 \quad , \quad (7);$$

behoorende nu deze vergelijking tot de kleinst mogelijke ellips, die om den driehoek ABC kan beschreven worden. Hiertoe moeten wij echter nog aantoonen dat de waarden

$$a=\frac{n}{m} \text{ en } c=\frac{m}{n} \quad \ldots\ldots \quad (8),$$

de functie z wezenlijk tot een *minimum* maken. Te dien einde moeten wij, volgens de bekende regels, uit de vergelijkingen (3) en (4) de tweede differentiaal quotienten opmaken en daarin de laatstgenoemde waarden van a en c substitueren. Om echter de berekening eenigzins te vereenvoudigen, stellen wij in den laatsten factor der vergelijkingen (3) en (4), voor dat wij tot de tweede differentiatie overgaan, de waarde van die veranderlijke, welke bij die tweede differentiatie als standvastig moet beschouwd worden; ten einde namelijk de vergelijking (3) ten opzigte van a te differentieeren, substitueeren wij vooraf in denzelfs laatsten factor $c=\frac{m}{n}$, als wanneer wij vinden

$$\frac{\partial z}{\partial a}=\frac{2m^2ac}{n\sqrt{(4ac-1)^3}}\cdot(ma-n),$$

en alsdan de differentiatie verrigtende, in het oog houdende dat, ten gevolge der substitutie van $a=\frac{n}{m}$, of $ma-n=0$, die men in de uitkomst doen moet, al de termen waarin $ma-n$ als factor voorkomt, kunnen weggelaten worden, zal men gemakkelijk vinden

$$\frac{\partial^2 z}{\partial a^2}=\frac{2m^3ac+\text{enz.}}{n\sqrt{(4ac-1)^5}}=\frac{2m^3}{9n\sqrt{3}};$$

stellen wij in den laatsten factor der vergelijking (3) $a=\frac{n}{m}$, dan komt er

$$\frac{\partial z}{\partial a}=\frac{nc}{m\sqrt{(4ac-1)^5}}.(3mnc-2n^2c^2-m^2)$$
$$=\frac{nc(2nc-m)}{m\sqrt{(4ac-1)^5}}.(m-nc),$$

differentieren wij dezelve nu ten opzigte van c, met in acht neming, dat wij nu ten gevolge der te doene substitutie al de termen waarin de factor $m-nc$ voorkomt, weglaten kunnen, dan vinden wij

$$\frac{\partial^2 z}{\partial a.\partial c}=\frac{-n^2c(2nc-m)+\text{enz.}}{m\sqrt{(4ac-1)^5}}=-\frac{mn}{9\sqrt{3}};$$

op gelijke wijze in den laatsten factor der vergelijking (4) $a=\frac{m}{n}$ substituerende, gaat dezelve over in

$$\frac{\partial.z}{\partial.c}=\frac{2n^2ac}{m\sqrt{(4ac-1)^5}}.(nc-m),$$

en de differentiatie ten opzigte van c bewerkstelligende, wederom met weglating der termen die met $nc-m$ vermenigvuldigd zijn, vinden wij

$$\frac{\partial^2 z}{\partial c^2}=\frac{2n^3ac+\text{enz.}}{m\sqrt{(4ac-1)^5}}=\frac{2n^3}{9m\sqrt{3}};$$

uit deze gevondene waarden, die de tweede differentiaal-quotienten verkrijgen door de substitutie van $a=\frac{n}{m}$ en $c=\frac{m}{n}$, blijkt, dat na die substitutie $\frac{\partial^2 z}{\partial a^2}$ en $\frac{\partial^2 z}{\partial c^2}$ beide positief zijn, en derzelver product tevens het vierkant van $\frac{\partial^2 z}{\partial a.\partial c}$ overtreft, zoodat die waarden van a en c werkelijk de functie z tot een *minimum* maken, en dus behoren tot de kleinst mogelijke ellips die om den driehoek ABC kan beschreven worden, waarvan wij de vergelijking (7) reeds gevonden hebben.

Uit de vergelijking (7) trekt men gemakkelijk het differentiaal-quotient

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{m}{n}.\frac{ny+2mx-mn}{mx+2ny-mn},$$

en men vindt de punten, alwaar de raaklijn evenwijdig aan de as der x loopt, door te stellen

∂y

$$\frac{\partial y}{\partial x} = o \text{ of } ny + 2mx - mn = o,$$

hetwelk, met de vergelijking (7) der ellips verbonden, voor de coördinaten der gezochte raakpunten geeft

$$x = o \text{ en } y = m \text{ of wel } x = \tfrac{2}{3}n \text{ en } y = -\tfrac{1}{3}m;$$

het eerste stelsel behoort klaarblijkelijk tot het punt C, en het tweede tot een punt G, dat in de lijn CM, uit C door het midden M van AB getrokken, zoodanig gelegen is, dat $MG = 1\frac{1}{3}CM$ is; want indien men uit het alzoo bepaalde punt G een lijn GK evenwijdig aan AC trekt, dan zijn AK en $-$ GK de coördinaten van hetzelve, en men heeft, daar $MG = \frac{1}{3}CM$ is, $MK = \frac{1}{3}AM = \frac{1}{6}AB$, en dus ook $AK = AM + MK = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{6}AB = \frac{2}{3}AB = \frac{2}{3}n$; zijnde het voorts duidelijk dat $GK = \frac{1}{3}AC = \frac{1}{3}m$ is.

Daar nu CG de raakpunten van twee evenwijdige raaklijnen vereenigt, zoo is CG eene middellijn der ellips, en deelt men CG midden door in O, dan is O derzelver middelpunt; trekt men verder RO evenwijdig aan AB of aan de evenwijdige raaklijnen CA′ en GL, dan heeft men de rigting van de aan CG toegevoegde middellijn; om de lengte EF dezer toegevoegde middellijn te bepalen, merke men op dat uit de vorige constructie volgt $MO = \frac{1}{3}CM$, dus is de ordinaat van het middelpunt O, $AR = \frac{1}{3}AC = \frac{1}{3}m$; stelt men nu $y = AR = \frac{1}{3}m$ in de vergelijking (7) der ellips, dan vindt men na herleiding

$$x^2 - \tfrac{2}{3}nx - \tfrac{2}{9}n^2 = o;$$

de wortels van deze vergelijking zijn klaarblijkelijk

$$x = -RE \text{ en } x = +RF,$$

en men heeft dus, uit de eigenschappen van de coëfficienten der vergelijkingen,

$$RF - RE = \tfrac{2}{3}n \text{ en } RF \times RE = \tfrac{2}{9}n^2,$$

waaruit men gemakkelijk vindt

$$RF + RE = EF = \tfrac{2}{3}n\sqrt{3} = \tfrac{2}{3}AB\sqrt{3};$$

daar wij nu de ligging en de lengte van twee elkander toegevoegde middellijnen CG en EF kennen, is de ellips geheel bepaald.

Gevolgen. I. Uit het LV Voorstel blijkt, dat de grootst mogelijke ellips, die in den driehoek ABC kan beschreven worden, mede haar middelpunt in O heeft en tevens twee toegevoegde middellijnen gerigt volgens CG en EF, waarvan de leng-

ten zijn $\frac{2}{3}CM$ en $\frac{1}{3}AB\sqrt{3}$, en dus de helft der overeenkomstige middellijnen van de kleinst mogelijke omgeschrevene ellips; hieruit volgt dus, dat de *grootst* mogelijke ellips *in* een' driehoek en de *kleinst* mogelijke *om* dien driehoek beschreven, gelijkvormige ellipsen zijn, die een zelfde middelpunt hebben.

II. Wij hebben straks gezien, dat de lijn $A'B'$, door het punt C evenwijdig aan AB of aan de as der x getrokken, de bepaalde ellips in dit punt C aanraakt; daar men nu onverschillig een der punten B of C tot oorsprong, en eene der zijden AC of BC tot as der x had kunnen aannemen, zoo ziet men daaruit ligtelijk in, dat, wanneer men door A en B de lijnen $B'C'$ en $A'C'$ evenwijdig aan BC en AC trekt, deze lijnen ook in A en B de gezegde ellips zullen aanraken; de drie alzoo getrokkene raaklijnen vormen eenen driehoek $A'B'C'$ gelijkvormig ABC, en waarvan de zijden klaarblijkelijk in A, B en C midden door gedeeld zijn. Hieruit, en uit hetgeen in Voorstel LV. is bewezen, volgt, dat de *kleinst* mogelijke ellips, welke *om* den driehoek ABC beschreven kan worden, tevens de *grootst* mogelijke is die men *in* den driehoek $A'B'C'$ kan beschrijven.

III. De inhouden der drie elliptische segmenten AEC, BFC en AGB zijn aan elkander gelijk; want trekt men eene koorde st evenwijdig met de middellijn EF, zoo wordt die koorde door de aan EF toegevoegde middellijn CG in twee gelijke deelen $su = ux$ verdeelt; en daar AM = MB is, is ook $tu = uv$, waaruit volgt $st = vx$; omdat nu deze laatste gelijkheid plaats heeft, voor al de koorden welke men evenwijdig met EF trekken kan, mag men hieruit tot de gelijkheid der segmenten AEC en BFC besluiten. Trekt men BB', dan zal deze lijn door O gaan en AC en N midden door deelen; BH is dan ook eene middellijn der ellips, waarvan de toegevoegde klaarblijkelijk evenwijdig met AC is, en men zal hieruit op gelijke wijze kunnen afleiden, dat de segmenten AGB en BFC aan elkander gelijk zijn.

LXXIX. VOORSTEL.

Door J. BADON GHIJBEN.

Men vraagt de lengte der koorde te berekenen, die eenen boog onderspant, indien de lengte des boogs alsmede de pijl gegeven zijn?

Op-

OPGELOST door J. BADON GHIJBEN en L. J. ULMAN,

OPLOSSING van J. BADON GHIJBEN.

Laat in *Fig.* 29 de gegevene boog ABC $=2a$, de gegevene pijl BD $=b$, de onbekende ſtraal, waarmede de boog beſchreven is, OB $=r$ en de gevraagde koorde AC $=x$ zijn, beſchrijven wij dan uit het middelpunt O des boogs ABC met eenen ſtraal, die gelijk is aan de eenheid, eenen boog A′B′C′ en noemen wij dien boog 2ϕ, dan is *boog* AB $=a$ en *boog* A′B′ $=\phi$ en uit de figuur volgt terſtond:

$$\textit{boog}\ AB = r \times \textit{boog}\ A'B' \quad \text{of} \quad a = r\phi \quad . \quad . \quad (1),$$

$$BD = r \times B'D' = r \times (OB' - OD') \quad \text{of} \quad b = r(1 - Cos.\phi) \quad (2)$$

$$\text{en}\ AC = r \times A'C' = 2r \times A'D' \quad \text{of} \quad x = 2r\,Sin.\phi \quad . \quad (3);$$

wij hebben dus drie vergelijkingen tuſſchen de drie onbekenden r, ϕ en x, waarvan alleen de laatſte behoeft bepaald te worden; dewijl men echter uit deze vergelijkingen ϕ niet kan verdrijven, om zoo doende eene eindvergelijking in x te bekomen, zal men vooraf ϕ moeten bepalen, om daarna x te kunnen berekenen. Verdrijven wij hiertoe r uit de vergelijkingen (1) en (2), dan vinden wij

$$a(1 - Cos.\phi) = b\phi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

deze vergelijking transcendentaal zijnde, kan men daaruit ϕ alleen bij benadering vinden; laat derhalve α eene benaderde waarde van ϕ zijn, die van de wezenlijke waarde van ϕ ſlechts een klein boogje y verſchilt, dan is

$$\phi = \alpha + y,$$

hierdoor gaat (4) over in

$$a(1 - Cos.\alpha\,Cos.y + Sin.\alpha\,Sin.y) = b(\alpha + y);$$

ſtellen wij nu, daar y eenen zeer kleinen boog voorſtelt, $Cos.y = 1$ en $Sin.y = y$, dan hebben wij

$$a(1 - Cos.\alpha + y\,Sin.\alpha) = b(\alpha + y),$$

en vinden hieruit gemakkelijk

$$y = \frac{b\alpha - a(1 - Cos.\alpha)}{a\,Sin.\alpha - b},$$

of na herleiding

$$y = \frac{\frac{2a}{b}\,Sin.^2\tfrac{1}{2}\alpha - \alpha}{\frac{2a}{b}\,Sin.\tfrac{1}{2}\alpha\,Cos.\tfrac{1}{2}\alpha - 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5);$$

door

door deze formule wordt, indien ten naasten bij $\alpha = \phi$ is, ook y ten naasten bij bekend, zoodat alsdan

$$\alpha' = \alpha + y = \alpha - \frac{\frac{2a}{b} Sin^2.\tfrac{1}{2}\alpha - \alpha}{\frac{2a}{b} Sin.\tfrac{1}{2}\alpha\, Cos.\tfrac{1}{2}\alpha - 1} \quad . \quad . \quad (6),$$

eene meer naauwkeurige waarde voor ϕ geeft; zoo zal ook

$$\alpha'' = \alpha' - \frac{\frac{2a}{b} Sin^2.\tfrac{1}{2}\alpha' - \alpha'}{\frac{2a}{b} Sin.\tfrac{1}{2}\alpha'\, Cos.\tfrac{1}{2}\alpha' - 1} \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

eene nog juistere waarde voor ϕ geven, en zoo vervolgens.

Om nu voor ϕ eene eerste benaderde waarde α te vinden, stelle men voor een oogenblik, dat de koorde $AB = a$ was, dan zou men, omdat $AD^2 = AB^2 - BD^2$ en $AO^2 = OD^2 + AD^2$ is, hebben

$$(\tfrac{1}{2}x)^2 = a^2 - b^2,$$

en $$r^2 = (r-b)^2 + (\tfrac{1}{2}x)^2 = (r-b)^2 + a^2 - b^2,$$

waaruit $$x = 2\sqrt{(a^2 - b^2)},$$

en $$r = \frac{a^2}{2b},$$

weshalve wij door de vergelijking (3) hebben

$$Sin.\alpha = \frac{2b\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

waardoor dan eene eerste benaderde waarde α voor ϕ wordt gevonden; is nu door (6), (7) *enz.* ϕ naauwkeurig genoeg verder benaderd en dus bekend geworden, dan kan men om x te berekenen uit (2) trekken $r = \frac{b}{1 - Cos.\phi}$, en deze waarde van r in (3) overbrengen, waardoor men vindt

$$x = \frac{2b\,Sin.\phi}{1 - Cos.\phi} = \frac{4b\,Sin.\tfrac{1}{2}\phi\, Cos.\tfrac{1}{2}\phi}{2\,Sin^2.\tfrac{1}{2}\phi} = 2b\,Cot.\tfrac{1}{2}\phi \quad . \quad (9),$$

en hierdoor wordt dan ook x bekend.

Indien, bij voorbeeld, de boog $ABC = 20$ en de pijl $BD = 4$ gegeven is, hebben wij $a = 10$ en $b = 4$; hierdoor vindt men door (8)

$a=47°10'$...of $=0,8232$... in deelen van den straal $=1$,
door (6) $a'=48°44'$...of $=0,8506$...;
door (7) $a''=48°42'$...of $=0,8500$...;
eene opvolgende benadering zou doen zien, dat a''' geene minuut meer van a'' verschilde, en dat men dus, slechts de minuten naauwkeurig begeerende, heeft

$$\phi=48°42',$$

en nu vindt men door (9)

$$x=17,68 \text{ nagenoeg;}$$

ook r kan nu gemakkelijk door de formule

$$r=\frac{b}{1-Cos.\phi}=\frac{b}{2\,Sin^2.\frac{1}{2}\phi}$$

berekend worden.

LXXX. VOORSTEL.

Door J. Schotborgh, Hz.

Men verlangt twee reeksen, eene meetkunstige en eene rekenkunstige te vinden; zoodanig dat de eerste, tweede en vierde term van de eene reeks gelijk zij aan de eerste, tweede en vierde term van de andere; en dat de reden der meetkunstige reeks gelijk zij aan het verschil der rekenkunstige?

Opgelost *door* S. T. Boas, J. Köhler, A. de Mol van Otterloo, M. G. Snoer, A. C. Belinfante, M. L. Goede, D. Hoola van Nooten, C. F. Julius, B. Lubbers, J. Teixeira de Mattos, Bz., L. J. Ulman, H. W. Bloem *en* J. Schotborgh, Hz.

Oplossing *van* S. T. Boas.

Stel voor de beide reeksen

$$x,\quad xy,\quad xy^2,\quad xy^3,\quad enz.$$

en

$$x,\quad x+y,\quad x+2y,\quad x+3y,\quad enz.,$$

dan is hierdoor reeds voldaan aan de voorwaarden, dat de eerste termen gelijk moeten zijn, en dat de reden der meetkunstige gelijk aan het verschil der rekenkunstige reeks zijn moet; de overige voorwaarden geven de vergelijkingen

$$xy=x+y \quad\text{en}\quad xy^3=x+3y,$$

trekt men nu uit de eerste $y=\frac{x}{x-1}$ en brengt deze waarde in de tweede over, dan komt er

$$\frac{x^4}{(x-1)^3} = x + \frac{3x}{x-1},$$

of, door x deelende en met den noemer $(x-1)^3$ vermenigvuldigende,

$$x^3 = (x-1)^3 + 3(x-1)^2;$$

ontwikkelt men nu $(x-1)^3$ en $(x-1)^2$, dan vindt men, na weglating der termen die elkander vernietigen, eenvoudiglijk

$$3x = 2,$$

en wij hebben dus $x = \frac{2}{3}$,

waaruit volgt $y = -2;$

bij gevolg zijn de gevraagde reeksen

$$\tfrac{2}{3},\ -\tfrac{4}{3},\ \tfrac{8}{3},\ -\tfrac{16}{3},\ \textit{enz.}$$

en $\tfrac{2}{3},\ -\tfrac{4}{3},\ -\tfrac{10}{3},\ -\tfrac{16}{3}$, *enz.*

LXXXI. VOORSTEL.

Door J. VAN WIJK, ROELANDSZ.

Het aantal lengte-eenheden begrepen in de zijde van eenen dobbelsteen wordt door twee getalmerken aangeduid; wanneer men de som dezer getalmerken met 864 vermenigvuldigt, verkrijgt men de geheele oppervlakte van den steen; en zoo men het vierkant van die som met 576 vermenigvuldigt, drukt het product den ligchamelijken inhoud des dobbelsteens uit. Men vraagt naar de lengte der zijde? (*)

OPGELOST *door* M. L. GOEDE, J. S. SPEIJER, L. J. ULMAN, J. SCHOTBORGH, HZ., J. VAN WIJK, ROELANDSZ., A. C. BELINFANTE, H. W. BLOEM, S. T. BOAS, M. H. GODEFROI, D. HOOLA VAN NOOTEN, C. F. JULIUS, J. KÖHLER, B. LUBBERS, A. DE MOL VAN OTTERLOO, M. G. SNOER *en* J. TEIXEIRA DE MATTOS, BZ.

OPLOSSING *van* M. L. GOEDE.

Stel de som der getalmerken door x voor, dan heeft men volgens de eerste voorwaarde $864x$ voor de geheele oppervlakte des dobbelsteens, en dus een zesde gedeelte daarvan of $144x$ voor den inhoud van een der zijvlakken, waaruit volgt, dat de zijde van den steen alsdan door $12\sqrt{x}$ wordt uitgedrukt, en deszelfs inhoud door $(12\sqrt{x})^3$ of $1728x\sqrt{x}$; maar volgens de tweede voor-

(*) UYLAKKENS *Exempelbuch*, N°. 393. m.

voorwaarde wordt die inhoud ook uitgedrukt door $576 x^2$, en wij hebben dus de vergelijking

$$576 x^2 = 1728 x \sqrt{x},$$

deelen wij de beide leden dezer vergelijking door $576 x \sqrt{x}$, zoo komt er terstond

$$\sqrt{x} = 3,$$

en wij hebben dus voor de gevraagde zijde

$$12 \sqrt{x} = 36.$$

LXXXII. VOORSTEL.

Door J. S. SPEIJER.

Drie getallen te vinden, als gegeven is derzelver som a, de som van derzelver vierkanten b, en de som van derzelver vierde magten c?

OPGELOST *door* M. H. GODEFROI, L. J. ULMAN, J. SCHOTT-BORGH, Hz, H. W. BLOEM, D. HOOLA VAN NOOTEN, J. KÖHLER, J. S. SPEIJER, A. C. BELINFANTE, M. L. GOBBE. C. B. JULIUS *en* J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz.

OPLOSSING *van* M. H. GODEFROI.

Stel voor de getallen x, y en z, dan zijn gegeven de vergelijkingen

$$x + y + z = a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = b \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$
en
$$x^4 + y^4 + z^4 = c \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3);$$

brengende de vergelijking (1) in het vierkant en vervolgens de vergelijking (2) daar aftrekkende, zal men vinden, na deeling door 2,

$$xy + xz + yz = \frac{a^2 - b}{2} \quad \ldots\ldots \quad (4);$$

uit (2) en (3) vindt men op dezelfde wijze

$$x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2 = \frac{b^2 - c}{2} \quad \ldots\ldots \quad (5);$$

nu wederom de vergelijking (4) in de tweede magt verheffende en alsdan (5) daarvan aftrekkende, vindt men

$$2 x^2 y z + 2 x y^2 z + 2 x y z^2 = \frac{(a^2 - b)^2}{4} - \frac{b^2 - c}{2},$$

of

$$x y z (x + y + z) = \frac{a^4 - 2 a^2 b - b^2 + 2c}{8},$$

en

en de laatste vergelijking door (1) deelende, komt er

$$xyz = \frac{a^4 - 2a^2b - b^2 + 2c}{8a} \quad \ldots \quad (6);$$

volgens (1), (4) en (6) zijn dan nu bekend, de som der getallen, de som van derzelver producten twee aan twee, en derzelver product; stellen wij dus kortheidshalve

$$x+y+z=A;\ xy+xz+yz=B \text{ en } xyz=C,$$

waarin nu $A=a$, $B=\frac{a^2-b}{2}$ en $C=\frac{a^4-2a^2b-b^2+2c}{8a}$

is, dan volgt, uit de wijze waarop de coëfficienten eener hoogere magtsvergelijking van de wortels dier vergelijking afhangen, klaarblijkelijk dat x, y en z de wortels zijn van de vergelijking

$$X^3 - AX^2 + BX - C = 0.$$

Is, bij voorbeeld, gegeven $a=9$, $b=29$ en $c=353$, dan zal men vinden $A=9$, $B=26$ en $C=24$; voor de wortels der vergelijking

$$X^3 - 9X^2 + 26X - 24 = 0,$$

vindt men 2, 3 en 4, en dus zijn 2, 3 en 4 in dit geval de begeerde getallen.

LXXXIII. VOORSTEL.

Door H. VAN BLANKEN.

Een cirkel en eene ellips raken elkander in een punt R; *indien nu gegeven zijn:* 1°. *de uitmiddelpuntigheid der ellips;* 2°. *de hoek dien de voerstralen in het punt* R *met elkander maken;* 3°. *de betrekking tusschen de lijnen, die het middelpunt des cirkels met de beide brandpunten der ellips vereenigen;* en 4°. *de hoek dien de laatstgenoemde lijnen aan het middelpunt des cirkels vormen; zoo vraagt men, den straal des cirkels zoo wel door berekening als door constructie te bepalen?*

OPGELOST *door* H. VAN BLANKEN, D. HOOLA VAN NOOTEN *en* L. J. ULMAN.

OPLOSSING *van* H. VAN BLANKEN.

Laten A en B (*Fig.* 30) de brandpunten zijn van eene ellips, die in het punt R geraakt wordt, door eenen cirkel waarvan O het middelpunt is; en stellen wij voor de gegevens $AB = 2e$, *hoek* $ARB = 2\alpha$, $AO : BO = m : n$ en *hoek* $AOB = 2\beta$; indien wij dan door het punt R de gemeenschappelijke raaklijn ST trek-

trekken, gelijk mede door de punten O en R eene lijn ORU, snijden die lijnen elkander regthoekig, RU zal dus de normaal van het punt R der ellips zijn, en RO de straal die door berekening en constructie bepaald moet worden. Dewijl de hoek der voerstralen door de normaal wordt midden door gedeeld, hebben wij

$$\text{hoek } ARU = \text{hoek } BRU = \alpha,$$

en dus $\text{hoek } ARO = \text{hoek } BRO = 180^\circ - \alpha$ . . . (1);

nu heeft men in de driehoeken ARO en BRO

$$AO : RO = Sin.\,ARO : Sin.\,RAO,$$

en $BO : RO = Sin.\,BRO : Sin.\,RBO,$

omdat volgens (1) $Sin.\,ARO = Sin.\,BRO$ is, volgt, uit de gelijkheid van de middelste termen dezer evenredigheden, dat men heeft

$$AO : BO = Sin.\,RBO : Sin.\,RAO,$$

of $m : n = Sin.\,RBO : Sin.\,RAO,$

dus is ook

$$m+n : m-n = Sin.\,RBO + Sin.\,RAO : Sin.\,RBO - Sin.\,RAO;$$

daar in het algemeen

$$\frac{Sin.\,p + Sin.\,q}{Sin.\,p - Sin.\,q} = \frac{Tang.\,\frac{1}{2}(p+q)}{Tang.\,\frac{1}{2}(p-q)}$$

is, heeft men insgelijks

$$m+n : m-n = Tang.\,\tfrac{1}{2}(RBO+RAO) : Tang.\,\tfrac{1}{2}(RBO-RAO);$$

merken wij nu op, dat

$\text{hoek } RBO + \text{hoek } RAO = \text{hoek } ARB - \text{hoek } AOB = 2\alpha - 2\beta$ }
is, en stellen wij $\text{hoek } RBO - \text{hoek } RAO = 2M$ } (2),

dan verandert de laatste evenredigheid in

$$m+n : m-n = Tang.\,(\alpha - \beta) : Tang.\,M,$$

zoodat alsdan M bekend wordt, door de vergelijking

$$Tang.\,M = \frac{m-n}{m+n}\,Tang.\,(\alpha-\beta) \quad . \; . \; . \; . \quad (3);$$

terwijl vervolgens de verbinding der vergelijkingen (2) geeft

$$\text{hoek } RAO = \alpha - \beta - M \text{ en hoek } RBO = \alpha - \beta + M \quad . \quad (4).$$

Verder heeft men uit den driehoek AOB

$$Sin.\,ABO : Sin.\,BAO = AO : BO = m : n,$$

hieruit volgt weder

$$m+n : m-n = Tang.\,\tfrac{1}{2}(ABO+BAO) : Tang.\,\tfrac{1}{2}(ABO-BAO),$$

 maar

maar $hoek\,ABO + hoek\,BAO = 180^\circ - hoek\,AOB = 180^\circ - 2\beta$
zijnde, en $hoek\,ABO - hoek\,BAO = 2M'$ $\Big\}$ (5)
gesteld wordende, gaat de laatste evenredigheid over in

$$m + n : m - n = Cot.\,\beta : Tang.\,M',$$

weshalve, door de vergelijking

$$Tang.\,M' = \frac{m - n}{m + n}\,Cot.\,\beta \;\ldots\ldots\; (6),$$

M' bekend wordt, waardoor wij dan verder uit (5) hebben

$$hoek\,BAO = 90^\circ - (\beta + M') \text{ en } hoek\,ABO = 90^\circ - (\beta - M') \quad (7).$$

Vervolgens is nog uit den driehoek AOB

$$AO = \frac{AB.\,Sin.\,ABO}{Sin.\,AOB} = \frac{2e.\,Sin.\,ABO}{Sin.\,2\beta}$$

en
$$BO = \frac{AB.\,Sin.\,BAO}{Sin.\,AOB} = \frac{2e.\,Sin.\,BAO}{Sin.\,2\beta},$$

of, voor de hoeken ABO en BAO de waarden stellende in (7) gevonden,

$$AO = \frac{2e.\,Cos.\,(\beta - M')}{Sin.\,2\beta} \text{ en } BO = \frac{2e.\,Cos.\,(\beta + M')}{Sin.\,2\beta}$$

wordende voorts uit de driehoeken ARO en BRO gevonden

$$RO = \frac{AO.\,Sin.\,RAO}{Sin.\,ARO} \text{ en } RO = \frac{BO.\,Sin.\,RBO}{Sin.\,BRO};$$

brengen wij nu hierin de zoo even gevondene waarden voor AO en BO, als mede voor de hoeken derzelver waarden in (1) en (4) gevonden, over, dan verkrijgen wij

$$RO = \frac{2e.\,Cos.\,(\beta - M')\,Sin.\,(\alpha + \beta - M)}{Sin.\,\alpha\,Sin.\,2\beta}$$

$$= \frac{2e.\,Cos.\,(\beta + M')\,Sin.\,(\alpha - \beta + M)}{Sin.\,\alpha\,Sin.\,2\beta} \;\ldots\; (8),$$

en de vergelijkingen (3), (6) en (8) stellen een geschikt stelsel daar, om den begeerden straal uit de gegevens te kunnen berekenen.

Om het Voorstel door constructie op te lossen, beschrijve men den cirkelboog CPD, die de meetkunstige plaats is van de toppunten aller driehoeken, waarvan de dubbelde gegevene uitmiddelpuntigheid AB (*Fig.* 31) de bazis is en waarvan de opstaande zij-

gelden tot elkander in reden zijn als m tot n (*); vervolgens beschrijve men op AB als koorde een cirkelsegment ABQ, dat eenen hoek bevat gelijk aan den gegeven hoek 2β, dan zal het snijpunt der beide alzoo beschreven cirkelboogen klaarblijkelijk het middelpunt O van den in het Voorstel genoemden cirkel zijn; men kan dus alsnu AO en BO trekken, en beschrijft men vervolgens op elk dezer lijnen een cirkelsegment, dat eenen hoek bevat gelijk aan het supplement van de helft des gegeven hoeks 2α, dan is het even duidelijk, dat de boogen dezer cirkelsegmenten elkander in het raakpunt R zullen snijden; de punten O en R alzoo bepaald zijnde, behoeft men den straal RO slechts te trekken.

CONSTRUCTIE *door* D. HOOLA VAN NOOTEN. Wanneer men even als in de vorige constructie het middelpunt O des cirkels (*Fig.* 32) bepaald heeft, beschrijve men op AB een cirkelsegment, dat eenen hoek bevat gelijk aan den gegeven hoek 2α en voltooije dien cirkel aan de andere zijde van AB; nu deele men den boog ANB midden door in N, en trekke de lijn ON, dan zal die lijn den cirkel ANB behalve in N andermaal in R snijden, en dit snijpunt zal het begeerde raakpunt zijn, want de hoek ARB wordt nu door RU midden door gedeeld.

Wanneer men veronderstelt, dat de gegeven hoeken ARB $= 2\alpha$ en AOB $= 2\beta$ beide aan denzelfden kant van de lijn AB liggen, bespeurt men uit de figuur gemakkelijk, dat de cirkel en ellips elkander uit- of inwendig zullen raken, naar gelang 2α grooter of kleiner dan 2β is; maar wanneer de gegevene hoeken ter weder-

(*) Dezen cirkelboog kan men beschrijven volgens J. DE GELDER, *Beginselen der Meetkunst*, 3e. druk, §. 430; ook kan zulks op de volgende wijze geschieden: men plaatse op AB eenen willekeurigen driehoek ABE, welks opstaande zijden AE en BE in reden zijn als $m : n$, men deele den hoek AEB als mede zijnen supplementshoek BEF midden door, dan zullen de deellijnen EC en ED de lijn AB en haar verlengde in twee punten C en D snijden; daarna beschrijve men op CD als middellijn eenen cirkel, dan zal deze de begeerde zijn, zoodat, als men ergens in den omtrek een punt P neemt, en uit dit punt lijnen naar A en B trekt, altijd PA : PB $= m : n$ zijn zal, waar men ook in dien omtrek het punt P mag genomen hebben.

derzelfde van de lijn AB liggen, zal die aanraking altijd inwendig plaats hebben.

Aanmerking *van* J. Badon Ghijben. Zal dit voorstel in den eigenlijken zin mogelijk zijn, dan kunnen de gegevens niet alle geheel willekeurig genomen worden; stellen wij om dit aan te toonen dat $AB = 2e$, de hoek $AOB = 2\beta$ en de betrekking $AO : BO = m : n$ willekeurig zijn genomen, hetwelk altijd kan geschieden, dat voorts uit deze drie gegevens het middelpunt O van den cirkel door de opgegevene constructie is bepaald geworden, en dat men, ook de hoek $ARB = 2\alpha$ willekeurig aangenomen hebbende, de tweede der bovengenoemde constructiën wilde volgen, om het punt R te bepalen, dan zou het kunnen gebeuren, zoo als in *Fig.* 33, dat het tweede snijpunt R′, van de lijn ON met den cirkel ANB, buiten den hoek AOB viel; alsdan zou men in het cirkelsegment ARB, dat den gegeven hoek $ARB = 2\alpha$ bevat, dien hoek niet zoodanig plaatsen kunnen, dat de lijn, die denzelven midden door deelde, door het punt O ging, en het Voorstel zou dus met die gegevens onoplosbaar zijn. De berekening van den straal RO geeft echter voor dien straal, hoe ook α genomen mag zijn, nimmer eene onbestaanbare waarde, en wij zullen dus nagaan of het punt R′, in eenen uitgestrekteren zin, het gevraagde raakpunt zijn kan; beschouwen wij dus R′ als het raakpunt, AR′ en BR′ als de voerstralen en R′U als de normaal, dan zien wij, dat nu niet de som maar het verschil der hoeken ARU en BRU gelijk aan den hoek AR′B is; dat de hoek BR′O, die door de halve boog BR′N gemeten wordt, gelijk is aan de hoek AR′N, die door de halve boog AN wordt gemeten, en alzoo de hoeken AR′O en BR′O niet aan elkander gelijk, maar elkanders supplementen zijn, dat de normaal niet den hoek der voerstralen AR′B, maar deszelfs supplementshoek A′R′B midden door deelt, en dat dus in dit geval R′ het raakpunt is van eene hyperbool, waarvan AB de dubbelde uitmiddelpuntigheid is, met eenen cirkel, die R′O tot straal heeft. De hoek AR′B, dien de voerstralen aan het raakpunt R′ maken, is nu echter nog niet den gegeven hoek $ARB = 2\alpha$, maar deszelfs supplement; doch deelen wij, in plaats van de boog ANB, de boog AN′B in N′ midden door en trekken

wij

wij OH', dan zal deze lijn den cirkel ANB andermaal in een punt R snijden; dit punt R ligt ook buiten den hoek AOB en kan dus wederom tot geene ellips behooren, die eenen cirkel O, tot middelpunt hebbende, aanraakt; hier is wederom het verschil der hoeken ARL en BRL gelijk aan den hoek ARB; alzoo *hoek* ARL = *hoek* BRO is, zoo zijn ook nu weder de hoeken ARO en BRO elkanders supplementshoeken en dus deelt de normaal RL de supplementshoek ARB' der voerstralen midden door, zoodat R het raakpunt is van eenen cirkel, RO tot straal hebbende, met eene andere hyperbool, waarvan A en B de brandpunten zijn; en nu is de hoek der voerstralen werkelijk gelijk aan den gegeven hoek $a\alpha$.

Hoezeer nu voor deze hyperbolen de vergelijking (1)

$$hoek\ ARO = hoek\ BRO$$

niet doorgaat, is echter, omdat deze hoeken elkanders supplementen zijn,

$$Sin.ARO = Sin.BRO,$$

en alleen deze laatste gelijkheid is in de berekenings-oplossing gebezigd; wij hebben dus van de ellips geene andere eigenschap gebruikt, dan deze: *dat de hoeken, die de voerstralen met de normaal maken, gelijke sinussen hebben*; deze eigenschap is letterlijk op de hyperbool toepasselijk, en de oplossing bevat dus de beide gevallen, dat de cirkel of door eene ellips of door eene hyperbool geraakt wordt.

Men ziet uit het voorgaande, dat de gebezigde constructie, hoe ook het punt O ten opzigte van A en B mag gelegen zijn, altijd twee raakpunten R en R' zal geven, en dat er dus in een uitgebreideren zin altijd twee antwoorden op het vraagstuk bestaan. Valt bij de constructie een der punten R of R' binnen de hoeken AOB of aOb (*Fig.* 30), dan zal in dat punt een cirkel, die O tot middelpunt, eene ellips, die A en B tot brandpunten heeft, aanraken; valt daarentegen een der punten R of R binnen de hoeken AOb of aOB, dan zullen in dat punt elkander een cirkel en hyperbool raken, die de genoemde middel- en brandpunten hebben; overigens hangt het alleen van betrekkelijke ligging, die het cirkelsegment ARB en de driehoek AOB volgens de gegevens verkrijgen, af, of men voor beide de antwoorden op het

 vraag-

vangstuk ellipsen, voor beide hyperbolen, dan wel voor het eene eene hyperbool en voor het andere eene ellips zal vinden; worden voor beide de antwoorden ellipsen of voor beide hyperbolen gevonden, dan zullen de hoeken, door de voerstralen gevormd, aan het eene raakpunt den gegeven hoek 2α en aan het andere deszelfs supplement $180^\circ - 2\alpha$ zijn; zoo als bijv. in *Fig.* 33 het geval is; vindt men voor het eene antwoord eene ellips en voor het andere eene hyperbool, dan zullen de hoeken door de voerstralen gevormd, aan beide de raakpunten den gegeven hoek 2α of aan beide deszelfs supplement $180^\circ - 2\alpha$ zijn.

Dewijl de 1ste, 3de en 4de gegevens van het voorstel eigenlijk alleen den driehoek AOB bepalen, zoo kunnen wij volgens het boven aangetoonde het voorstel algemeener dus opgeven: *een driehoek* AOB *gegeven zijnde, vraagt men den straal eens cirkels te vinden, die uit den top* O *als middelpunt beschreven eene ellips of hyperbool aanraakt, die de uiteinden der bazis* A *en* B *tot brandpunten heeft; onder voorwaarde dat de hoek, dien de voerstralen in het raakpunt maken, gelijk zij aan een gegeven hoek indien dat raakpunt boven de bazis, of aan deszelfs supplement indien het beneden de bazis valt.*

Men moet, na de zaak uit dit oogpunt te hebben beschouwd, op het denkbeeld komen, dat de berekening voor den straal RO dan ook twee waarden had moeten geven, hetgeen echter het geval niet is, alzoo de beide uitdrukkingen in (8) voorkomende slechts identiek zijn; iets waarvan men zich ligtelijk zal overtuigen, door dezelve te ontwikkelen, en alsdan in het oog te houden, dat volgens de vergelijkingen (3) en (6)

$$\frac{m-n}{m+n} = \frac{Tang.\,M}{Tang.\,(\alpha-\beta)} = \frac{Tang.\,M'}{Cot.\,\beta},$$

en dus $\quad Tang.\,M = Tang.\,M'\,Tang.\,\beta\,Tang.\,(\alpha-\beta)$

is; de oorzaak, dat wij voor dien straal slechts eene waarde gevonden hebben, is echter alleen daarin te zoeken, dat wij bij de berekening stilzwijgend ondersteld hebben, dat het punt R binnen den driehoek AOB lag; wij zullen om dit te doen zien den straal RO (*Fig.* 33) berekenen en daartoe de vorige berekening op den voet volgen, als wanneer wij vinden

$$hoek\,ARO + hoek\,BRO = 180^\circ,$$

$$hoek\,ARO - hoek\,BRO = hoek\,ARB = 2\alpha, \qquad \text{en}$$

en dus *hoek* ARO $= 90° + \alpha$, *hoek* BRO $= 90° - \alpha$ . . (1′);
voorts blijft onveranderd

$$m+n : m-n = Tang. \tfrac{1}{2}(RBO+RAO) : Tang. \tfrac{1}{2}(RBO-RAO),$$

nu is *hoek* OBA + *hoek* OAB $= 180° -$ *hoek* AOB $= 180° - 2\beta$,
en *hoek* RBA + *hoek* RAB $= 180° -$ *hoek* ARB $= 180° - 2\alpha$,
waaruit door aftrekking volgt

$$\left.\begin{array}{l} hoek\ RBO - hoek\ RAO = 2\alpha - 2\beta, \\ \text{en alsnu}\quad hoek\ RBO + hoek\ RAO = 2M \end{array}\right\} \quad . \; . \; (2')$$

stellende, hebben wij

$$m+n : m-n = Tang.\, M : Tang.\, (\alpha - \beta),$$

of . . . $Tang.\, M = \frac{m+n}{m-n} Tang.\, (\alpha - \beta)$ . . . (3′),

en *hoek* RAO $= \beta - \alpha + M$, *hoek* RBO $= \alpha - \beta + M$ . . (4′);
al het overige der vorige berekening blijft onveranderd; alleen de eindvergelijking gaat, ten gevolge der andere waarden, die wij in (1′) en (4′) voor de hoeken ARO, BRO, RAO en RBO vonden, over in

$$RO = \frac{2e\, Cos.(\beta - M')\, Sin.(\beta - \alpha + M)}{Cos.\, \alpha\, Sin.\, 2\beta}$$

$$= \frac{2e\, Cos.(\beta + M')\, Sin.(\alpha - \beta + M)}{Cos.\, \alpha\, Sin.\, 2\beta} \quad . \; . \; (8'),$$

zoodat nu het stelsel vergelijkingen (3′), (6) en (8′) ter berekening, van den straal RO in *Fig.* 33. gebezigd moet worden. Past men nu op dezelfde gegevens in *Fig.* 33. het eerste stelsel vergelijkingen (3), (6) en (8) toe, dan zal men juist den anderen straal R′O vinden, wij zullen dit nog kortelijk aantoonen. In *Fig.* 33. is namelijk

hoek AR′O + *hoek* BR′O $= 180°$,
hoek AR′O − *hoek* BR′O = *hoek* AR′B $= 180° -$ *hoek* ARB
$= 180° - 2\alpha$,

en dus *hoek* AR′O $= 180° - \alpha$ en *hoek* BR′O $= \alpha$ . . (1″);
nu is ook hier, even als in de eerste oplossing,

$$m : n = Sin.\, R'BO : Sin.\, R'AO,$$

maar wij kunnen hiervoor ook schrijven

$$m : n = Sin.\, Supl.\, R'BO : Sin.\, R'AO,$$

en bij gevolg

$$\frac{m+n}{m-n}=\frac{Tang.\,\tfrac{1}{2}(Suppl.\,R'BO+R'AO)}{Tang.\,\tfrac{1}{2}(Suppl.\,R'BO-R'AO)};$$

hier is verder

hoek R'BO — *hoek* R'AO = *hoek* AR'B + *hoek* AOB = 180° — 2α + β,

waaruit volgt

stellende al nu
$$\left\{\begin{array}{l} Suppl.\,R'BO+R'AO=2\alpha-2\beta; \\ Suppl.\,R'BO-R'AO=2M \end{array}\right\} \quad .\ .\ (2'),$$

zoo vinden wij

$$m+n:m-n=Tang.\,(\alpha-\beta):Tang.\,M,$$

of $$Tang.\,M=\frac{m-n}{m+n}Tang.\,(\alpha-\beta) \quad .\ .\ .\ .\ (3'),$$

en $R'AO=\alpha-\beta-M$, $Suppl.\,R'BO=\alpha-\beta+M$. (4');
de waarden van AO en BO blijven in het tegenwoordige geval onveranderd, zoo als die in de eerste oplossing gevonden zijn, en brengen wij die waarden, zoo mede de waarde der hoeken in (1') en (4') gevonden, over in de uitdrukkingen

$$R'O=\frac{AO\,.\,Sin.\,R'AO}{Sin.\,AR'O} \text{ en } R'O=\frac{BO\,.\,Sin.\,R'BO}{Sin.\,BR'O},$$

dan komt er

$$R'O=\frac{2e\,.\,Cos.\,(\beta-M')\,Sin.\,(\alpha-\beta-M)}{Sin.\,\alpha\ Sin.\,2\beta}$$
$$=\frac{2e\,.\,Cos.\,(\beta+M')\,Sin.\,(\alpha-\beta+M)}{Sin.\,\alpha\ Sin.\,2\beta} \quad .\ .\ (8'),$$

zijnde dezelfde uitdrukking die wij vroeger vonden, zoodat wij ter berekening van den straal R'O (*Fig.* 33) juist hetzelfde stelsel vergelijkingen hebben, als ter berekening van den straal RO (*Fig.* 30).

Men zal zich, door deze berekeningen op andere voorbeelden toe te passen, gemakkelijk overtuigen, dat de stelsels vergelijkingen (3), (6), (8) en (3'), (6), (8') in alle gevallen de beide stralen aangeven, die wij door de opgegevene constructie hebben leeren bepalen; zullende men voor deze stralen naar gelang van hunne ligging positieve of negatieve uitkomsten verkrijgen.

LXXXIV. VOORSTEL.

Door G. GRAAFLAND.

Twee getallen te vinden welker som 13 is; zoodanig dat, als men de

de som hunner vierkanten met de som hunner derde magten vermenigvuldigt, het product 56693 zijn.

OPGELOST *door* A. C. BELINFANTE, H. W. BLOEM, M. H. GODEFROI, M. L. GOEDE, C. F. JULIUS, B. LUBBERS, A. DE MOL VAN OTTERLOO, C. VAN SCHAICK, J. SCHOTBORGH, Hz., M. G. SNOEK, L. J. ULMAN, J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz., S. T. BOAS, G. GRAAFLAND, D. HOOLA VAN NOOTEN, J. KÖHLER *en* J. S. SPEIJER.

OPLOSSING *van* A. C. BELINFANTE.

Stel voor de getallen x en y, dan hebben wij volgens het voorstel de vergelijkingen

$$x+y=13,$$

en $$(x^2+y^2)(x^3+y^3)=56693;$$

deelen wij nu de laatste vergelijking door de eerste, dan komt er

$$(x^2+y^2)(x^2-xy+y^2)=4361,$$

daar voorts uit het vierkant der eerste vergelijking terstond gevonden wordt $x^2+y^2=169-2xy$ en $x^2-xy+y^2=169-3xy$, zoo hebben wij ook

$$(169-2xy)(169-3xy)=4361,$$

dat is $$28561-845xy+6x^2y^2=4361,$$

of $$6x^2y^2-845xy=-24200,$$

en $$x^2y^2-\tfrac{845}{6}xy=-\tfrac{12100}{3},$$

uit welke vierkantsvergelijking wij vinden

$$xy=40 \text{ en } xy=100\tfrac{5}{6};$$

brengen wij nu de vergelijking $x+y=13$ in het vierkant en trekken er het viervoud der vergelijking $xy=40$ af, dan komt er

$$(x-y)^2=9 \text{ of } x-y=\pm 3;$$

deze waarden van $x-y$ in verband brengende met die van $x+y$, hebben wij

$$x=8 \text{ en } y=5 \text{ of } x=5 \text{ en } y=8;$$

wilde men op gelijke wijze de waarden van x en y uit de vergelijkingen

$$x+y=13 \text{ en } xy=100\tfrac{5}{6}$$

bepalen, zoo zoude men onbestaanbare uitdrukkingen verkrijgen, en de gevraagde getallen zijn dus alleen 5 en 8.

LXXXV. VOORSTEL.

Door L. J. ULMANN. (*)

Wanneer zich, uit den top van eenen regten cirkelvormigen kegel, een beweegbaar punt langs de ſchuinſche zijde van dien kegel gelijkmatig benedenwaarts beweegt, te gelijker tijd dat die ſchuinſche zijde met eene gelijkmatige beweging over het oppervlak des kegels wordt rondgevoerd, zoodanig dat de ſchuinſche zijde eene geheele omwenteling om den as maakt, in denzelfden tijd dat het punt de geheele ſchuinſche zijde doorloopt; dan zal dat punt op het ronde oppervlak des kegels eene ſpiraalvormige lijn van dubbele kromming beſchrijven. Men vraagt te bewijzen, dat deze kromme lijn het ronde oppervlak des kegels in twee deelen verdeelt, die tot elkander in reden zijn als 1 tot 2?

Opgelost door D. HOOLA VAN NOOTEN en L. J. ULMANN.

OPLOSSING van D. HOOLA VAN NOOTEN.

Indien wij het ronde oppervlak van den kegel ontwikkelen, verkrijgen wij eenen cirkelſector PAB (*Fig.* 94) en de in het voorſtel bedoelde ſpiraalvormige lijn zal alsdan eene vlakke kromme lijn zijn, in dien ſector beſchreven door het punt P, dat van P naar A langs de lijn PA zich beweegt, onderwijl dat de lijn PA om het punt P draaijende den hoek APB doorloopt; heeft de lijn PA den geheelen hoek APB doorloopen en dus den ſtand PB aangenomen, dan zal het beweegbare punt de geheele bewegende lijn afgeloopen hebben, en alzoo in B zijn gekomen, weshalve B een punt van de kromme lijn is. Uit hoofde van de gelijkmatigheid der bewegingen, moeten de ruimten, die de bewegende lijn PA doorloopen heeft, altijd evenredig zijn met de gedeelten van die bewegende lijn door het beweegbare punt afgelegd; ſtellen wij dus dat, als de lijn PA in den ſtand PA′ gekomen is, het beweegbare punt zich in P′ bevindt en dus P′ een punt der kromme lijn is, dan is

$$\text{hoek } APA' : \text{hoek } APB = PP' : PB.$$

Ne-

(*) Namens den opgever wordt alhier aangewezen, dat dit Voorſtel door Zijn Ed. is ontleend, uit een ander van het geachte medelid den Heer HUGUENIN, voorkomende in het I *Deel dezer Verzameling*, bladz. 11.

Nemen wij nu P als pool, PA als oorsprong der hoeken en PP′ als polaire ordinaat aan, dan is, als wij *hoek* APB $= \alpha$, PA $=$ PB $= r$, *hoek* APA′ $= \phi$ en PP′ $= z$ stellen,

$$\phi : \alpha = z : r,$$

weshalve

$$z = \frac{r\phi}{\alpha}$$

de polaire vergelijking der kromme lijn PP′B is; de inhoud van eenen polairen sector dier kromme lijn vinden wij, door de bovenstaande waarde van z in de algemeene formule

$$I = \tfrac{1}{2}\int z^2 \partial\phi$$

over te brengen en dezelve daarna te integreren, waardoor wij verkrijgen

$$I = \tfrac{1}{2}\int z^2 \partial\phi = \tfrac{1}{2}\int \frac{r^2\phi^2}{\alpha^2}\partial\phi = \frac{r^2\phi^3}{6\alpha^2} + C;$$

voor den polairen sector PP′B moet deze integraal tusschen de grenzen $\phi = 0$ en $\phi = \alpha$ genomen worden, en wij vinden alzoo

$$Inh.\ PP'B = \tfrac{1}{6} r^2 \alpha;$$

daar wij nu, zoo als bekend is, voor den inhoud van den geheelen cirkelsector hebben

$$Inh.\ PAB = \tfrac{1}{2} r^2 \alpha,$$

zoo volgt hieruit

$$Inh.\ PP'B = \tfrac{1}{3}\, Inh.\ PAB,$$

en

$$Inh.\ PABP' = \tfrac{2}{3}\, Inh.\ PAB,$$

waardoor de stelling bewezen is.

LXXXVI. VOORSTEL.

Door N. J. BAARENDS.

Men vraagt naar de zijden van eenen regthoekigen driehoek, indien de som der zijden 30 lengte-eenheden, en de som van de vierkanten der zijden 338 vierkante eenheden bevat?

OPGELOST *door* N. J. BAARENDS, A. C. BEIJNPANTE, H. W. BLOEM, E. BOAS, S. T. BOAS, J. J. GEFKEN, M. L. GOEDE, G. GRAAFLAND, D. HOOLA VAN NOOTEN, C. F. JULIUS, J. KÖHLER, B. LUBBERS, A. DE MOL VAN OTTERLOO, G. VAN SCHAICK, J. SCHOTBORGH, Hz., M. G. SNOEK, J. S. SPEIJER, J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz., L. J. ULMAN en J. WARNSINCK.

OPLOSSING *van* N. J. BAARENDS.

Stel

Stel de regthoekszijden door x en y en de schuinsche zijde door z voor, dan is volgens de opgaaf

$$x + y + z = 30 \quad \ldots\ldots (1),$$

en

$$x^2 + y^2 + z^2 = 338 \quad \ldots\ldots (2);$$

terwijl de eigenschap des regthoekigen driehoeks geeft

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \ldots\ldots (3);$$

de laatste vergelijking in de tweede overbrengende, heeft men terstond

$$2z^2 = 338,$$

waaruit volgt

$$z^2 = 169,$$

en

$$z = 13,$$

deze waarde van z in de vergelijkingen (1) en (2) overgebragt zijnde, verkrijgt men

$$x + y = 17 \quad \ldots\ldots (4),$$

en

$$x^2 + y^2 = 169 \quad \ldots\ldots (5);$$

het vierkant van (4) met (5) verminderende, komt er

$$2xy = 120,$$

en dit van (5) aftrekkende,

$$x^2 - 2xy + y^2 = 49,$$

waaruit volgt

$$x - y = 7;$$

deze laatste vergelijking bij (4) optellende en daarvan aftrekkende, vindt men

$$2x = 24 \text{ en } 2y = 10,$$

en derhalve

$$x = 12 \text{ en } y = 5,$$

zoodat 13, 12 en 5 de gevraagde zijden des regthoekigen driehoeks zijn.

LXXXVII. VOORSTEL.

Door B. G. VAN KELL.

Van eene harmonische reeks, van drie termen, is de tweede term een trigonaal en de derde een pronik, welker wortels gelijk zijn aan den eersten term; welke is deze reeks?

OPGELOST *door* B. LUBBERS, A. C. BELINFANTE, H. W. BLOEM, E. BOAS, S. T. BOAS, J. J. GEFKEN, M. L. GOEDE, G. GRAAFLAND, D. HOOLA VAN NOOTEN, C. F. JULIUS, B. G. VAN KELL, J. KÖHLER, A. DE MOL VAN OTTERLOO, J. SCHOTBORGH, Hz., M. G. SNOER, J. S. SPEIJER, J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz. en L. J. ULMAN.

Op-

OPLOSSING van B. LUBBERS.

De eerste term der gevraagde reeks door x voorstellende, is volgens de opgave de tweede term $\frac{1}{2}(x^2+x)$ en de derde x^2+x; dus moeten

$$x, \quad \tfrac{1}{2}(x^2+x) \quad \text{en} \quad x^2+x,$$

harmonisch evenredig zijn; en dus ook, wanneer wij al de termen door $\frac{1}{2}x$ deelen,

$$2, \quad x+1 \quad \text{en} \quad 2x+2;$$

daar nu de eigenschap der harmonische reeksen vordert, dat de middelste term gelijk moet zijn aan het dubbelde product der beide uitersten, gedeeld door de som der uitersten, zoo hebben wij

$$x+1 = \frac{2\times 2\times(2x+2)}{2+2x+2} = \frac{8(x+1)}{2x+4} = \frac{4(x+1)}{x+2};$$

en hieruit volgt, omdat uit den aard der zaak $x+1$ niet gelijk nul zijn kan,

$$x+2=4 \quad \text{of} \quad x=2,$$

weshalve de bedoelde reeks is

$$2, \quad 3, \quad 6.$$

LXXXVIII. VOORSTEL.

Door J. VAN WIJK, ROELANDSZ.

Indien men het product der jaren van twee personen met de som van derzelver vierkanten te zamen telt, komt er 1087; *en wanneer men het product van de derde magten der jaren bij de som van derzelver vierde magten voegt, komt er* 45777295; *men vraagt naar de jaren van elk?* (*)

OPGELOST door G. GRAAFLAND, C. F. JULIUS, L. J. ULMAN, J. VAN WIJK, ROELANDSZ., A. C. BELINFANTE, H. W. BLOEM, E. BOAS, D. HOOLA VAN NOOTEN, J. KÖHLER, B. LUBBERS, A. DE MOL VAN OTTERLOO, J. SCHOTBORGH, Hz., M. G. SNOER, J. S. SPEIJER, J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz. en M. LA GORDE.

OPLOSSING van G. GRAAFLAND.

Stel de jaren der beide personen door x en y voor, dan geeft het voorstel terstond de vergelijkingen

$xy+$

(*) UFLAKKERS, *Exempelboek*, n°. 393. h.

$xy + x^2 + y^2 = 1087$ of $x^2 + y^2 = 1087 - xy$. (1)
en $x^2y^2 + x^4 + y^4 = 45777295$ of $x^4 + y^4 = 45777295 - x^2y^2$ (2);
brengt men nu de vergelijking (1) in het vierkant en trekt men vervolgens de vergelijking (2) daarvan af, dan komt er, na verplaatsing der termen,

$$x^3y^3 - x^2y^2 - 2174\,xy + 44595726 = 0 \quad . \quad (3),$$

eene derdemagtsvergelijking, waarvan de wortel xy een deeler van het getal 44595726 moet zijn; verder volgt uit (2)

$$x^2y^2 < 45777295 \text{ en dus } xy < 358,$$

en uit (3) $x^3y^3 > 44595726$ en dus $xy > 354$;
dewijl wij dus weten dat xy een deeler van 44595726 tusschen 354 en 358 moet zijn, vinden wij, door de deelers van 44595726 na te speuren, dat $xy = 357$ is, en dat de beide andere wortels der vergelijking (3) onbestaanbaar zijn; tellen wij nu $xy = 357$ bij de vergelijking (1) op, en trekken wij $3\,xy = 1071$ van dezelfde vergelijking af, dan verkrijgen wij

$$x^2 + 2\,xy + y^2 = 1444 \text{ en } x^2 - 2\,xy + y^2 = 16,$$

waaruit volgt

$$x + y = 38 \text{ en } x - y = 4,$$

weshalve $x = 21$ en $y = 17$ is.

LXXXIX. VOORSTEL.

Door J. Bassan.

Eene rekenkunstige reeks van drie termen te vinden, die de volgende eigenschappen heeft: 1°. het product van de eerste en tweede termen, twee maal het product van de eerste en derde termen, en drie maal het product van de tweede en derde termen stellen eene meetkunstige reeks daar; en 2°. de som der beide genoemde reeksen is een volkomen vierkant?

Opgelost *door* J. S. Speijer, B. Lubbers, J. Bassan, A. G. Belinfante, H. W. Bloem, E. Boas, S. T. Boas, M. L. Goede, D. Hoola van Nooten, C. F. Julius, J. Köhler, A. de Mol van Otterloo, J. Schotborgh, Hz., M. O. Snoek, J. Teixeira de Mattos, Bz. en L. J. Ulman.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Stellen wij de rekenkunstige reeks voor door

$$x - y, \quad x \text{ en } x + y,$$

dan zal $x(x-y)$, $2(x-y)(x+y)$ en $3\,x(x+y)$

eene

eene meetkunstige reeks moeten zijn, en bij gevolg

$$3x^2(x-y)(x+y)=4(x-y)^2(x+y)^2;$$

deze laatste vergelijking mogen wij, omdat in den eigenlijken zin des voorstels $x-y$ en $x+y$ geen van beiden gelijk nul zijn kunnen, door $(x-y)(x+y)$ deelen, waardoor wij verkrijgen

$$3x^2=4(x-y)(x+y)=4x^2-4y^2,$$

of

$$x^2=4y^2,$$

waaruit volgt $x=2y$ of $x=-2y$.

Begeert men nu de reeks in positieve getallen te hebben, zoo kan de laatste waarde van x niet dienen, wij nemen dus $x=2y$, dan is de rekenkunstige reeks

$$y,\ 2y,\ 3y,$$

en de meetkunstige

$$2y^2,\ 6y^2,\ 18y^2,$$

en wij moeten nog slechts de som dezer beide reeksen $26y^2+6y$ tot een volkomen vierkant maken; stellen wij hiertoe

$$26y^2+6y=p^2y^2,$$

dan volgt hieruit

$$y=\frac{6}{p^2-26},$$

waarin men voor p alle mogelijke waarden nemen kan, mits slechts $p^2>26$ zij, omdat anders y negatief zoude worden; voor $p=6$ vindt men $y=\frac{3}{5}$ en de reeks is alsdan

$$\tfrac{3}{5},\ \tfrac{6}{5}\ \text{en}\ \tfrac{9}{5}.$$

AANMERKING van B. LUBBERS. Voor p eenig geheel getal nemende, zal y altijd eene breuk blijven; niets belet ons echter, om voor p eene breuk te nemen, want in allen gevalle zal

$$26y^2+6y=p^2y^2$$

een volkomen vierkant blijven; stellen wij derhalve $p=5,1$, zoo wordt $y=600$ en de reeks

$$600,\ 1200,\ 1800,$$

voldoet bij gevolg in geheele getallen aan de Voorwaarden des Voorstels.

XC. VOORSTEL.

Door M. H. GODEFROI.

Men verlangt x en y zoodanig te bepalen, dat $x^3+x^2y^2$ en $y^3+x^2y^2$ volkomen vierkanten worden?

Op-

Opgelost *door* L. J. Ulman, B. Lubbers, A. C. Belinfante, H. W. Bloem, M. H. Godefroi, M. L. Gobde, D. Hoola van Nooten, C. F. Julius, J. Köhler, A. de Mol van Otterloo, J. Schotborgh, Hz., M. G. Snoer, J. Teixeira de Mattos, Bz. *en* E. Boas.

I. Oplossing *van* L. J. Ulman.

Daar de opgegevene vormen ieder door een vierkant deelbaar zijn, namelijk de eerste door x^2 en de tweede door y^2; zoo wordt de vraag terug gebragt tot de volgende: *om x en y zoodanig te bepalen dat $x+y^2$ en $y+x^2$ volkomen vierkanten worden?* Men stelle te dien einde de wortels der laatstgenoemde vormen door $y+q$ en $x+p$ voor, zoodat men hebbe

$$x+y^2=y^2+2qy+q^2 \text{ en } y+x^2=x^2+2xp+p^2,$$

dan trekt men uit deze vergelijkingen

$$x=2qy+q^2 \text{ en } x=\frac{y-p^2}{2p};$$

deze waarden van x aan elkander gelijk stellende, vindt men

$$4pqy+2pq^2=y-p^2,$$

waaruit men terstond trekt

$$y=\frac{2pq^2+p^2}{1-4pq};$$

neemt men nu voor p en q willekeurige waarden, dan zullen de overeenkomstige waarden, die men voor x en y vindt, aan de vraag beantwoorden; verlangt men alleen positieve getallen, zoo zal men p en q zoo moeten nemen, dat $4pq<1$ worde; voor $p=\frac{1}{2}$ en $q=\frac{1}{4}$, vindt men $y=\frac{5}{8}$ en $x=\frac{3}{8}$.

II. Oplossing *door* B. Lübbers.

Om $x+y^2$ en x^2+y tot volkomen vierkanten te maken, stelle men dat $x+\frac{y}{n}$ de wortel van x^2+y zij, dan is

$$x^2+y=x^2+\frac{2xy}{n}+\frac{y^2}{n^2},$$

waaruit men vindt $y=n^2-2nx$;

hierdoor wordt

$$x+y^2=x+n^4-4n^3x+4n^2x^2,$$

en

en daar ook deze vorm een volkomen vierkant zijn moet, stellen wij dat n^2+2nx de wortel daarvan zij, dan is

$$x+n^4-4n^3x+4n^2x^2=n^4-4n^3x+4n^2x^2,$$

of

$$x=8n^3x;$$

deze vergelijking door $8x$ deelende, komt er

$$\tfrac{1}{8}=n^3,$$

waaruit volgt

$$n=\tfrac{1}{2};$$

deze waarde van n overbrengende in

$$y=n^2-2nx,$$

verkrijgt men

$$y=\tfrac{1}{4}-x;$$

om de opgegevene vormen tot vierkanten te maken, behoeft men dus in dezelve slechts $y=\frac{1}{4}-x$, of, dat hetzelfde is, $x+y=\frac{1}{4}$ te nemen; substitueert men dan ook in die vormen $y=\frac{1}{4}-x$, zoo vindt men

$$x^3+x^2y^2=x^4+\tfrac{1}{2}x^3+\tfrac{1}{16}x^2=(x^2+\tfrac{1}{4}x)^2,$$

en

$$y^3+x^2y^2=x^4-\tfrac{1}{2}x^3+\tfrac{13}{16}x^2-\tfrac{3}{16}x+\tfrac{1}{64}=(x^2-\tfrac{1}{4}x+\tfrac{1}{8})^2.$$

XCI. VOORSTEL.

Door M. H. GODEFROI.

Eene meetkunstige reeks van drie termen te vinden, zoodanig dat het product dier termen 216, en de som van derzelver vierkanten 189 zij?

OPGELOST *door* M. H. GODEFROI, A. C. BELINFANTE, H. W. BLOEM, E. BOAS, S. T. BOAS, J. J. GEFKEN, M. H. GOEDE, G. GRAAFLAND, D. HOOLA VAN NOOTEN, C. F. JULIUS, J. KÖHLER, B. LUBBERS, A. DE MOL VAN OTTERLOO, C. VAN SCHAICK, J. SCHOTBORGH, Hz, M. G. SNOEK, J. S. SPRUIJT, J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz. *en* L. J. ULMAN.

OPLOSSING *van* M. H. GODEFROI.

Laat de meetkunstige reeks worden voorgesteld door

$$x,\ xy \text{ en } xy^2;$$

dan geeft het voorstel terstond de vergelijkingen

$$x^2+x^2y^2+x^2y^4=189,$$

en

$$x^3y^3=216;$$

uit de laatste vergelijking volgt onmiddellijk

$$xy=6,$$

brengen wij deze waarde voor xy in de eerste vergelijking over, dan komt er

 x^2+

$$x^2 + 36y^2 = 153,$$

hier nu $12xy = 72$ bij tellende en aftrekkende, verkrijgen wij

$$x^2 + 12xy + 36y^2 = 225 \text{ en } x^2 - 12xy + 36y^2 = 81,$$

en uit deze vergelijkingen de vierkantswortels nemende

$$x + 6y = \pm 15 \text{ en } x - 6y = \pm 9;$$

deze beide laatste vergelijkingen bij elkander optellende en van elkander aftrekkende, vindt men gemakkelijk

$$x = 12 \text{ en } y = \tfrac{1}{2},$$

of $$x = 3 \text{ en } y = 2,$$

of $$x = -3 \text{ en } y = -2,$$

of $$x = -12 \text{ en } y = -\tfrac{1}{2};$$

zoodat de gevraagde reeks is

12, 6, 3; of 3, 6, 12; of −3, +6, −12; of −12, +6, −3.

XCII. VOORSTEL.

Door F. van Heukelom, Jr.

Twee getallen te vinden, waarvan het kleinste een vierkant is, welks wortel gelijk is aan het verschil der getallen, en zoodanig, dat hun product tot de som hunner vierkanten staat, als 2430 *tot* 4887?

Opgelost *door* C. van Schaick, A. C. Belinfante, H. W. Bloem, E. Boas, S. T. Boas, M. L. Goede, G. Graafland, F. van Heukelom, Jr., D. Hoola van Nooten, C. F. Julius, J. Köhler, B. Lubbers, A. de Mol van Otterloo, J. Schotborgh, Hz., M. G. Snoek, J. S. Speijer, J. Teixeira de Mattos, Bz., L. J. Ulman *en* J. J. Gefken.

Oplossing *van* C. van Schaick.

Stel voor de getallen $x+y$ en $x-y$, dan is $x-y$ klaarblijkelijk het kleinste; en wij hebben, uit de opgaaf, de vergelijking

$$\sqrt{(x-y)} = 2y,$$

of $$x - y = 4y^2;$$

en de evenredigheid

$$x^2 - y^2 : 2x^2 + 2y^2 = 2430 : 4887;$$

de achterste termen dezer evenredigheid door 27 deelbaar zijnde, is ook

$$x^2 - y^2 : 2x^2 + 2y^2 = 90 : 181,$$

de gelijkheid van de producten der uiterste en middelste termen geeft

$$181x^2 - 181y^2 = 180x^2 + 180y^2,$$

of $$x^2 = 361y^2,$$

waaruit volgt $$x = \pm 19y;$$

het negatieve teeken gebruikende, zou de wortel uit het kleinste getal onbestaanbaar worden, ten minste zoo lang men y als positief beschouwt, hetgeen vereischt wordt, opdat $x-y$ kleiner dan $x+y$ zij; wij nemen dus alleen $x=19y$, en brengen dit in de vergelijking

$$x - y = 4y^2$$

over, dan komt er $$18y = 4y^2,$$

waaruit volgt $$y = 4\tfrac{1}{2};$$

en dus is $$x = 19y = 85\tfrac{1}{2};$$

bij gevolg zijn de gevraagde getallen

$$x+y = 90 \text{ en } x-y = 81.$$

XCIII. Voorstel.

Door F. van Heukelom, Jr.

Men vraagt naar de zijden van eenen regthoekigen driehoek, welks omtrek 112 *lengte-eenheden, en welks inhoud* 336 *vierkante eenheden bevat?*

Opgelost *door* J. Köhler, A. C. Belinfante, E. Boas, S. T. Boas, M. L. Goede, J. J. Gefken, G. Graafland, F. van Heukelom, Jr., D. Hoola van Nooten, C. F. Julius, B. Lubbers, A. de Mol van Otterloo, C. van Schaick, J. Schotborgh, Hz., M. G. Snoer, J. S. Speijer, J. Teixeira de Mattos, Bz., L. J. Ulman, I. Warnsinck *en* H. W. Bloem.

Oplossing *van* J. Köhler.

Laat de beide regthoekszijden door $x+y$ en $x-y$ worden voorgesteld, dan is de hypothenusa $112-2x$; en nu heeft men door de tweede voorwaarde des voorstels en door de bekende eigenschap der regthoekige driehoeken

$$\tfrac{1}{2}(x+y)(x-y) = 336 \text{ en } (x+y)^2 + (x-y)^2 = (112-2x)^2,$$

of $$\tfrac{1}{2}(x^2-y^2) = 336 \text{ en } 2x^2 + 2y^2 = 12544 - 448x + 4x^2,$$

of $$x^2 - y^2 = 672 \text{ en } y^2 = x^2 - 224x + 6272;$$

telt men nu deze beide vergelijkingen bij elkander op, dan komt er, na verschikking der termen,

$$224x = 6944,$$

waaruit volgt $$x = 31;$$

 des

deze waarde voor x in de vergelijking $x^2 - y^2 = 672$ substitueerende, vindt men

$$y^2 = 289,$$

waaruit volgt $y = 17$;

de regthoekszijden zijn dus

$$x + y = 48,$$
$$x - y = 14,$$

en de hypothenusa is $112 - 2x = 50$.

XCIV. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

A *koopt van* B *en* C *eijeren, van elk voor eene gelijke som gelds, doch tegen eenen ongelijken prijs per stuk; hij verkoopt de eene helft zijner eijeren weder voor den prijs door* B, *en de andere helft voor den prijs door* C *bedongen; hierdoor wint hij* $\frac{1}{n}$ *gedeelte van zijn uitgeschoten geld; nu vraagt men naar alle de geheele getallen waarden, die* n *kan hebben, alsmede naar de betrekkelijke duurte der van* B *en* C *gekochte eijeren?*

OPGELOST *door* J. BADON GHIJBEN, D. HOOLA VAN NOOTEN, J. KÖHLER, B. LUBBERS, A. DE MOL VAN OTTERLOO, J. SCHOTBORGH, Hz. *en* H. W. BLOEM.

OPLOSSING *van* J. BADON GHYBEN.

Stel dat A van B koopt x eijeren tegen pm centen het stuk,
en „ „ „ C „ xm „ „ p „ „ „,
dan is voldaan aan de voorwaarde, dat hij van elk voor evenveel geld, namelijk voor xpm centen, koopt en zijne geheele uitgaaf is dus $2xpm$ centen, waarvoor hij verkrijgt $x + xm$ eijeren; nu verkoopt hij de helft dezer eijeren of $\frac{1}{2}(x + xm)$ tegen pm, en evenveel tegen p centen het stuk, hij ontvangt dus

$$\tfrac{1}{2}(x + xm)(pm + p) = \tfrac{1}{2}xp(m + 1)^2,$$

de winst is alzoo $\frac{1}{2}xp(m + 1)^2 - 2xpm$;

deze moet gelijk zijn aan $\frac{1}{n}$ gedeelte van het uitgeschoten geld, dat is, aan $\frac{2xpm}{n}$, wij hebben alzoo de vergelijking

$$\tfrac{1}{2}xp(m + 1)^2 - 2xpm = \frac{2xpm}{n},$$

wel-

welke vergelijking, door xp gedeeld en met n vermenigvuldigd wordende, verandert in

$$(m+1)^2-4m=\frac{4m}{n},$$

of in

$$(m-1)^2=\frac{4m}{n},$$

waaruit volgt

$$n=\frac{4m}{(m-1)^2}\quad\ldots\ldots\ldots\ (A);$$

men kan dus voor m alle waarden nemen, die n tot een geheel getal maken, en dus zou men voor n elk willekeurig getal kunnen nemen, om vervolgens door de vergelijking (A) eene overeenkomstige waarde voor m te bepalen, want dan zou deze waarde voor m een geheel getal voor n geven; daar echter m uit den aard der zaak meetbaar zijn moet, kunnen wij voor n alleen die geheele getallen nemen, die m meetbaar maken; losfen wij nu m uit de vergelijking (A) op, dan vinden wij

$$m=\frac{1}{n}\{n+2\pm2\sqrt{(n+1)}\}\quad\ldots\ (B);$$

hieruit blijkt, dat men voor m alleen eene meetbare waarde zal vinden, ingeval men voor n een getal neemt, dat eene eenheid minder dan een volkomen vierkant is; en dat alzoo al de waarden, in geheele getallen, die n in ons voorstel hebben kan, begrepen zijn in den vorm a^2-1.

Stellen wij in de vergelijking (B) $n=a^2-1$, dan geeft dezelve

$$m=\frac{a^2\pm2a+1}{a^2-1}=\frac{(a+1)^2}{a^2-1}\text{ of }\frac{(a-1)^2}{a^2-1}=\frac{a+1}{a-1}\text{ of }\frac{a-1}{a+1},$$

en daar nu m de gevraagde betrekkelijke duurte der eijeren voorstelt, is hierdoor ook het tweede gedeelte der vraag beantwoord.

XCV. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS:

"*Wanneer de drie zijden van eenen regthoekigen driehoek bepaaldelijk door geheele getallen moeten worden uitgedrukt, vraagt men, voor eene gegevene kortste regthoekszijde, de beide andere zijden zoodanig te bepalen, dat de inhoud des driehoeks zoo groot mogelijk worde?*

Opgelost door L. J. Ulman, C. F. Julius, B. Lubbers en J. Schotborgh, Hz.

Oplossing van L. J. Ulman.

Laat de gegevene regthoekszijde door a,
de gevraagde regthoekszijde door x
en de hypothenusa door $x+p$
voorgesteld worden, dan is

$$a^2+x^2=x^2+2px+p^2,$$

waaruit volgt $x=\frac{a^2-p^2}{2p}$;

voorts is het klaar, dat, om met eene standvastige regthoekszijde a den grootst mogelijken inhoud te verkrijgen, de andere regthoekszijde x zoo groot als mogelijk moet genomen worden; om hieraan te voldoen, moet, volgens de uitgebragte vergelijking, p zoo klein mogelijk genomen worden, en dewijl p het verschil voorstelt tusschen de hypothenusa en de langste regthoekszijde, kan men voor p slechts een geheel positief getal nemen.

Is nu a oneven, dan is het terstond voldoende $p=1$ te nemen, waardoor men verkrijgt

$$x=\frac{a^2-1}{2};$$

doch is a even, dan zou $p=1$ een gebroken voor x geven; in dat geval nemen wij dus $p=2$ en dan is $x=\frac{a^2-4}{4}$.

Gegeven zijnde $a=15$ zou men hebben $x=112$ en $\sqrt{(a^2+x^2)}=113$,
» » $a=20$ » » » $x=99$ en $\sqrt{(a^2+x^2)}=101$.

Aanmerking. Indien $a=1$, $a=2$ of $a=4$ gegeven werd, zou het onmogelijk zijn aan de vraag te voldoen.

XCVI. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Een regte cirkelvormige kegel wordt gesneden 1°. door een vlak dat, evenwijdig aan het grondvlak, de hoogte des kegels middendoor deelt; en 2°. door een vlak, dat beneden den top ingaat en boven het grondvlak uitkomt, derwijze, dat de groote as der ellips, door deze snede voortgebragt, gelijk is aan de hoogte des kegels, en dat de beide uiteinden dier groote as ter wederzijde even ver van het eerstgenoemde vlak afstaan. Nu vraagt men de betrekking te vin-

vinden tusschen de inhouden van den cirkel en van de ellips, volgens welke de beide genoemde vlakken den kegel snijden?

OPGELOST *door* L. J. ULMAN, B. LUBBERS, J. BASSAN *en* L. WARNSINCK.

OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

Zij ABC (*Fig.* 35) eene driehoekige doorsnede des kegels en CD de loodlijn, die uit deszelfs top op het grondvlak valt; laat de lijn EF, evenwijdig aan AB, de loodlijn CD in G midden door deelen, en HI zoodanig getrokken zijn, dat zij gelijk aan CD is en door EF insgelijks midden door gedeeld wordt, indien men zich dan vlakken EKFL en HKIL voorstelt, loodregt op het vlak des driehoeks ABC staande, en hetzelve volgens de lijnen EF en HI snijdende, zullen dit de snijdende vlakken zijn, in de opgaaf des voorstels bepaald; vooreerst is het klaar, dat het vlak EKFL alsdan evenwijdig aan het grondvlak zal zijn, en de hoogte des kegels midden door zal deelen; en ten andere, dat HI, gelijk CD genomen, de groote as zijn zal van de ellips, volgens welke het vlak HKIL den kegel snijdt; terwijl de uiteinden H en I van die as, even ver van de lijn EF, en dus ook van het vlak EKFL, afstaan, omdat HI door EF midden door wordt gedeeld en dus HM $=$ MI is. De gemeene doorsnede LK dier beide vlakken staat noodwendig loodregt op het vlak ABC en dus ook op de lijnen EF en HI; derhalve is LK vooreerst eene koorde van den cirkel EKFL, loodregt door de middellijn EF gaande; en ten tweede is LK de kleine as der ellips HKIL, omdat zij regthoekig door het midden M der groote as HI gaat; het punt M is dan ook het middelpunt van die ellips.

Laat nu de hoogte des kegels door $2h$ en de straal van deszelfs grondvlak door $2r$ voorgesteld worden, dan is CG$=$GD$=$HM$=$MI$=h$, AD$=$BD$=$EF$=2r$, EG$=$GF$=r$; stellen wij verder de kleine as der ellips door $2x$ voor, dan is KM$=$LM$=x$, en nu hebben wij

$$Inh.\ Ellips.\ HKIL = \pi \times HM \times KM = \pi h x,$$
$$Inh.\ Cirkel.\ EKFL = \pi \times EG^2 = \pi r^2,$$

waaruit volgt

$$Inh.\ Ellips.\ HKIL : Inh.\ Cirkel.\ EKFL = hx : r^2.$$

Trekken wij nu uit H, de lijnen HO loodregt op EF en HN even-

evenwijdig met AC, dan is, wegens de gelijk- en gelijkvormigheid der driehoeken MEI en MNH, $EM = MN$; en, wegens de gelijkbeenigheid des driehoeks NHF, $OF = ON$; hieruit volgt door optelling

$$EM + OF = MN + ON = MO,$$

en dus is $\quad MO = \frac{1}{2} EF = r$;

verder is $\quad HO = \sqrt{(HM^2 - MO^2)} = \sqrt{(h^2 - r^2)}$,

$$NO : HO = EG : CG,$$

of $\quad NO : \sqrt{(h^2 - r^2)} = r : h$,

waaruit wij vinden $\quad NO = \frac{r}{h} \sqrt{(h^2 - r^2)}$,

$$EM = MN = MO - NO = r - \frac{r}{h} \sqrt{(h^2 - r^2)},$$

$$MF = MO \times OM = MO \times NO = r \times \frac{r}{h} \sqrt{(h^2 - r^2)};$$

deze beide laatste waarden met elkander vermenigvuldigende, komt er na herleiding

$$EM \times MF = \frac{r^4}{h^2};$$

eindelijk geeft de eigenschap van den cirkel

$$KM^2 = EM \times MF,$$

hetgeen, daar $KM = x$ gesteld is, door substitutie der gevondene waarde voor $EM \times MF$, overgaat in

$$x^2 = \frac{r^4}{h^2} \quad \text{of} \quad x = \frac{r^2}{h},$$

waaruit terstond volgt $\quad hx = r^2$;

van de vroeger uitgebragte evenredigheid, die de betrekking tusschen de inhouden der ellips en des cirkels aanduidde, zijn dus de termen der tweede reden aan elkander gelijk, en bij gevolg ook de genoemde inhouden zelve, die alzoo tot elkander staan als 1 tot 1.

Aanmerking. Om in den driehoek ABC de lijn HI met er daad te construeren, kan men door de vergelijking

$$OF = ON = \frac{r}{h} \sqrt{(h^2 - r^2)},$$

waarvan de constructie uit de gegevens aan geene moeijelijkheid onderhevig is, het punt O bepalen; daarna, door oprigting der lood-

loodlijn HO, het punt H vinden, en uit H, met CD als straal, een boogje beschrijven, dat AC in I snijdt.

Was $h=r$ gegeven, dan zouden HO en OF beide gelijk nul worden; in dit geval zouden dus de ellips en de cirkel in elkander vallen. Was $h<r$ gegeven, dan werden de lijnen HO en OF onbestaanbaar; en in dit geval zou het niet mogelijk zijn den kegel door het tweede vlak, dat in de opgaaf voorkomt, onder de bepaalde voorwaarden te snijden.

XCVII. VOORSTEL.

Door C. VAN SCHAICK.

Er zijn acht gangbare muntstukken; in centen uitgedrukt vormen vier van dezelve (A) *eene meetkunstige en de vier andere* (B) *eene rekenkunstige reeks; wanneer men het getal centen van het tweede der muntstukken* (A) *deelt in de som der centen van de muntstukken* (B), *zal het quotient met zes eenheden vermeerderd eene volkomene derde magt zijn; het eerste der muntstukken* (A) *bevat* $2\frac{1}{2}$ *maal de waarde van het eerste der muntstukken* (B); *en indien men de som van de centen der muntstukken* (B) *deelt in de tweede magt van het getal centen van het eerste dier muntstukken, zal honderdmalen dit quotient gelijk zijn aan het getal centen van het derde der muntstukken* (A). *Men vraagt hieruit deze acht muntstukken te bepalen?*

OPGELOST *door* J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz., A. C. BELINFANTE, H. W. BLOEM, E. BOAS, D. HOOLA VAN NOOTEN, C F. JULIUS, J. KÖHLER, B. LUBBERS, A. DE MOL VAN OTTERLOO, C. VAN SCHAICK, J. SCHOTBORGH, Hz., J. S. SPEIJER, L. J. ULMAN, M. L. GORDE *en* M. G. SNOER.

OPLOSSING *van* J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz.

Laat het aantal centen, in elk der muntstukken (B) bevat, voorgesteld worden door de rekenkunstige reeks

$$x,\ x+y,\ x+2y,\ x+3y,$$

en dat, in elk der muntstukken (A) begrepen, door de meetkunstige reeks

$$2\tfrac{1}{2}x,\ 2\tfrac{1}{2}xz,\ 2\tfrac{1}{2}xz^2,\ 2\tfrac{1}{2}xz^3,$$

dan is door deze stelling aan de tweede der drie opgegevene voorwaarden voldaan; volgens de derde of laatste dier voorwaarden hebben wij de vergelijking

$$100\times\frac{x^2}{4x+6y}=2\tfrac{1}{2}xz^2,$$

waaruit men, x afzonderende, vindt

$$x=\frac{3yz^2}{2(10-z^2)};$$

uit deze waarde voor x blijkt, dat $z^2<10$ en dus $z<4$ moet zijn, en omdat $z=1$ geene eigenlijke meetkunstige reeks voor de muntstukken (A) zou opleveren, kan z niet anders dan 2 of 3 zijn; voor $z=2$, is $x=y$ en voor $z=3$, is $x=13\tfrac{1}{2}y$.

Nu moet, volgens de eerste voorwaarde,

$$\frac{4x+6y}{2\tfrac{1}{2}xz}+6$$

eene volkomene derde magt zijn; stelt men nu in deze uitdrukking $z=3$ en $x=13\tfrac{1}{2}y$, zoo vinden wij voor dezelve $\frac{178}{27}$, dat klaarblijkelijk geene volkomene derde magt zijn kan; stelt men daarentegen $z=2$ en $x=y$, dan vinden wij die uitdrukking gelijk 8, welk getal juist eene derde magt is; wij moeten dus $z=2$ en $x=y$ nemen, en hierdoor gaan de gestelde reeksen over in

$$x,\ 2x,\ 3x,\ 4x;$$
$$2\tfrac{1}{2}x,\ 5x,\ 10x,\ 20x.$$

Daar voorts, volgens de laatste voorwaarde des voorstels, het derde der muntstukken (A) een getal centen bevatten moet, dat door 100 deelbaar is, moet $\frac{10x}{100}$ of $\frac{x}{10}$ een geheel getal en dus x een veelvoud van 10 zijn; daar nu $x=10$, 20, 30, 40, 60, 70 *enz.* niet voor al de termen dezer beide reeksen gangbare muntstukken zoude opleveren, moeten wij $x=50$ nemen: onze reeksen worden daardoor

$$50,\ 100,\ 150,\ 200;$$
$$125,\ 250,\ 500,\ 1000,$$

en wij hebben alzoo voor de muntstukken (B) het tienstuiverstuk, de gulden, de daalder en het tweeguldenstuk; en voor de muntstukken (A) de vijfentwintig, de rijksdaalder, het vijfgulden- en het tienguldenstuk.

XCVIII. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Men vraagt naar eene meetkunstige reeks van drie termen, waarvan de eerste een pronik, de tweede een vierkant en de derde eene derde magt is, zoodat ook het verschil der beide laatste termen een volkomen vierkant oplevere?

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, A. C. BELINFANTE, H. W. BLOEM, D. HOOLA VAN NOOTEN, C. F. JULIUS, J. KÖHLER, A. DE MOL VAN OTTERLOO, J. SCHOTBORGH, Hz., M. G. SNOER, J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz., L. J. ULMAN, B. LUBBERS *en* J. S. SPEIJER.

OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Laat de drie termen der reeks voorgesteld worden door

$$x^2+x,\ p^2x^2,\ p^3x^3,$$

dan is voldaan aan de voorwaarden, die voor elken term in het bijzonder bepaald zijn; volgens de eigenschappen der meetkunstige reeksen moet nu

$$(x^2+x)p^3x^3=(p^2x^2)^2$$

zijn, en daar uit den aard der zaak noch p, noch x gelijk nul zijn kunnen, mogen wij deze vergelijking door p^3x^4 deelen, als wanneer wij vinden

$$x+1=p,$$

of

$$x=p-1;$$

eindelijk moet nog $p^3x^3-p^2x^2$ een vierkant zijn, maar daar wij deze uitdrukking in den vorm $p^2x^2(px-1)$ kunnen schrijven, waarvan de eerste factor reeds een vierkant is, hebben wij slechts den tweeden factor $px-1$ tot een vierkant te maken; in dezen tweeden factor de gevondene waarde $x=p-1$ substitueerende, verandert dezelve in p^2-p-1; stellen wij den vierkantswortel hieruit door $p-m$ voor, dan hebben wij

$$p^2-p-1=p^2-2pm+m^2,$$

waaruit wij terstond vinden

$$p=\frac{m^2+1}{2m-1},$$

dus is

$$x=p-1=\frac{m^2-2m+2}{2m-1};$$

nemende nu voor m een willekeurig getal en substitueerende de

waar-

waarde die x en p hierdoor verkrijgen, in de uitdrukkingen die wij aanvankelijk voor de reeks gesteld hebben, dan zullen de getallen, die daaruit voortkomen, aan al de voorwaarden des voorstels voldoen. Voor $m=1$, wordt $x=1$ en $p=2$, de reeks wordt alsdan 2, 4 en 8.

XCIX. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Wanneer men op de hypothenusa AB (*Fig.* 36) *van eenen regthoekigen driehoek* ABC *een vierkant* ABFD, *alsmede op de regthoekszijde* AC *een vierkant* ACGE *beschrijft, en men de hoekpunten* D *en* E *vereenigt, dan ontstaat daardoor een driehoek* DAE, *waarom men eenen cirkel kan beschrijven; zoo nu de straal van dien cirkel benevens de hypotheuusa* AB *gegeven zijn, verlangt men de regthoekszijden* AC *en* BC *in die gegevens uit te drukken?*

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. BASSAN, H. W. BLOEM, D. HOOLA VAN NOOTEN, C. F. JULIUS, J. KÖHLER, L. J. ULMAN, A. DE MOL VAN OTTERLOO *en* J. SCHOTBORGH, Hz.

OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Stellen wij de hypothenusa $AB=a$, de straal van den cirkel, om den driehoek DAE beschreven, $OD=r$, en de onbekende *hoek* $BAC=\phi$, dan is in de vergelijking

$$DE^2=AD^2+AE^2-2.AD\times AE\times Cos.DAE,$$

$AD=AB=a$, $AE=AC=a\ Cos.\ \phi$ en $Cos.\ DAE=Cos.(180^\circ-\phi)=-Cos.\phi$, waardoor wij hebben

$$DE^2=a^2+a^2 Cos^2.\phi+2a^2 Cos^2.\phi,$$

of $$DE^2=a^2(1+3Cos^2.\phi),$$

en $$DE=a\surd(1+3Cos^2.\phi);$$

verder is, omdat de straal eens cirkels om eenen driehoek beschreven gelijk is aan eene der zijden gedeeld door de dubbelde sinus van den overstaanden hoek,

$$r=\frac{DE}{2\ Sin.\ DAE},$$

of, daar $Sin.DAE=Sin.(180^\circ-\phi)=Sin.\phi$ is,

$$r=\frac{DE}{2\ Sin.\ \phi},$$

waaruit volgt $$DE=2r\ Sin\ \phi;$$

de

de beide gevondene waarden voor DE geven de vergelijking

$$2r\,Sin.\phi = a\sqrt{(1+3\,Cos^2.\phi)},$$

of

$$4r^2\,Sin^2.\phi = a^2 + 3a^2\,Cos^2.\phi,$$

hierin $1 - Sin^2.\phi$ voor $Cos^2.\phi$ schrijvende, komt er achtervolgens

$$4r^2\,Sin^2.\phi = 4a^2 - 3a^2\,Sin^2.\phi,$$

$$4r^2\,Sin^2.\phi + 3a^2\,Sin^2.\phi = 4a^2,$$

$$Sin^2.\phi = \frac{4a^2}{4r^2+3a^2},$$

en

$$Sin.\phi = \frac{2a}{\sqrt{(4r^2+3a^2)}},$$

waaruit men ook onmiddelijk kan afleiden

$$Cos.\phi = \sqrt{(1 - Sin^2.\phi)} = \frac{\sqrt{(4r^2 - a^2)}}{\sqrt{(4r^2+3a^2)}};$$

en nu is klaarblijkelijk

$$AC = a\,Cos.\phi = \frac{a\sqrt{(4r^2 - a^2)}}{\sqrt{(4r^2+3a^2)}},$$

en

$$BC = a\,Sin\,\phi = \frac{2a^2}{\sqrt{(4r^2+3a^2)}},$$

weshalve de beide regthoekszijden in de gegevens zijn uitgedrukt geworden.

C. VOORSTEL.

Door M. DE LEON.

Welk getal van drie cijfers is het, waarbij de som van de cijfers der eenheden en honderdtallen gelijk is aan de tweede magt van het cijfer der tientallen, terwijl tevens de som van de cijfers der tien- en honderdtallen juist het cijfer der eenheden is?

OPGELOST door C. F. JULIUS, H. W. BLOEM, S. T. BOAS, D. HOOLA VAN NOOTEN, J. KÖHLER, M. DE LEON, B. LUBBERS, A. DE MOL VAN OTTERLOO, J. SCHOTBORGH, Hz., M. G. SNOER. J. S. SPEIJER, J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz., L. J. ULMAN, A. C. BELINFANTE en E. BOAS.

OPLOSSING van C. F. JULIUS.

Stellen wij de cijfers der eenheden, tientallen en honderdtallen respectievelijk door x, y en z voor, dan geeft het voorstel terstond de beide vergelijkingen

$$x+z=y^2 \text{ of } x=y^2-z \quad \ldots\ldots (1),$$

en

$$y+z=x \quad \ldots\ldots (2);$$

de

de waarde van x uit de eerste in de tweede vergelijking overbrengende, komt er

$$y+z=y^2-z,$$

waaruit men terstond trekt

$$z=\frac{y^2-y}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3);$$

deze waarde van z in (1) overbrengende, vindt men verder

$$x=\frac{y^2+y}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4);$$

dewijl nu x en z geheele positieve getallen kleiner dan 9 moeten zijn, en z tevens niet gelijk nul kan wezen, blijkt uit (3) dat $y>1$ en uit (4) dat $y<4$ moet zijn; er zijn dus slechts twee antwoorden op de vraag mogelijk, te weten:

voor $y=2$, is $x=3$ en $z=1$; en dan is het getal 123;
» $y=3$, » $x=6$ » $z=3$; » » » » » 336.

CI. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Van eenen regthoekigen driehoek de omtrek rationaal en gegeven zijnde, vraagt men de zijden in rationale getallen te bepalen; zoo mede te onderzoeken welke waarden in geheele getallen men aan den omtrek geven kan, opdat ook de zijden in geheele getallen kunnen gevonden worden?

OPGELOST *door* J. BADON GHIJBEN, G. BRANDSTEDER, H W. BLOEM, M. L. GOEDE, D. HOOLA VAN NOOTEN, C. F. JULIUS, J. KÖHLER, B. LUBBERS, A. DE MOL VAN OTTERLOO, J. S. SPEIJER, L. J. ULMAN, A. C. BELINFANTE, E. BOAS, J. SCHOTBORGH, Hz. *en* J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz.

OPLOSSING *van* J. BADON GHIJBEN.

Gelijk algemeen bekend is, kan men de drie zijden van eenen regthoekigen driehoek in rationale getallen voorstellen, door de vormen

$$p(m^2+n^2), \quad 2pmn, \quad p(m^2-n^2) \quad . \; . \; . \quad (1),$$

waarvan de eerste de hypothenusa verbeeldt, terwijl p, m en n alle mogelijke meetbare waarden kunnen hebben, mits slechts $m>n$ zij; laat nu de omtrek des driehoeks gelijk O gegeven zijn, dan is, door optelling der bovenstaande vormen,

$$O=2pm(m+n) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2),$$

hier-

Hieruit vindt men

$$n = \frac{O - 2pm^2}{2pm};$$

indien men nu aan p en m eene willekeurige waarde geeft, mits evenwel

$$2pm^2 < O \quad \text{of} \quad m < \sqrt{\frac{O}{2p}},$$

en tevens $m > n$, dat is

$$m > \frac{O - 2pm^2}{2pm} \quad \text{of} \quad m > \sqrt{\frac{O}{4p}}$$

zij, zal n eene positieve waarde kleiner dan m verkrijgen, en dan zullen deze waarden voor p, m en n, in de vormen (1) overgebragt, de zijden des driehoeks in rationale getallen doen kennen.

Was bijv. $O = 2$ gegeven, dan zou men, $p = 1$ en $m = \frac{3}{4}$ nemende, vinden $n = \frac{7}{12}$, waardoor de zijden des driehoeks worden

$$\tfrac{65}{72}, \ \tfrac{63}{72} \ \text{en} \ \tfrac{16}{72}.$$

Om het tweede gedeelte der vraag te beantwoorden, merken wij op: dat, als voor p, m en n geheele getallen genomen worden, de uitdrukkingen (1) en (2) of de zijden en omtrek des driehoeks ook geheele getallen worden; en dat omgekeerd, als de zijden des driehoeks in geheele getallen gegeven zijn, men altijd voor p, m en n geheele getallen kan aanwijzen, die de vormen (1) in de gegevene zijden doen overgaan (*); derhalve kan er geen regthoekige driehoek bestaan, welks zijden in geheele getallen uitgedrukt kunnen worden, zonder dat de omtrek een getal van den vorm (2) zij, waarin dan p, m en n geheele getallen, $m > n$ zijnde, beteekenen; is dus de gegevene omtrek een geheel getal van den vorm

$$2pm(m+n),$$

waarin $m > n$ is, dan, en ook dan alleen, kunnen de zijden in geheele getallen worden uitgedrukt.

Is voor den omtrek een getal gegeven, dat aan deze voorwaarde voldoet, dan is het genoegzaam, hetzelve in den opgegeven vorm te ontbinden, en de waarden, die men daardoor voor p,

(*) Zie de AANMERKING hier achter.

m en n verkrijgt, in de vormen (1) over te brengen, om zoo doende de zijden des driehoeks te bepalen. Was bijv. de omtrek O = 180 gegeven, dan zou men hebben

$$180 = 2 \times 1 \times 9 \times (9+1) \text{ of } p=1,\ m=9 \text{ en } n=1,$$
$$180 = 2 \times 2 \times 5 \times (5+4) \text{ „ } p=2,\ m=5 \text{ „ } n=4,$$
$$180 = 2 \times 3 \times 5 \times (5+1) \text{ „ } p=3,\ m=5 \text{ „ } n=1,$$
$$180 = 2 \times 6 \times 3 \times (3+2) \text{ „ } p=6,\ m=3 \text{ „ } n=2,$$
$$180 = 2 \times 15 \times 2 \times (2+1) \text{ „ } p=15,\ m=2 \text{ „ } n=1;$$

de beide eerste dezer ontbindingen geven voor de zijden des driehoeks 18, 80 en 82; de beide volgende geven voor die zijden 30, 72 en 78; de laatste geeft 45, 60 en 75.

Aanmerking. Wij hebben, bij deze oplossing, in de vormen (1) den factor p ingevoerd, omdat, als men voor de zijden des driehoeks blootelijk

$$m^2+n^2,\ 2mn,\ m^2-n^2 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

stelde, er regthoekige driehoeken bestaan zouden, welker zijden, in geheele getallen uitgedrukt, niet in deze laatste vormen zouden begrepen zijn, ten zij men aan m en n irrationale waarden wilde geven; de regthoekige driehoek, welks zijden door de getallen 15, 12 en 9 worden aangeduid, is onder anderen in dit geval; deszelfs omtrek zou, bij het gebruik der vormen (3), door $2m(m+n)$ (waarin altijd $m>n$ is) voorgesteld worden, doch nu kan men ook het getal 36, dat de waarde van dien omtrek is, niet in den vorm $2m(m+n)$ ontbinden, ten zij men voor m en n onmeetbare getallen aannam, en hierom zou de oplossing, indien wij de vormen (3) gebruikt hadden, aan uitzonderingen onderhevig zijn.

De in onze oplossing gebruikte vormen (1) brengen deze zwarigheid niet mede, om dit aan te toonen, zal het voldoende zijn te doen blijken, dat de zijden van eenen regthoekigen driehoek, in welke geheele getallen ook uitgedrukt, altijd door die vormen kunnen worden voorgesteld, zonder dat men noodig hebbe, aan p, m of n andere dan geheele getallen-waarden toe te kennen.

Stellen wij hiertoe, dat de zijden eens regthoekigen driehoeks in geheele getallen gegeven zijn; noemen wij de hypothenusa a en eene der regthoekszijden b, dan is

$$p(m^2+n^2)=a \text{ en } 2pmn=b \quad \ldots \quad (4).$$

of

of $p(m^2+n^2)=a$ en $p(m^2-n^2)=b$ . . (5);
uit de vergelijkingen (4) m en n oplosfende, vindt men

$$\left.\begin{aligned} m &= \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a+b}{p}}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a-b}{p}} \\ \text{en}\quad n &= \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a+b}{p}}-\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a-b}{p}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (6);$$

uit de vergelijkingen (5) vindt men even zoo

$$m=\sqrt{\frac{a+b}{2p}} \text{ en } n=\sqrt{\frac{a-b}{2p}} \quad \ldots\ldots (7);$$

moetende men nu echter omtrent de vergelijkingen (6) en (7) opmerken, dat dezelve niet gelijktijdig beftaan kunnen, maar flechts een van beide, naar gelang de zijde b tot den vorm $2pmn$ of tot den vorm $p(m^2-n^2)$ behoort, hetgeen men vooruit niet beoordeelen kan.

Noemen wij nu de andere regthoekszijde c, dan is

$$a^2-b^2=c^2,$$

of $$(a+b)(a-b)=c^2,$$

derhalve moet het getal c^2 ontbonden kunnen worden in twee ongelijke factoren, die refpectievelijk gelijk zijn aan $a+b$ en $a-b$; is nu c een ondeelbaar getal, dan kan deze ontbinding alleen gefchieden door te ftellen;

$$a+b=c^2 \text{ en } a-b=1;$$

is c geen ondeelbaar getal, maar beftaat c uit het product der ondeelbare getallen t, u, v, w, *enz.* dan is

$$a^2-b^2=t^2u^2v^2w^2 \text{ enz.}$$

en dan kan de ontbinding in factoren gefchieden door te ftellen

$$a+b=t^2u^2v^2w^2 \text{ enz. en } a-b=1$$
$$a+b=t^2v^2 \text{ enz. en } a-b=u^2w^2 \text{ enz.}$$
$$a+b=t^2vw \text{ enz. en } a-b=u^2vw \text{ enz.}$$

doch men ziet, dat, hoe deze ontbinding ook plaats hebbe, altijd $a+b$ en $a-b$ te gelijker tijd *of* vierkanten *of* gelijknamige veelvouden van vierkanten zijn moeten.

Bevindt men nu, dat de *fom* en het *verfchil* van de hypothenufa en eene der regthoekszijden vierkanten zijn, dan neemt men in de formules (6) $p=1$, hierdoor worden m en n rationaal; en dewijl $a+b$ en $a-b$ te gelijker tijd beide even of oneven zijn, hetgeen dus ook ten aanzien van $\sqrt{(a+b)}$ en $\sqrt{(a-b)}$

plaats hebben moet, worden in dit geval m en n ook geheele getallen.

Bevindt men, dat deze *som* en dit *verschil* gelijknamige onevene veelvouden van vierkanten zijn, dan neemt men in de formulen (6) p gelijk aan het onevene getal, dat den naam dier veelvouden aanduidt; hierdoor worden m en n wederom rationaal; en, dewijl p oneven is, zijn $\frac{a+b}{p}$ en $\frac{a-b}{p}$ ook weder te gelijker tijd beide even of oneven, dit heeft dus ook ten aanzien van $\sqrt{\frac{a+b}{p}}$ en $\sqrt{\frac{a-b}{p}}$ plaats, en bij gevolg worden m en n ook in dit geval geheele getallen.

Bevindt men eindelijk dat deze *som* en dit *verschil* gelijknamige evene veelvouden van vierkanten zijn, dan stelt men in de formulen (7) p gelijk aan de helft van het evene getal, dat den naam dier veelvouden aanduidt; dan worden m en n klaarblijkelijk rationale en geheele getallen.

Om deze handelwijs toe te passen op den driehoek, welks zijden 15, 12 en 9 zijn, heeft men $a = 15$ en $b = 12$ of 9; nemen wij eerst $b = 12$, dan is

$$a+b=27 \text{ en } a-b=3;$$

deze getallen zijn 3 vouden van vierkanten; dus nemen wij in (6) $p = 3$, en dan vinden wij, daar $a = 15$ en $b = 12$ is, $m = 2$ en $n = 1$; nemen wij vervolgens $b = 9$, dan is

$$a+b=24 \text{ en } a-b=6;$$

deze getallen zijn 6 vouden van vierkanten; dus nemen wij in (7) $p = 3$, en dan vinden wij, daar $a = 15$ en $b = 9$ is, $m = 2$ en $n = 1$; substituerende in de vormen (1) $p = 3$, $m = 2$ en $n = 1$, zoo vinden wij werkelijk de getallen 15, 12 en 9, die wij uit de vormen (3) door geheele getallen voor m en n te nemen, nimmer konden zien te voorschijn komen.

Het is niet te ontkennen, dat de gemaakte onderscheiding alleen zijnen grond daarin heeft, dat de zijden in het laatste voorbeeld eenen gemeenen deeler hebben, en dat zij, na van dien gemeenen deeler gezuiverd te zijn, werkelijk in de vormen (3) begrepen zijn; maar als alleen, gelijk in ons voorstel, de omtrek gegeven is, kan men vooruit niet zien of de zijden al dan niet eenen

eenen gemeenen deeler hebben zullen; het gebruik der vormen (1) heeft ons dan ook voor $O = 180$, drie antwoorden gegeven, waarvan het laatste, na weglating van de gemeene deelers, ons op de getallen 3, 4 en 5 terug brengt; het gebruik der vormen (3) zou ons, voor $O = 180$, slechts het eerste dier antwoorden hebben leeren kennen.

CII. Voorstel.

Door G. Brandsteder.

Wanneer van eenen regthoekigen driehoek de regthoekszijden gegeven zijn, en op de langste derzelven eenen gelijkzijdigen driehoek binnenwaards beschreven is, verlangt men de deelen te berekenen, waarin het eene been des gelijkzijdigen driehoeks en de hypothenusa elkander verdeelen?

Opgelost *door* J. Köhler, J. S. Speijer, G. Brandsteder, D. Hoola van Nooten, J. Schotborgh, Hz, L. J. Ulman, H. W. Bloem, M. L. Goede, G. Graafland, C. F. Julius, B. Lubbers, A. C. Belinfante *en* J. Teixeira de Mattos, Bz.

Oplossing *van* J. Köhler.

Zij ABC (*Fig.* 37) de regthoekige driehoek, op welks langste regthoekszijde AC den gelijkzijdigen driehoek ADC beschreven is; dan is gegeven $AB = a$ en $AC = AD = DC = b$, verder is $BC = \sqrt{(a^2 + b^2)}$; laat nu uit het snijpunt F eene loodlijn FG op AC vallen en stel $AG = x$, dan is, omdat *hoek* $FAG = 60^\circ$ is, $AF = 2x$ en $FG = x\sqrt{3}$; voorts heeft men nog

$$GC = AC - AG = b - x,$$

$$DF = AD - AF = b - 2x,$$

$$CF = \sqrt{(GC^2 + FG^2)} = \sqrt{(b^2 - 2bx + 4x^2)},$$

en $$BF = BC - CF = \sqrt{(a^2 + b^2)} - \sqrt{(b^2 - 2bx + 4x^2)}.$$

Nu geven de gelijkvormige driehoeken ABC en GFC de evenredigheid

$$AB : AC = FG : GC,$$

of $$a : b = x\sqrt{3} : b - x;$$

uit deze evenredigheid volgt de vergelijking

$$bx\sqrt{3} = ab - ax,$$

of $$ax + bx\sqrt{3} = ab,$$

waaruit volgt $$x = \frac{ab}{a + b\sqrt{3}};$$

de-

deze waarde voor x in de reeds gevondene uitdrukkingen overbrengende, vinden wij

$$AF = 2x \qquad = \frac{2ab}{a+b\sqrt{3}},$$

$$DF = b - 2x \qquad = \frac{b(b\sqrt{3}-a)}{a+b\sqrt{3}},$$

$$CF = \sqrt{(b^2-2bx+4x^2)} \qquad = \frac{b\sqrt{3}(a^2+b^2)}{a+b\sqrt{3}},$$

$$BF = \sqrt{(a^2+b^2)} - \sqrt{(b^2-2bx+4x^2)} = \frac{a\sqrt{(a^2+b^2)}}{a+b\sqrt{3}};$$

zoodat alsdan de gevraagde deelen in de gegevene regthoekszijden zijn uitgedrukt.

Aanmerking *van* J. S. Speijer. Uit de gevondene waarden voor de berekende lijnen, volgt onmiddelijk

$$AF : BF = 2b : \sqrt{(a^2+b^2)};$$

zoodat het deel van de zijde des gelijkzijdigen driehoeks en het deel van de hypothenusa, beide aan de kortste regthoekszijde grenzende, tot elkander staan, gelijk het dubbeld van de langste regthoekszijde tot de hypothenusa.

CIII. Voorstel.

Door L. F. Beaulieu.

De meetkunstige plaats te bepalen van de middelpunten van alle ellipsen of hyperbolen, die te gelijker tijd de vier zijden van eenen gegevenen vierhoek aanraken? (*)

Opgelost *door* L. F. Beaulieu, D. Hoola van Nooten, J. Schotborgh, Hz. *en* I. Warnsinck.

Oplossing *van* L. F. Beaulieu.

Zij ABCD (*Fig.* 38) een willekeurig gegevene vierhoek, verlengen wij de twee overstaande zijden AD en BC, nemen wij derzelver snijpunt O tot oorsprong der coördinaten en OD en OC respectievelijk tot assen der x en y aan; en laat eindelijk, ten opzigte dezer aangenomene assen,

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

de vergelijking voorstellen van eene kegelsnede, het zij ellips of hyperbool, welke de vier zijden van den vierhoek moet aanraken;

(*) Vergel. J. de Gelder, *Hoogere Meetkunst*, §. 183.

ken; dan wordt, volgens het LIV *Voorstel*, de voorwaarde, dat de kromme lijnen in de vergelijking (1) begrepen, AD en BC of de asfen der coördinaten aanraken, uitgedrukt door de vergelijkingen

$$d^2=4a \text{ en } e^2=4c \quad \ldots\ldots \quad (2);$$

terwijl aldaar mede is aangetoond, dat (wanneer men het geval van $4ac-b^2=0$, waardoor de vergelijking (1) eene parabool zou voorstellen, verwerpt) de voorwaarde, dat eene regte lijn, $y=mx+n$ tot vergelijking hebbende, de krommen der vergelijking (1) aanraakt, zich laat herleiden tot de vergelijking

$$(de+2b)n^2-4dmn+4en-8m=0 \quad \ldots \quad (3).$$

Laat nu, om den vierhoek te bepalen, OB$=p$, OA$=q$ OC$=p'$ en OD$=q'$ gegeven zijn, dan zijn de vergelijkingen der zijden AB en CD respectievelijk

$$y=-\frac{p}{q}x+p \text{ en } y=-\frac{p'}{q'}x+p';$$

neemt men dus in (3), eerst

$$m=-\frac{p}{q} \text{ en } n=p,$$

en vervolgens $$m=-\frac{p'}{q'} \text{ en } n=p',$$

dan drukken de komende vergelijkingen

$$(de+2b)pq+4dp+4eq+8=0 \quad \ldots \quad (4),$$

en $$(de+2b)p'q'+4dp'+4eq'+8=0 \quad \ldots \quad (5),$$

de voorwaarden uit, waaraan de coëfficienten der vergelijking (1) moeten voldoen, opdat AB en CD de door die vergelijking voorgestelde krommen aanraken.

Nog is eindelijk in hetzelfde LIV *Voorstel* gebleken, dat, als men de coördinaten van het middelpunt van eene der in (1) begrepene krommen α en β noemt, uit hoofde der vergelijkingen (2),

$$\alpha(de+2b)=-2d,$$

en $$\beta(de+2b)=-2e$$

is; door deze laatste vergelijkingen veranderen (4) en (5) in

$$(de+2b)(pq-2p\alpha-2q\beta)+8=0,$$

$$(de+2b)(p'q'-2p'\alpha-2q'\beta)+8=0;$$

waaruit terstond volgt

$$pq - 2p\alpha - 2q\beta = p'q' - 2p'\alpha - 2q'\beta,$$

of
$$\beta = -\frac{p'-p}{q'-q}\alpha + \tfrac{1}{2}.\frac{p'q'-pq}{q'-q} \quad . \; . \; . \; (6);$$

deze laatste vergelijking, onafhankelijk van de coëfficienten der vergelijking (1) zijnde, en, behalve de coördinaten van de middelpunten der kromme lijnen door die vergelijking voorgesteld, geene andere grootheden dan de standvastige gegevens bevattende, drukt de gevraagde meetkunstige plaats uit; en deze is derhalve eene regte lijn.

Van deze regte lijn kunnen gemakkelijk twee punten zonder berekening gevonden worden; want, de diagonalen AC en BD kunnen, elk in het bijzonder, beschouwd worden als middellijnen eener in den vierhoek beschrevene ellips, waarvan de toegevoegde middellijnen gelijk nul zijn. Deelt men dus de diagonalen in P en Q midden door, dan zijn P en Q de middelpunten dezer ellipsen, en, bij gevolg, twee punten der door de vergelijking (6) voorgestelde regte lijn, die derhalve geheel bepaald is.

Men kan zich hiervan overigens overtuigen, door op te merken, dat zoo x' en y' de coördinaten van het punt P, en x'' en y'' die van het punt Q zijn, men alsdan heeft

$$x' = \tfrac{1}{2}\text{OA} = \tfrac{1}{2}q, \qquad y' = \tfrac{1}{2}\text{OC} = \tfrac{1}{2}p',$$
$$x'' = \tfrac{1}{2}\text{OD} = \tfrac{1}{2}q' \quad \text{en} \quad y'' = \tfrac{1}{2}\text{OB} = \tfrac{1}{2}p,$$

en dat de vergelijking van PQ, zijnde

$$y - y' = \frac{y'-y''}{x'-x''}(x - x'),$$

door de bovenstaande waarden overgaat in

$$y - \tfrac{1}{2}p' = \frac{p'-p}{q-q'}(x - \tfrac{1}{2}q),$$

of in
$$y = -\frac{p'-p}{q'-q}x + \tfrac{1}{2}\frac{p'q'-pq}{q'-q};$$

welke vergelijking van PQ met de gevondene vergelijking (6) volkomen identiek is. Derhalve blijkt, *dat alle ellipsen of hyperbolen, die de vier zijden van eenen willekeurigen vierhoek aanraken, hare middelpunten hebben in de regte lijn die de beide diagonalen midden door deelt.*

CIV.

CIV. VOORSTEL.

Door J. BADON GHIJBEN.

Wanneer men de zijden van eenen regelmatigen n-hoek midden door deelt en de opvolgende deelpunten door regte lijnen vereenigt, ontstaat er een nieuwe regelmatige n-hoek; op dezen dezelfde bewerking verrigtende en dezelve op elken nieuwen veelhoek herhalende, tot dat men den m^{den} regelmatigen veelhoek binnen den eersten verkregen heeft, vraagt men de betrekking te vinden tusschen de zijde van den laatst verkregenen en van den oorspronkelijken veelhoek?

OPGELOST *door* J. BADON GHIJBEN, D. HOOLA VAN NOOTEN, L. J. ULMAN, I. WARNSINCK, C. F. JULIUS, J. BASSAN, H. W. BLOEM, J. KÖHLER *en* J. SCHOTBORGH, Hz.

OPLOSSING *van* J. BADON GHIJBEN.

Laten AB en BC (*Fig.* 39) twee halve zijden van den oorspronkelijken veelhoek zijn, en AC eene zijde van den eerst ingeschrevenen, trekken wij uit B eene loodlijn BD op AC, stellen wij de zijde des oorspronkelijken veelhoeks door a, die des eerst ingeschrevenen door a_1, en die der volgende veelhoeken respectievelijk door a_2, a_3, enz. tot a_m voor, dan is

$$AB = BC = \tfrac{1}{2}a \quad \text{en} \quad AD = DC = \tfrac{1}{2}a_1;$$

voorts is, volgens de bekende formule voor de polygoonshoek van eenen regelmatigen n-hoek,

$$\textit{hoek}\ ABC = \frac{n-2}{n} \times 180^\circ,$$

dus $$\textit{hoek}\ ABD = \frac{n-2}{n} \times 90^\circ = 90^\circ - \frac{180^\circ}{n},$$

en $$\textit{hoek}\ BAD = 90^\circ - \textit{hoek}\ ABD = \frac{180^\circ}{n};$$

nu geeft de regthoekige driehoek ABD terstond

$$AD = AB \times Cos.\, BAD,$$

of $$\tfrac{1}{2}a_1 = \tfrac{1}{2}a\, Cos.\, \frac{180^\circ}{n},$$

waaruit volgt $$a : a_1 = 1 : Cos.\, \frac{180^\circ}{n};$$

daar nu a_2 van a_1 op dezelfde wijze afhangt als a_1 van a, zoo is ook

$$a_1 : a_2 = 1 : Cos. \frac{180^\circ}{n},$$

even zoo is
$$a_2 : a_3 = 1 : Cos. \frac{180^\circ}{n},$$

enz.

tot
$$a_{m-1} : a_m = 1 : Cos. \frac{180^\circ}{n};$$

vermenigvuldigen wij nu de overeenkomstige termen der m evenredigheden, die wij alzoo verkrijgen, dan komt er, na weglating der gelijke factoren in de beide eerste producten,

$$a : a_m = 1 : Cos^m. \frac{180^\circ}{n},$$

waardoor de gevraagde betrekking aangeduid wordt.

CV. VOORSTEL,

Door J. SCHOTBORGH, Hz.

Op een hellend vlak zijn eene last en een horizontaal werkend vermogen in evenwigt; indien men deze last en magt in ponden en de hoogte en grondlijn van het hellend vlak in ellen uitdrukt, worden de hiertoe gebezigde getallen bepaald door de voorwaarden: 1°. dat de hoogte, last en grondlijn harmonisch evenredig zijn; en 2°. dat de last niet alleen rekenkunstig midden evenredig tusschen de magt en grondlijn, maar ook gelijk aan het vierkant van de magt is. Men vraagt hieruit de hoegrootheid van last, magt, hoogte en grondlijn te vinden?

OPGELOST door J. J. GEFKEN, A. C. BELINFANTE, H. W. BLOEM, M. L. GORDE, D. HOOLA VAN NOOTEN, C. F. JULIUS, J. KÖHLER, A. DE MOL VAN OTTERLOO, J. SCHOTBORGH, Hz. M. G. SNOER, J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz. en L. J. ULMAN.

OPLOSSING van J. J. GEFKEN.

Stel dat de last x en de magt y ponden bevat, dat de hoogte van het hellend vlak p en deszelfs grondlijn q ellen groot zij, dan volgt, uit de wet des evenwigts, dat $y : x = p : q$ moet zijn; volgens de eerste voorwaarde in het voorstel opgegeven, moeten p, x en q harmonisch evenredig en dus $p : q = p - x : x - q$ zijn; deze evenredigheden en de verder opgegevene voorwaarden verschaffen ons de vier volgende vergelijkingen:

$p(x-q) = q(p-x)$, $2x = y + q$, $qy = px$ en $x = y^2$ (1);

de

de waarde van x uit de laatste dezer vergelijkingen in de drie eerste overbrengende, verkrijgen wij

$$p(y^2-q)=q(p-y^2),\ 2y^2=y+q \text{ en } q=py \quad (2);$$

de waarde van q uit de laatste dezer drie vergelijkingen wederom in de beide eerste stellende, komt er

$$y-p=p-y^2 \text{ en } p=2y-1 \ldots \quad (3);$$

en nu weder de waarde van p uit de laatste vergelijking in de voorlaatste substituerende, hebben wij

$y^2-3y+2=0$, waaruit volgt $y=2$ of 1,
derhalve is $p=2y-1 \quad =3$ of 1,
$q=py \quad =6$ of 1,
$x=y^2 \quad =4$ of 1;

de laatste waarden voldoen aan het voorstel niet in den bedoelden zin, en dus hebben wij: voor den last 4 ponden, voor de magt 2 ponden, voor de hoogte 3 ellen en voor de grondlijn 6 ellen.

CVI. VOORSTEL.

Door J. S. SPEIJER.

Drie getallen te vinden, als gegeven zijn: derzelver som, de som van hunne derde magten en de som van hunne vierde magten?

OPGELOST *door* J. S. SPEIJER, L. J. ULMAN, H. W. BLOEM, D. HOOLA VAN NOOTEN, A. DE MOL VAN OTTERLOO, J. KÖHLER, A. C. BELINFANTE, M. L. GOEDE, C. F. JULIUS, J. SCHOTBORGH, Hz. *en* J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz.

I. OPLOSSING *van* J. S. SPEIJER.

De drie getallen door x, y en z voorstellende, hebben wij

$$x+y+z=a \ (1),\quad x^3+y^3+z^3=b \ (2),\quad x^4+y^4+z^4=c \ (3);$$

nemen wij nu het viervoudig product der twee eerste vergelijkingen en trekken wij het drievoud der derde vergelijking daarvan af, dan vinden wij

$$x^4+4x^3y+4x^3z+y^4+4y^3x+4y^3z+z^4+4z^3x+4z^3y=4ab-3c \ (4);$$

verheffen wij nu de vergelijking (1) tot de vierde magt en trekken wij de vergelijking (4) daarvan af, dan vinden wij

$$6x^2y^2+12x^2yz+6x^2z^2+12y^2xz+12z^2xy+6y^2z^2=a^4-4ab+3c;$$

deze vergelijking schrijvende in den vorm

$$6(xy+xz+yz)^2=a^4-4ab+3c,$$

vinden wij daaruit terstond

$xy+$

$$xy+xz+yz=\sqrt{\frac{a^4-4ab+3c}{6}} \quad \ldots \quad (5),$$

of, kortheidshalve, deze worteluitdrukking door B voorstellende,

$$xy+xz+yz=\text{B};$$

verheffen wij nu de vergelijking (1) tot de derde magt en trekken wij (2) daarvan af, dan kan de vergelijking, die hierdoor gevonden wordt, geschreven worden in den vorm

$$3(x+y+z)(xy+xz+yz)-3xyz=a^3-b;$$

stellen wij nu hierin voor de factoren des eersten terms hunne bekende waarden a en B, dan wordt deze laatste vergelijking

$$3a\text{B}-3xyz=a^3-b,$$

waaruit wij terstond vinden

$$xyz=\frac{3a\text{B}-a^3+b}{3} \quad \ldots \quad (6);$$

het tweede lid dezer vergelijking nu, wederom alleen bekenden bevattende, stellen wij door C voor, als wanneer wij hebben

$$xyz=\text{C};$$

daar nu door de vergelijkingen (1), (5) en (6) van de drie begeerde getallen gegeven zijn: de som, de som der producten twee aan twee en het product, zoo zijn deze begeerde getallen niet anders, dan de wortels der derdemagtsvergelijking

$$\text{X}^3-\text{AX}^2+\text{BX}-\text{C}=0 \quad \ldots \quad (7);$$

waarin

$$\text{A}=a,$$

$$\text{B}=\sqrt{\frac{a^4-4ab+3c}{6}},$$

$$\text{C}=\frac{3a\text{B}-a^3+b}{3};$$

was, bij voorbeeld, gegeven:

$$a=6,\ b=36,\ c=98,$$

zoo zou men hebben

$$\text{A}=6,\ \text{B}=11,\ \text{C}=6,$$

de derdemagtsvergelijking (7) zoude dus zijn

$$\text{X}^3-6\text{X}^2+11\text{X}-5=0;$$

voor de wortels dezer vergelijking vindt men 1, 2 en 3, welke getallen dus, voor de gestelde gegevens, de waarden van x, y en z zijn.

II. OPLOSSING van L. J. ULMAN.

Om het opgegevene Voorstel en andere dergelijke op eene algemeene wijze op te losfen, herinneren wij ons, dat men, uit de fommen der 1ste, 2de, *enz.* tot de n^{de} magten van n getallen, de fommen van derzelver producten 2 aan 2, 3 aan 3, *enz.* vinden kan, welke laatstgenoemde fommen de coëfficienten eener vergelijking van de n^{de} magt opleveren, die de n onbekende getalen tot wortels heeft. Laat, bij voorbeeld, de fommen der 1ste, 2de, 3de . . . n^{de} magten respectievelijk door S_1, S_2, S_3 . . . S_n uitgedrukt worden, dan zijn (zie J. DE GELDER, *Beg. der Stelkunst*, §. 691, en vergelijk *Kunstoeffeningen*, II Deel, Voorstel N°. 184) de gezochte getallen de wortels eener vergelijking

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \text{enz.} \; . \; . \; . + Lx + M = 0,$$

van welker coëfficienten S_1, S_2, S_3 *enz.* afhangen, volgens de vergelijkingen

$$S_1 = -A,$$
$$S_2 = -AS_1 - 2B,$$
$$S_3 = -AS_2 - BS_1 - 3C,$$
$$S_4 = -AS_3 - BS_2 - CS_1 - 4D,$$

enz.

hieruit volgt omgekeerd, dat in onze n^{de} magtsvergelijking is

$$A = -S_1,$$
$$B = \frac{-S_2 - AS_1}{2} = \frac{S_1^2 - S_2}{2},$$
$$C = \frac{-S_3 - AS_2 - BS_1}{3} = \frac{-S_1^3 + 3S_1S_2 - 2S_3}{6},$$
$$D = \frac{-S_4 - AS_3 - BS_2 - CS_1}{4} = \frac{S_1^4 - 6S_1^2S_2 + 8S_1S_3 + 3S_2^2 - 6S_4}{24},$$

enz.

Stellen wij ons nu voor, dat de drie gevraagde getallen drie wortels van eene vierde magtsvergelijking

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

zijn, waarvan de vierde wortel gelijk nul is, dan wordt $D = 0$ en de vergelijking gaat over in die van de derde magt

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0,$$

waarvan nu de drie begeerde getallen de wortels zijn.

Stel-

Stellen wij nu de boven gevondene waarde van D inderdaad gelijk nul, dan verkrijgen wij de vergelijking

$$S_1^4 - 6 S_1^2 S_2 + 8 S_1 S_3 + 3 S_2^2 - 6 S_4 = 0,$$

waarin alleen S_2 onbekend is, als zijnde S_1, S_3, S_4 de gegevens van ons voorstel. Behandelen wij nu deze vergelijking als eene gewone vierkantsvergelijking in S_2, dan vinden wij

$$S_2 = S_1^2 \pm \sqrt{\{\tfrac{2}{3} S_1 (S_1^3 - 4 S_3) + 2 S_4\}};$$

hierdoor ook S_2 bekend geworden zijnde, zijn ook door de boven opgegevene formulen A, B en C bekend, en men kan dus, de wortels der vergelijking

$$x^3 + A x^2 + B x + C = 0$$

op de gewone wijze nasporen, om zoo doende de begeerde getallen te vinden.

Was, bij voorbeeld, gegeven $S_1 = 6$, $S_3 = 36$, $S_4 = 98$, dan vindt men, door de opgeloste vierkantsvergelijking, $S_2 = 58$ of 14; gebruikende de laatste dezer beide waarden, vindt men verder

$$A = -6,\ B = 11,\ C = -6;$$

de derdemagtsvergelijking wordt dan

$$x^3 - 6 x^2 + 11 x - 6 = 0,$$

en derzelver wortels, waarvoor men 1, 2 en 3 vindt, zijn de begeerde getallen; gebruikende de andere waarde voor S_2, zoude men voor de derdemagtsvergelijking vinden

$$x^3 - 6 x^2 - 11 x + 126 = 0,$$

bij welke wij, omdat dezelve geene meetbare wortels heeft, ons niet langer zullen ophouden.

CVII. Voorstel.

Door L. J. Ulman.

Om een meer, welks omliggend terrein waterpas is, begeert men eenen dijk te leggen, ter hoogte van h ellen; de kruin des dijks moet waterpas en b ellen breed zijn; de dossering aan de waterzijde moet zijn van q en die aan de landzijde van p ellen op elke el; men begeert te berekenen, hoe veel cubiek ellen aarde men tot dien dijk noodig heeft, in de beide gevallen, of dat de dijk eenen regelmatigen n-hoek, of dat dezelve eenen cirkel moet insluiten; zijnde daartoe in het laatste geval de straal des cirkels en in het eerste de straal des cirkels om den n-hoek beschreven gelijk r ellen gegeven?

Op-

OPGELOST *door* L. J. ULMAN, J. BASSAN, D. HOOLA VAN NOOTEN *en* J. SCHOTBORGH, Hz.

OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

Wij zullen, in de *eerste* plaats, den inhoud van den begeerden dijk bepalen, voor het geval dat dezelve eenen regelmatigen n-hoek moet insluiten; laat daartoe ABCDEF (*Fig.* 40) eene verticale doorsnede van den dijk zijn, gaande door het middelpunt M en door eene der hoekpunten van den n-hoek, indien wij dan uit F en E de loodlijnen FB en EC op AD laten vallen, is gegeven: $DM = r$, $BF = EC = h$, $BC = FE = b$, $AB = p \times BF = ph$ en $CD = q \times EC = qh$; laat verder (*Fig.* 41) eene horizontale projectie van den dijk voorstellen, waarin AAAAAA de buitenste beneden-omtrek van den dijk, BBBBBB de projectie van den buiten-omtrek van de kruin, CCCCCC de projectie van den binnen-omtrek van de kruin en DDDDDD de omtrek van den n-hoek, die door den dijk moet worden ingesloten, verbeeldt, dan ziet men gemakkelijk in, dat de inhoud van den dijk bestaat uit het verschil der inhouden van twee afgeknotte n-hoekige pyramiden, die dezelfde hoogte h hebben en waarvan de grootste AAAAAA tot grondvlak en BBBBBB tot bovenvlak heeft, terwijl de kleinste, het onderste boven gekeerd zijnde, CCCCCC tot grondvlak en DDDDDD tot bovenvlak heeft; door nu de inhoud van eenen regelmatigen n-hoek in den straal des omgeschreven cirkels uit te drukken, hebben wij

$$Inh.\,Veelh.\ AAAAAA = \frac{n}{2} \times AM^2 .\ Sin.\ \frac{2\pi}{n},$$

$$Inh.\,Veelh.\ BBBBBB = \frac{n}{2} \times BM^2 .\ Sin.\ \frac{2\pi}{n},$$

$$Inh.\,Veelh.\ CCCCCC = \frac{n}{2} \times CM^2 .\ Sin.\ \frac{2\pi}{n},$$

$$Inh.\,Veelh.\ DDDDDD = \frac{n}{2} \times DM^2 .\ Sin.\ \frac{2\pi}{n};$$

daar verder de inhoud eener afgeknotte pyramide gelijk is aan de som van drie pyramiden van gelijke hoogte, die respectievelijk het grondvlak, het bovenvlak en een vlak, dat midden evenredig tusschen deze beiden is, tot grondvlakken hebben, vinden wij

dat

dat de inhoud van de grootste der beide genoemde afgeknotte pyramiden door

$$\tfrac{1}{6} h n \, Sin. \frac{2\pi}{n} . \{AM^2 + AM \times BM + BM^2\},$$

en die van de kleinste door

$$\tfrac{1}{6} h n \, Sin. \frac{2\pi}{n} . \{CM^2 + CM \times DM + DM^2\}$$

wordt uitgedrukt; derhalve is hun verschil of de inhoud van den dijk, die wij door I voorstellen,

$$I = \tfrac{1}{6} h n \, Sin. \frac{2\pi}{n} \{AM^2 + AM \times BM + BM^2 - CM^2 - CM \times DM - DM^2\};$$

voorts volgt uit *Fig.* 40 terstond

$$AM = AB + BC + CD + DM = p h + b + q h + r,$$
$$BM = BC + CD + DM = b + q h + r,$$
$$CM = CD + DM = q h + r$$

en $DM = r$;

en deze waarden in de laatste vergelijking overbrengende, komt er, na behoorlijke herleiding,

$$I = \tfrac{1}{6} h n \, Sin. \frac{2\pi}{n} . \{(h(p+q) + 3b) . (h(p+2q) + 3r) - 3b(r-b)\}.$$

Om in de *tweede* plaats den inhoud van den dijk te vinden, voor het geval dat dezelve eenen cirkel moet insluiten, behoeven wij in de gevondene formule slechts te veronderstellen dat n oneindig groot worde; hierdoor wordt $Sin. \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}$ en bij gevolg gaat onze vergelijking voor dat geval over in

$$I' = \tfrac{1}{3} h \pi \{(h(p+q) + 3b)(h(p+2q) + 3r) - 3b(r-b)\},$$

welke uitkomst men ook zou verkregen hebben, door den dijk nu te beschouwen als het verschil van twee afgeknotte kegels.

Wij willen op het laatste geval den bekenden regel van GULDIN toepassen, en merken daartoe op, dat de dijk een omwentelingsligchaam is, voortgebragt door de omwenteling van het trapezium ADEF (*Fig.* 40) om de lijn PQ als as; indien dus Z het zwaartepunt van dat trapezium is en ZN loodregt op PQ wordt getrokken, zullen wij hebben

$$I' = 2\pi \times ZN \times trap. ADEF;$$

verlengen wij nu AF en DE, tot dat zij elkander in G ontmoeten,

ten, en trekken wij uit G eene lijn, die EF in H en AD in I midden door deelt, dan zal deze lijn door de zwaartepunten Z' en Z'' van de driehoeken GAD en GFE gaan, en bij gevolg ook door het zwaartepunt Z van het trapezium ADEF; ter bepaling van dit zwaartepunt, verschaft de evenwigtsleer ons de evenredigheid

$$\textit{trap.}\,ADEF : \textit{drieh.}\,GFE = Z'Z'' : ZZ',$$

maar omdat

$$\textit{drieh.}\,GAD : \textit{drieh.}\,GFE = AD^2 : FE^2$$

is, hebben wij ook

$$\textit{trap.}\,ADEF : \textit{drieh.}\,GFE = AD^2 - FE^2 : FE^2;$$

indien wij nu deze evenredigheid met de vorige verbinden en in het oog houden, dat

$$Z'Z'' = GZ' - GZ'' = \tfrac{2}{3}\,GI - \tfrac{2}{3}\,GH = \tfrac{2}{3}\,HI$$

is, vinden wij daaruit

$$ZZ' = \tfrac{2}{3}\,HI \times \frac{FE^2}{AD^2 - FE^2};$$

verder is

$$AD : FE = GI : GH,$$

en dus ook

$$AD - FE : AD = HI : GI = \tfrac{1}{3}\,HI : IZ',$$

waaruit volgt

$$IZ' = \tfrac{1}{3}\,HI \times \frac{AD}{AD - FE};$$

van deze waarde voor IZ' de gevondene voor ZZ' aftrekkende, komt er

$$IZ = \tfrac{1}{3}\,HI \times \left\{\frac{AD}{AD - FE} - \frac{2\,FE^2}{AD^2 - FE^2}\right\},$$

of daar $AD = AB + BC + CD = ph + b + qh = h(p+q) + b$, en $FE = b$ is

$$IZ = \tfrac{1}{3}\,HI \times \left\{\frac{h(p+q)+b}{h(p+q)} - \frac{2b^2}{(h(p+q)+b)^2 - b^2}\right\},$$

welke uitdrukking door behoorlijke herleiding verandert in

$$IZ = \tfrac{1}{3}\,HI \times \frac{h(p+q) + 3b}{h(p+q) + 2b};$$

dewijl, na HK loodregt op AD getrokken te hebben,

$$IZ : HI = MN : HK$$

is,

is, heeft men klaarblijkelijk ook

$$MN = \tfrac{1}{2} HK \times \frac{h(p+b)+3b}{h(p+q)+2b};$$

nemen wij nu den vierkantswortel uit het verschil der vierkanten van IZ en MN, in het oog houdende dat wij hebben

$$\sqrt{(HI^2 - HK^2)} = IK = ID - KC - CD = \tfrac{1}{2}(h(p+q)+b)$$
$$- \tfrac{1}{2}b - qh = \tfrac{1}{2}h(p-q),$$

dan vinden wij

$$\sqrt{(IZ^2 - MN^2)} = \tfrac{1}{6}h(p-q) . \frac{h(p+q)+3b}{h(p+q)+2b};$$

en daardoor eindelijk, omdat $ZN = ID + DM - \sqrt{(IZ^2 - MN^2)}$ is,

$$ZN = \tfrac{1}{2}(h(p+q)+b) + r - \tfrac{1}{6}h(p-q) . \frac{h(p+q)+3b}{h(p+q)+2b},$$

hetgeen gemakkelijk herleid wordt tot

$$ZN = \tfrac{1}{3} . \frac{(h(p+q)+3b)(h(p+2q)+3r) - 3b(r-b)}{h(p+q)+2b};$$

deze waarde voor ZN, zoo mede voor het trapezium

$$trap. ADEF = \tfrac{1}{2} FB \times (AD + FE) = \tfrac{1}{2}h(h(p+q)+2b),$$

in de vergelijking

$$I' = 2\pi \times ZN \times trap. ADEF$$

overbrengende, bekomt men voor I' dezelfde uitdrukking die wij te voren gevonden hebben.

Aanmerking. Gegeven zijnde $h = 5$, $b = 12$, $q = 2$, $p = 6$, $r = 300$ en $\pi = 3,14$ genomen wordende, vindt men $I' = 323587,473$ dit bijzonder geval is het onderwerp van de 83ste *Opgave* in het I *Deel* der *Kunstoeffeningen*, bl. 122. Aldaar is echter het zwaartepunt op verkeerde gronden bepaald en zijn dienvolgens drie verschillende antwoorden opgegeven, welke geen van allen het ware zijn.

CVIII. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

Men vraagt de zijden van eenen driehoek te berekenen, als gegeven zijn de stralen der drie cirkels, beschreven om elk der driehoeken, waarin de oorspronkelijke driehoek verdeeld wordt, door lijnen, uit het middelpunt van den daarin beschrevenen cirkel, naar de hoekpunten getrokken?

Opgelost *door* W. J. C. Rammelman Elsevier, J. Bassan, L.

L. J. Ulman, D. Hoola van Nooten, C. F. Julius, J. Köhler en J. Schotborgh, Hz.

Oplossing van W. J. C. Rammelman Elsevier.

Laat ABC (*Fig.* 42) de begeerde driehoek zijn, in welken, uit het middelpunt O van den ingeschreven cirkel, de lijnen AO, BO en CO naar de hoekpunten van den driehoek getrokken zijn; stellen wij dan de gegevene stralen der cirkels, om de driehoeken OBC, OAC en OAB beschreven, door a, b en c voor, zoo mede de hoeken OAC $=$ OAB $= \phi$ en OCA $=$ OCB $= \psi$, dan zijn de hoeken OBA $=$ OBC $= 90° - (\phi + \psi)$ en wij hebben, door de bekende formule voor den straal van den om eenen driehoek beschreven cirkel,

$$a = \frac{OC}{2\,Sin.\,OBC} = \frac{OC}{2\,Sin.\,(90° - (\phi + \psi))} = \frac{OC}{2\,Cos.\,(\phi + \psi)},$$

en

$$b = \frac{OC}{2\,Sin.\,OAC} = \frac{OC}{2\,Sin.\,\phi},$$

waaruit volgt

$$b\,Sin.\,\phi = a\,Cos.\,(\phi + \psi) \quad \ldots \quad (1);$$

even zoo hebben wij

$$b = \frac{AO}{2\,Sin.\,OCA} = \frac{AO}{2\,Sin.\,\psi},$$

en

$$c = \frac{AO}{2\,Sin.\,OBA} = \frac{AO}{2\,Sin\,(90° - (\phi + \psi))} = \frac{AO}{2\,Cos.\,(\phi + \psi)},$$

waaruit volgt $\quad b\,Sin.\,\psi = c\,Cos.\,(\phi + \psi) \quad \ldots \quad (2);$

indien wij nu de vergelijkingen (1) en (2) in elkander deelen, komt er

$$\frac{Sin.\,\psi}{Sin.\,\phi} = \frac{c}{a},$$

of $Sin.\,\psi = \frac{c}{a} Sin.\,\phi$ en $Cos\,\psi = \sqrt{(1 - Sin^2.\,\psi)} = \sqrt{(1 - \frac{c^2}{a^2} Sin^2.\,\phi)}$ (3);

ontwikkelen wij verder de vergelijking (1)

$$b\,Sin.\,\phi = a\,Cos.\,\phi\,Cos.\,\psi - a\,Sin.\,\phi\,Sin.\,\psi,$$

en stellen wij daarin voor $Sin.\,\psi$ en $Cos.\,\psi$ de bovenstaande waarden, dan vinden wij

$$b\,Sin.\,\phi = a\,Cos.\,\phi . \sqrt{(1 - \frac{c^2}{a^2} Sin^2.\,\phi)} - c\,Sin^2.\,\phi,$$

 of

of $(b+c\,Sin.\,\phi)\,Sin.\,\phi = a.\sqrt{(1-\frac{c^2}{a^2}Sin^2.\,\phi)(1-Sin^2.\,\phi)}$,

deze vergelijking in het vierkant gebragt zijnde, wordt gemakkelijk herleid tot

$$Sin^3.\,\phi + \frac{a^2+b^2+c^2}{2bc}Sin^2.\,\phi - \frac{a^2}{2bc} = 0 \quad . \; . \quad (4);$$

door middel dezer derde magts vergelijking $Sin.\,\phi$ en dus ook ϕ berekend hebbende, kan men door (3) ook $Sin.\,\psi$ en ψ bepalen, zoodat alsdan de hoeken

$BOC = 180° - OCB - OBC = 180° - \psi - (90° - (\phi + \psi)) = 90° + \phi$,

$AOC = 180° - OAC - OCA = 180° - \phi - \psi$,

en $AOB = 180° - OAB - OBA = 180° - \phi - (90° - (\phi + \psi)) = 90° + \psi$

bekend worden en men de zijden kan vinden, door de vergelijkingen

$$BC = 2\,a\,Sin.\,BOC,$$
$$AC = 2\,b\,Sin.\,AOC,$$
en
$$AB = 2\,c\,Sin.\,AOB.$$

Aanmerking. De vergelijking (4) heeft altijd eenen bestaanbaren positieven wortel, tusschen 0 en 1; $Sin.\,\phi$ heeft dus altijd eene bestaanbare waarde, zoodat de driehoek altijd mogelijk is, hoedanig dan ook de bedoelde stralen mogen gegeven zijn.

CIX. Voorstel.

Door A. C. Belinfante.

De naam van een' onzer vaderlandsche helden, die bij eene der jongste gebeurtenissen de achting van ieder braaf Nederlander heeft verworven, wordt met zes letters geschreven; wanneer men deze letters voorstelt door de ordegetallen, die derzelver plaats in het alphabet aanwijzen, hebben die getallen de volgende eigenschappen: de vierkantswortel uit het vijfde is eene eenheid grooter dan het derde; de dubbelde overmaat van het tweede boven het eerste is gelijk aan het zesde; tweemaal het derde is eene eenheid minder dan het vierde; het eerste, tweede, derde en vijfde, gelijk mede het eerste, vijfde, zesde en tweede maken rekenkunstige evenredigheden uit; en eindelijk vormen het derde, vierde en eerste eene rekenkunstige reeks. Men vraagt naar den naam van dien held?

Opgelost *door* J. Köhler, J. Bassan, A. C. Belinfante, H. W. Bloem, E. Boas, S. T. Boas, J. J. Gefken, G. Graaf-

Graafland, D. Hoola van Nooten, C. F. Julius, B. Lubbers, A. de Mol van Otterloo, C. van Schaick, J. Schotborgh, Hz., M. G. Snoek, J. S. Speijer, J. Teixeira de Mattos, Bz. *en* L. J. Ulman.

Oplossing *van* J. Köhler.

Laaten de ordegetallen zijn u, v, w, x, y en z, zoo geeft het voorstel de vergelijkingen

$$\sqrt{y}=w+1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$
$$2(v-u)=z \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2),$$
$$2w=x-1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3),$$
$$u-v=w-y \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4),$$
$$u-y=z-v \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5),$$
$$2x=u+w \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6);$$

de waarden van x uit (3) en (6) aan elkander gelijk stellende, heeft men

$$2w+1=\tfrac{1}{2}(u+w),$$

waaruit men vindt $\quad u=3w+2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7);$

de waarden van z uit (2) en (5) aan elkander gelijk stellende, heeft men

$$2(v-u)=u-y+v,$$

waaruit volgt $\quad v=3u-y \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8);$

de waarde van u uit (7) in (4) overbrengende, komt er

$$3w+2-v=w-y,$$

of $\quad v=2w+y+2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9);$

deze zelfde waarde van u in (8) stellende, komt er

$$v=9w+6-y \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10);$$

uit (9) en (10) volgt terstond

$$2w+y+2=9w+6-y,$$

waaruit men vindt $\quad 2y=7w+4 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11);$

deze waarde van y in (1) substituerende, verkrijgen wij, na behoorlijke herleiding, de vierkantsvergelijking

$$2w^2-3w-2=0,$$

waaruit gevonden wordt $w=2$ of $w=-\frac{1}{2}$; dewijl w echter uit den aard der zaak een geheel getal zijn moet, nemen wij alleen

$$w=2,$$

dan vinden wij uit (3) $\quad x=5,$

uit (7) $\quad u=8,$

 uit

uit (11) $y=9$,
uit (9) $v=15$,
en uit (2) $z=14$;

wij hebben dus voor u, v, w, x, y en z
de getallen 8, 15, 2, 5, 9 en 14,
die de letters H, O, B, E, I, N
aanwijzen en alzoo den gevraagden naam doen kennen. (*)

CX. VOORSTEL.

Door J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz.

Men vraagt insgelijks den naam van eenen verhevenen held, wiens onverschrokkenheid en moed Neêrlands roem verhief, te bepalen, uit de volgende eigenschappen der acht getallen, waardoor op gelijke wijze als in het voorgaande voorstel, de letters van zijnen naam kunnen voorgesteld worden: het 8ste + 2de, 3de, 5de, 4de — 2de, 7de — 6de, 1ste en 7de — 2de *vormen eene rekenkunstige reeks, waarvan het verschil gevonden wordt, door de som der reeks, met de som der acht getallen en nog daarenboven met het achtste getal, te verminderen; de som der reeks door die der getallen gedeeld wordende, vindt men een quotient in geheelen gelijk aan het tweede der getallen, terwijl die deeling eene rest overlaat, die de eenheid minder is dan de tweede term der reeks; en de som der reeks bij die der getallen opgeteld is gelijk aan het product der beide uiterste getallen min driemaal het tweede?*

OPGELOST *door* D. HOOLA VAN NOOTEN, J. BASSAN, A. C. BELINFANTE, H. W. BLOEM, E. BOAS, S. T. BOAS, G. GRAAFLAND, C. F. JULIUS, J. KÖHLER, B. LUBBERS, A. DE MOL VAN OTTERLOO, J. SCHOTBORGH, Hz., M. G. SNOER, J. S. SPEIJER, J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz. *en* L. J. ULMAN.

OPLOSSING *van* D. HOOLA VAN NOOTEN.

Stellen wij de rekenkunstige reeks in het voorstel bedoeld, op de volgende wijze voor:

het 8ste + 2de getal door $x-3y$,
het 3de „ door $x-2y$,
het 5de „ door $x-y$,

het

(*) De spelling van den naam is door den opgever des Voorstels overgenomen uit de Amst. Cour. van 16 April 1831.

het 4de — 2de getal door x,
het 7de — 6de „ door $x+y$,
het 1ſte „ door $x+2y$,
het 7de — 2de „ door $x+3y$;
laat voorts het 2de getal door z
worden voorgeſteld, dan vinden wij achtervolgens dat
het 7de getal door $x+3y+z$,
het 6de „ door $2y+z$,
het 4de „ door $x+z$,
en het 8ſte „ door $x-3y-z$
wordt uitgedrukt, terwijl wij hierdoor voor de ſom der acht getallen vinden $6x+y+3z$; daar nu de ſom der reeks door $7x$ wordt uitgedrukt, hebben wij uit de bepaling van het verſchil der reeks, in het voorſtel opgegeven, de vergelijking

$$y=7x-(6x+y+3z)-(x-3y-z),$$

waaruit wij terſtond vinden

$$y=2z;$$

door deze waarde van y verandert de bovengevondene uitdrukking voor de ſom der acht getallen in $6x+5z$, welke, in $7x$ gedeeld wordende, geen ander quotient in geheelen kan opleveren, dan de eenheid, en daar dit quotient in geheelen gelijk moet zijn aan het tweede getal, hebben wij

$$z=1,$$

en bij gevolg $y=2$;
de laatſte bepaling des voorſtels geeft ons nog de vergelijking

$$7x+(6x+y+3z)=(x+2y)(x-3y-z)-3z,$$

welke, door ſubſtitutie der gevondene getallenwaarden voor y en z, na herleiding overgaat in

$$x^2-16x=36,$$

waaruit men vindt $x=18$ of $x=-2$; dewijl de negatieve waarde voor x geheel onbruikbaar is, hebben wij alleen

$$x=18,$$

en alsnu x, y en z bekend geworden zijnde, vinden wij
voor de 1ſte, 2de, 3de, 4de, 5de, 6de, 7de en 8ſte getallen,
reſpectievelijk 22, 1, 14, 19, 16, 5, 25 en 11,
die de letters V A N S P E Y K

aanwijzende, ons den naam doen kennen van den in het voorstel bedoelden onsterfelijken held.

Aanmerking. De bepaling in het voorstel voorkomende, omtrent de rest, die uit de deeling van de som der reeks door die der getallen overblijft, hebben wij in deze oplossing niet gebruikt; dezelve is dus geheel overtollig, doch daar zij naar behooren met de overige gegevens in overeenstemming is, kan zij slechts tot eene identieke vergelijking leiden, zoo als dan ook werkelijk het geval is; want

$$\frac{7x}{6x+5z}=1+\frac{x-5z}{6x+5z},$$

zijnde, is $x-5z$ de rest der opgegevene deeling, deze rest moet gelijk zijn aan den tweeden term der reeks met de eenheid verminderd, zoodat wij zouden hebben

$$x-5z=x-2y-1;$$

en hierin de reeds bepaalde waarden $z=1$ en $y=2$ stellende, zouden wij vinden

$$x-5=x-5,$$

welke vergelijking geen nut ter bepaling der waarde van x aanbrengt.

CXI. VOORSTEL.

Door F. van Heukelom, Jr.

Men vraagt naar drie getallen, zoodanig: 1°. dat, als bij het vierkant van het eerste, worden opgeteld de producten van het eerste met elk der beide laatsten, de som 36 zij; 2°. dat het vierkant van het tweede, gevoegd bij de producten van het tweede met het eerste en laatste, 48 uitmake; en 3°. dat het vierkant van het derde en de producten van het derde met elk der beide eersten te zamen 60 opleveren?

Opgelost door L. J. Ulman, A. C. Belinfante, H. W. Bloem, S. T. Boas, F. van Heukelom, Jr., D. Hoola van Nooten, C. F. Julius, J. Köhler, A. de Mol van Otterloo, J. S. Speijer, M. G. Snoer, E. Boas, S. Dik, Cornz., M. L. Gonde, G. Graafland, B. Lubbeek, C. van Schaick, J. Teixeira de Mattos, Bz. en W. Tor, Wz.

Oplossing van L. J. Ulman.

Stel de getallen door x, y en z voor, dan geeft het voorstel

de

de vergelijkingen

$$x^2+zy+xz=36 \text{ of } x(x+y+z)=36,$$
$$y^2+xy+yz=48 \;\; „ \;\; y(x+y+z)=48$$
en $$z^2+xz+yz=60 \;\; „ \;\; z(x+y+z)=60;$$

de som dezer vergelijkingen geeft

$$(x+y+z)^2=144,$$

of $$x+y+z=12;$$

deelende nu deze laatste vergelijking in elk der drie eersten, zoo komt er terstond

$$x=3,\ y=4 \text{ en } z=5.$$

CXII. VOORSTEL.

Door F. VAN HEUKELOM, JR.

Twee getallen te vinden, waarvan de som gelijk is aan een vierde van derzelver product; terwijl die som tot de som der vierkanten staat als 1 : 10?

OPGELOST *door* C. F. JULIUS, J. BASSAN, A. C. BELINFANTE, H. W. BLOEM, E. BOAS, S. T. BOSS, S. DIK, CORNZ., G. GRAAFLAND, Mr. L. GOEDE, F. VAN HEUKELOM, JR., D. HOOLA VAN NOOTEN, J. KÖHLER, B. LUBBERS, A. DE MOL VAN OTTERLOO, M. G. SNOEK, J. S. SPEIJER, J. TEIXEIRA DE MATTOS, BZ., W. TOP, WZ., L. J. ULMAN, I. WARNSINCK *en* C. VAN SCHAICK.

OPLOSSING *van* C. F. JULIUS.

Stellen wij de gevraagde getallen door $x+y$ en $x-y$ voor, dan geeft ons het voorstel de vergelijkingen:

$$2x=\tfrac{1}{4}(x^2-y^2) \text{ of } 8x=x^2-y^2,$$
en $$2x:2(x^2+y^2)=1:10 \text{ of } 10x=x^2+y^2;$$

van deze vergelijkingen de som en het verschil nemende, vinden wij $$18x=2x^2 \text{ en } 2x=2y^2;$$

uit de eerste volgt terstond $x=9$ en uit de tweede $y=\sqrt{x}=3$, zoodat de gevraagde getallen zijn

$$x+y=12 \text{ en } x-y=6.$$

CXIII. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Men verlangt eene rekenkunstige reeks van drie termen in geheele getallen te vinden, zoodanig, dat de som der reeks een volkomen vierkant zij, en dat, het verschil der beide uiterste termen door

de middelste gedeeld wordende, het quotient eene derde magt zij?

OPGELOST *door* A. C. BELINFANTE, C. VAN SCHAICK, J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz., J. BASSAN, J. S. SPEIJER, L. J. ULMAN, H. W. BLOEM, S. T. BOAS, S. DIK, CORNZ., M. L. GOEDE, D. HOOLA VAN NOOTEN, C. F. JULIUS, J. KÖHLER, B. LUBBERS, A. DE MOL VAN OTTERLOO, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, M. G. SNOER *en* W. TOP, Wz.

OPLOSSING *van* A. C. BELINFANTE.

Laat x, $x+y$, $x+2y$ de begeerde reeks zijn, dan moeten x en y zoodanig bepaald worden, dat $3x+3y$ eene tweede en $\frac{2y}{x+y}$ eene derde magt is; stellen wij hiertoe

$$3x+3y=p^2 \text{ en } \frac{2y}{x+y}=q^3,$$

dan vindt men, x en y uit deze vergelijkingen oplossende,

$$x=\frac{p^2(2-q^3)}{6} \text{ en } y=\frac{p^2q^3}{6},$$

zal nu x een geheel getal zijn, dan moet p^2 en bij gevolg ook p door 6 deelbaar wezen; daarenboven moet $q<2$ en dus, zoo men voor het begeerde quotient eene derde magt in geheele getallen verlangt, $q=1$ zijn; nemende dus $p=6r$ en $q=1$, zoo hebben wij

$$x=6r^2 \text{ en } y=6r^2,$$

waardoor de gestelde reeks overgaat in

$$6r^2, \; 12r^2 \text{ en } 18r^2,$$

welke nu voor alle waarden van r aan het voorstel voldoet; voor $r=2$ is deze reeks 24, 48 en 72.

CXIV. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Men vraagt de som der binomiaal coëfficiënten te vinden; dat is, de reeks $1+\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1.2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+$ *enz. te sommeren?*

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, D. HOOLA VAN NOOTEN, A. C. BELINFANTE, S. DIK, CORNZ., C. F. JULIUS, J. KÖHLER, J. S. SPEIJER, J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz., W. TOP, Wz., L. J. ULMAN, I. WARNSINCK *en* H. W. BLOEM.

Op-

OPLOSSING van W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

In het algemeen is voor alle waarden van n

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^{n-3}b^3 + enz.,$$

stelt men nu in deze uitdrukking $a=b=1$, dan vindt men terstond

$$2^n = 1 + \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} + enz.,$$

waaruit blijkt, dat de som der binomiaal coëfficienten, voor alle waarden van n, door 2^n wordt uitgedrukt.

Indien men de ontwikkeling van $(a+b)^n$ en van $(a-b)^n$ bij elkander optelt en van elkander aftrekt, en vervolgens $a=b=1$ stelt, zal men voor de dubbele som der even of onevene coëfficienten telkens 2^n vinden; zoodat deze sommen elk in het bijzonder gelijk zijn aan $\frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$.

AANMERKING van D. HOOLA VAN NOOTEN. Indien men in het algemeen eene m ledige uitdrukking tot de magt n verheft, dat is, indien men

$$(a+b+c+d+e+enz.)^n$$

ontwikkelt tot eene reeks van eenledige termen, zal door de stelling van $a=b=c=d=e=enz.=1$ die reeks overgaan in de som der coëfficienten, waarmede de termen der ontwikkeling zijn aangedaan, terwijl hierdoor de uitdrukking $(a+b+c+d+e+enz.)^n$ zelve verandert in m^n; en het is dus klaar, dat de som der coëfficienten, in de ontwikkeling der n^{de} magt van eene m ledige grootheid voorkomende, in het algemeen gelijk zal zijn aan m^n.

CXV. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Van eenen driehoek is gegeven de som der opstaande zijden, de tophoek, alsmede de lijn die uit den top naar het midden der basis is getrokken; men vraagt hieruit de deelen te berekenen, waarin de laatstgenoemde lijn den tophoek verdeelt? (*)

Op-

(*) Vergel. J. DE GELDER, *Beginselen der Meetkunst*, 2e d. pag. 285 ; 200 mede IV Deel dezer *Verzameling*, Voorstel No. 206.

Opgelost door H. W. Bloem, J. Bassan, W. J. C. Rammelman Elsevier, L. J. Ulman, A. C. Belinfante, S. Dik, Cornz., M. L. Goedé, D. Hoola van Nooten, C. F. Julius, J. Köhler, J. S. Speijer, J. Teixeira de Mattos, Bz. en W. Top, Wz.

Oplossing van H. W. Bloem.

Laat *Fig.* 43 den bedoelden driehoek voorstellen, waarin gegeven is

$$AC + BC = 2a, \text{ hoek } ACB = 2\alpha \text{ en } CD = b;$$

en stellen wij verder

$AC = a + x$, $BC = a - x$, hoek $ACD = \alpha - \phi$ en hoek $BCD = \alpha + \phi$, dan is, omdat AB het dubbeld van $AD = BD$ is,

$$\text{drieh. } ABC = 2 \times \text{drieh. } ADC,$$

of $\frac{1}{2}(a+x)(a-x) \, Sin. \, 2\alpha = b \, (a+x) \, Sin. \, (\alpha - \phi);$

en even zoo $\text{drieh. } ABC = 2 \times \text{drieh. } BDC,$

of $\frac{1}{2}(a+x)(a-x) \, Sin. \, 2\alpha = b \, (a-x) \, Sin. \, (\alpha + \phi);$

uit de eerste dezer vergelijkingen volgt

$$a - x = \frac{2 \, b \, Sin. \, (\alpha - \phi)}{Sin. \, 2\alpha},$$

en uit de tweede

$$a + x = \frac{2 \, b \, Sin. \, (\alpha + \phi)}{Sin \, 2\alpha},$$

de som hiervan nemende, komt er na deeling door 2

$$a = b \, . \, \frac{Sin. \, (\alpha + \phi) + Sin. \, (\alpha - \phi)}{Sin. \, 2\alpha},$$

of $$a = b \, . \, \frac{2 \, Sin. \, \alpha \, Cos. \, \phi}{2 \, Sin. \, \alpha \, Cos. \, \alpha} = b \, . \, \frac{Cos. \, \phi}{Cos. \, \alpha},$$

waaruit volgt

$$Cos. \, \phi = \frac{a}{b} \, Cos. \, \alpha;$$

door deze vergelijking ϕ bekend wordende, zijn ook de hoeken $ACD = \alpha - \phi$ en $BCD = \alpha + \phi$ gevonden.

CXVI. Voorstel.

Door M. H. Godefroi.

Iemand maakt bij uitersten wil aan vijf zijner vrienden A, B, C, D *en* E *eene zekere som van a guldens, welke zij zoodanig moeten deelen: dat, wanneer* A *aan elk der vier anderen zoo veel af-*

afgeeft als elk dezer te beurt gevallen is, en na deze deeling B *aan elk der vier anderen zoo veel afgeeft als elk derzelve na de afgifte van* A *in het geheel verkregen heeft, en daarna* C, *vervolgens* D *en eindelijk* E *insgelijks aan elk der vier anderen zoo veel afgeeft als zij na de laatstvoorgaande afgifte verkregen hebben, eindelijk de nalatenschap gelijkelijk zou verdeeld zijn. Men vraagt op welk eene wijze aan de meening des overledenen zal voldaan worden?* (*)

OPGELOST *door* M. H. GODEFROI, A. C. BELINFANTE, H. W. BLOEM, S. T. BOAS, S. DIK, CORNZ., M. L. GOEDE, D. HOOLA VAN NOOTEN, C. F. JULIUS, J. KÖHLER, B. LUBBERS, A. DE MOL VAN OTTERLOO, M. G. SNOER, J. S. SPEIJER, J TEIXEIRA DE MATTOS, BZ., W. TOP, WZ., L. J. ULMAN *en* I. WARNSINCK.

OPLOSSING *van* M. H. GODEFROI.

Dewijl na de afgifte van E de nalatenschap gelijkelijk verdeeld moet zijn, is hetgeen elk alsdan verkregen heeft juist een vijfde deel der nalatenschap; na de afgifte van E had dus

$$A, \tfrac{1}{5}a;\ B, \tfrac{1}{5}a;\ C, \tfrac{1}{5}a;\ D, \tfrac{1}{5}a \text{ en } E, \tfrac{1}{5}a;$$

voor de afgifte van E, was het deel van elk der vier overigen de helft van hetgeen na die afgifte was, en daar de som der vijf deelen bestendig gelijk a blijft, blijkt het dat voor de afgifte van E de aandeelen waren van

$$A, \tfrac{1}{10}a;\ B, \tfrac{1}{10}a;\ C, \tfrac{1}{10}a;\ D, \tfrac{1}{10}a \text{ en } E, \tfrac{6}{10}a;$$

voor de afgifte van D, was het aandeel van elk der vier overigen weder de helft van hetgeen zij na die afgifte hadden; voor de afgifte van D had dus

$$A, \tfrac{1}{20}a;\ B, \tfrac{1}{20}a;\ C, \tfrac{1}{20}a;\ D, \tfrac{11}{20}a \text{ en } E, \tfrac{6}{20}a;$$

even zoo vinden wij, dat voor de afgifte van C de aandeelen waren van

$$A, \tfrac{1}{40}a;\ B, \tfrac{1}{40}a;\ C, \tfrac{21}{40}a;\ D, \tfrac{11}{40}a \text{ en } E, \tfrac{6}{40}a;$$

voor de afgifte van B had dus

$$A, \tfrac{1}{80}a;\ B, \tfrac{41}{80}a;\ C, \tfrac{21}{80}a;\ D, \tfrac{11}{80}a \text{ en } E, \tfrac{6}{80}a;$$

en voor de afgifte van A

$$A, \tfrac{81}{160}a;\ B, \tfrac{41}{160}a;\ C, \tfrac{21}{160}a;\ D, \tfrac{11}{160}a \text{ en } E, \tfrac{6}{160}a;$$

het zijn derhalve deze aandeelen, die aan A, B, C, D en E uit de nalatenschap moeten gegeven worden, om aan de meening des overledenen te voldoen.

CXVII.

(*) J. DE GELDER, *Beginselen der Stelkunst*, bl. 254. Vraag 77.

CXVII. VOORSTEL.

Door M. H. GODEFROI.

Vijf aannemers moeten een werk afmaken : A *en* B *kunnen hetzelve in* 100 *dagen*, B *en* C *in* 120 *dagen*, C *en* D *in* 140 *dagen*, D *en* E *in* 160 *dagen en* E *en* A *in* 130 *dagen in gereedheid brengen; men vraagt, in hoe veel tijd zij hetzelve gezamenlijk zullen kunnen volbrengen, en welk gedeelte van het werkloon aan elk naar evenredigheid zijner verdiensten zal toekomen?* (*)

OPGELOST *door* C. F. JULIUS, A. C. BELINFANTE, H. W. BLOEM, S. T. BOAS, S. DIK; CORNZ., M. H. GODEFROI, M. L. GOEDE, D. HOOLA VAN NOOTEN, J. KÖHLER, B. LUBBERS, M. G. SNOEK, J. S. SPEIJER, J. TEIXEIRA DE MATTOS, BZ., W. TOP, WZ. *en* L. J. ULMAN.

OPLOSSING *van* C. F. JULIUS.

Stel dat A, B, C, D en E respectivelijk x, y, z, u en v guldens per dag verdienen, en laat het werkloon in het geheel w guldens bedragen, dan geeft het voorstel ons de vergelijkingen

$$100(x+y)=w \quad \text{of} \quad x+y=\frac{w}{100} \quad . \; . \; . \quad (1),$$

$$120(y+z)=w \quad \text{of} \quad y+z=\frac{w}{120} \quad . \; . \; . \quad (2),$$

$$140(z+u)=w \quad \text{of} \quad z+u=\frac{w}{140} \quad . \; . \; . \quad (3),$$

$$160(u+v)=w \quad \text{of} \quad u+v=\frac{w}{160} \quad . \; . \; . \quad (4),$$

$$130(v+x)=w \quad \text{of} \quad v+x=\frac{w}{130} \quad . \; . \; . \quad (5);$$

de som der vijf laatste vergelijkingen geeft, na deeling door 2,

$$x+y+z+u+v=\tfrac{8609}{436800}\,w \quad . \; . \; . \; . \quad (6),$$

dat is: te zamen verdienen zij iederen dag $\frac{8609}{436800}$ste deel van het geheele werkloon, en dus kunnen zij te zamen het geheele werk in $\frac{436800}{8609}$ of $50\frac{6350}{8609}$ dagen afmaken. Om nu ieders verdiensten per dag te vinden, trekken wij van de vergelijking (6) de som af van de vergelijkingen

(*) J. DE GELDER, *Beginselen der Stelkunst*, bladz. 251, Vraag 58.

(2) en (4), dan is de rest $x = \frac{2239}{436800} w$ . . (7),
die van (3) en (5), „ „ „ „ $y = \frac{2129}{436800} w$ . . (8),
„ „ (4) en (1), „ „ „ „ $z = \frac{1511}{436800} w$ . . (9),
„ „ (5) en (2), „ „ „ „ $u = \frac{1609}{436800} w$ . . (10),
„ „ (1) en (3), „ „ „ „ $v = \frac{1121}{436800} w$ . . (11);
en hieruit blijkt, dat het werkloon onder A, B, C, D en E evenredig aan de getallen 2239, 2129, 1511, 1609 en 1121 moet verdeeld worden.

Begeerde men nu nog te weten in hoe veel dagen elk alleen het werk zou kunnen afmaken, dan blijkt

uit (7), dat A hiertoe $\frac{436800}{2239}$ of $195\frac{195}{2239}$ dagen,
„ (8), „ B „ $\frac{436800}{2129}$ of $205\frac{355}{2129}$ „ ,
„ (9), „ C „ $\frac{436800}{1511}$ of $289\frac{121}{1511}$ „ ,
„ (10), „ D „ $\frac{436800}{1609}$ of $271\frac{761}{1609}$ „ ,
„ (11), „ E „ $\frac{436800}{1121}$ of $389\frac{731}{1121}$ „

noodig zoude hebben.

CXVIII. VOORSTEL.

Door M. H. GODEFROI.

Van vier getallen w, x, y en z gegeven zijnde $wxy = azs$, $xyz = bws$, $yzw = cxs$ en $zwx = dys$, in welke vergelijkingen s de onbekende som dier getallen beteekent, vraagt men deze getallen te vinden? (*)

OPGELOST *door* L. J. ULMAN, A. C. BELINFANTE, J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz., H. W BLOEM, S. T. BOAS, M. H. GODEFROI, D. HOOLA VAN NOOTEN, C. F. JULIUS, J. KÖHLER, J. S. SPEIJER *en* W. TOP, Wz.

OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

De vier gegevene vergelijkingen met elkander vermenigvuldigende, komt er

$$w^3 x^3 y^3 z^3 = abcdwxyzs^4,$$

of
$$w^2 x^2 y^2 z^2 = abcds^4,$$

waaruit volgt
$$wxyz = s^2\sqrt{abcd};$$

deze laatste vergelijking door elk der opgegevene deelende, vinden wij

$z =$

(*) J. DE GELDER, *Beginselen der Stelkunst*, bladz. 254, Vraag 75.

$$z = \frac{s\sqrt{abcd}}{az},\; w = \frac{s\sqrt{abcd}}{bw},\; x = \frac{s\sqrt{abcd}}{cx},\; y = \frac{s\sqrt{abcd}}{dy},$$

waaruit wij al verder hebben

$$z^2 = s\sqrt{\frac{bcd}{a}},\; w^2 = s\sqrt{\frac{acd}{b}},\; x^2 = s\sqrt{\frac{abd}{c}},\; y^2 = s\sqrt{\frac{abc}{d}},$$

of $z = \sqrt{s}\sqrt[4]{\frac{bcd}{a}},\; w = \sqrt{s}\sqrt[4]{\frac{acd}{b}},\; x = \sqrt{s}\sqrt[4]{\frac{abd}{c}},\; y = \sqrt{s}\sqrt[4]{\frac{abc}{d}}$ (A);

tellen wij deze vier vergelijkingen (A) bij elkander op, in het oog houdende dat $w + x + y + z$ door s is voorgesteld geworden, dan vinden wij voor de som

$$s = \left(\sqrt[4]{\frac{bcd}{a}} + \sqrt[4]{\frac{acd}{b}} + \sqrt[4]{\frac{abd}{c}} + \sqrt[4]{\frac{abc}{d}}\right).\sqrt{s},$$

en deze vergelijking door $\sqrt{s}$ deelende,

$$\sqrt{s} = \sqrt[4]{\frac{bcd}{a}} + \sqrt[4]{\frac{acd}{b}} + \sqrt[4]{\frac{abd}{c}} + \sqrt[4]{\frac{abc}{d}};$$

brengen wij eindelijk deze waarde voor $\sqrt{s}$ in de vergelijkingen (A) over, dan komt er

$$z = \sqrt{\frac{bcd}{a}} + \sqrt{cd} + \sqrt{bd} + \sqrt{bc},$$

$$w = \sqrt{cd} + \sqrt{\frac{acd}{b}} + \sqrt{ad} + \sqrt{ac},$$

$$x = \sqrt{bd} + \sqrt{ad} + \sqrt{\frac{abd}{c}} + \sqrt{ab},$$

en $$y = \sqrt{bc} + \sqrt{ac} + \sqrt{ab} + \sqrt{\frac{abc}{d}}.$$

CXIX. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Wanneer de vijf getallen, waardoor de straal des cirkels in eenen regthoekigen driehoek beschreven, de drie zijden van dien driehoek en deszelfs inhoud uitgedrukt worden, eene rekenkunstige reeks uitmaken, waarvan het getal, dat den inhoud voorstelt, op een na de kleinste term is, verlangt men dien driehoek te bepalen?

OPGELOST *door* B. LUBBERS, D. HOOLA VAN NOOTEN, L. J. ULMAN, A. C. BELINFANTE, H. W. BLOEM, S. DIK, CORNZ., M. L. GOEDE, C. F. JULIUS, J. KÖHLER, A. DE MOL VAN OTTERLOO, M. G. SNOEK, J. S. SPEIJER, J. TEIXEIRA DE MATTOS, BZ. en W. TOP, WZ.

Op-

OPLOSSING van B. LUBBERS.

De reeks zij x, $x+y$, $x+2y$, $x+3y$ en $x+4y$, dan is volgens de opgave $x+y$ de inhoud des driehoeks; het is vooruit klaar dat de kleinste term x de straal des ingeschreven cirkels; dat de grootste term $x+4y$ de hijpothenusa en dat de termen $x+2y$ en $x+3y$ de regthoekszijden zijn; door de eigenschap van den regthoekigen driehoek is

$$(x+2y)^2+(x+3y)^2=(x+4y)^2,$$

of na ontwikkeling en vereeniging van termen

$$x^2+2xy=3y^2,$$

waaruit volgt $\quad x=y \quad$ of $\quad x=-3y$;

daar de laatste waarde van x den vierden term van onze reeks zou doen verdwijnen, nemen wij alleen $x=y$ en hierdoor gaat die reeks over in

$$x,\ 2x,\ 3x,\ 4x,\ 5x;$$

omdat voorts de inhoud gelijk is aan het halve product der regthoekszijden, hebben wij

$$2x=6x^2,$$

waaruit volgt $\quad x=\frac{1}{3}$,

zoodat de reeks is $\quad \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{3}.$

Om deze reeks te vinden, hebben wij aan x geene andere eigenschap toegekend, dan dat zij de kleinste term der reeks moet zijn; de eigenschap dat x de straal des ingeschreven cirkels moet zijn, is ongebruikt gebleven; daar echter die straal gevonden wordt, door den omtrek des driehoeks in het dubbeld van den inhoud te deelen, hebben wij

$$x=\frac{2(x+y)}{3x+9y},$$

en de gevondene waarden $x=y=\frac{1}{3}$ aan deze vergelijking voldoende, blijkt het, dat de kleinste term der reeks indedaad de straal des ingeschreven cirkels is, en dat dus de zijden des begeerden driehoeks zijn

$$1,\ 1\tfrac{1}{3} \text{ en } 1\tfrac{2}{3}.$$

CXX. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

De vijf getallen, waardoor de middellijn des cirkels in zekeren regthoekigen driehoek beschreven, de drie zijden van dezen driehoek

en

en deszelfs inhoud worden uitgedrukt, stellen eene rekenkunstige reeks daar; men vraagt, welke afmetingen deze driehoek hebben kan, 1°. indien het getal, dat den inhoud voorstelt, de kleinste, en 2°. indien dat getal de grootste term der genoemde reeks is?

Opgelost *door* B. Lubbers, L. J. Ulman, A. C. Belinfante, H. W. Bloem, S. Dik, Cornz., M. L. Goede, D. Hoola van Nooten, C. F. Julius, J. Köhler, A. de Mol van Otterloo, M. G. Snoer, J. S. Speijer, J. Teixeira de Mattos, Bz. *en* W. Top, Wz.

Oplossing *van* B. Lubbers.

De reeks voorstellende door $x-2y$, $x-y$, x, $x+y$ en $x+2y$, is voor het eerste geval $x-2y$ de inhoud des driehoeks, $x-y$ de middellijn des ingeschreven cirkels, x en $x+y$ zijn de regthoekszijden en $x+2y$ is de hypothenusa; door de eigenschap der regthoekige driehoeken is alzoo

$$x^2+(x+y)^2=(x+2y)^2,$$

of, na ontwikkeling en vereeniging van termen,

$$x^2-2xy=3y^2,$$

waaruit volgt $\quad x=3y$ of $x=-y$;

omdat de laatste waarde van x de vierde term der reeks zou doen verdwijnen, nemen wij alleen $x=3y$, en hierdoor gaat onze reeks over in

$$y,\ 2y,\ 3y,\ 4y,\ 5y;$$

daar voorts de inhoud gelijk is aan het halve product der regthoekszijden, hebben wij

$$y=6y^2,$$

waaruit volgt $\quad y=\frac{1}{6}$,

zoodat de reeks is $\quad \frac{1}{6},\ \frac{2}{6},\ \frac{3}{6},\ \frac{4}{6},\ \frac{5}{6}$;

op gelijke wijze als in het vorige voorstel, is de voorwaarde, dat de term $x-y$ de middellijn des ingeschreven cirkels moet zijn, ongebruikt gebleven; maar die middellijn gevonden wordende, wanneer men viermalen den inhoud door den omtrek deelt, hebben wij

$$x-y=\frac{4(x-2y)}{3x+3y},$$

en dewijl de gevondene waarden $y=\frac{1}{6}$ en $x=3y=\frac{1}{2}$ aan deze vergelijking voldoen, blijkt het dat de tweede term indedaad de mid-

middellijn des ingeschreven cirkels is; voor het eerste geval worden dus de zijden des driehoeks bepaald door de getallen $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{6}$ en $\frac{5}{6}$.

Stellen wij voor het tweede geval de reeks wederom voor door $x-2y$, $x-y$, x, $x+y$ en $x+2y$, dan is nu $x-2y$ de middellijn, $x-y$ en x zijn de regthoekszijden, $x+y$ is de hypothenusa en $x+2y$ de inhoud, wij hebben dus vooreerst

$$(x-y)^2+x^2=(x+y)^2,$$

of $$x^2=4xy,$$

en $$x=4y,$$

waardoor de reeks overgaat in

$$3y,\ 3y,\ 4y,\ 5y,\ 6y;$$

de berekening van den inhoud geeft dus

$$6y=6y^2,$$

waaruit volgt $$y=1,$$

zoodat de reeks is $$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6;$$

de voorwaarde dat $x-2y$ de middellijn des ingeschreven cirkels is, zoude nog geven de vergelijking

$$x-2y=\frac{4(x+2y)}{3x};$$

maar de gevondene waarden $y=1$ en $x=4y=4$ voldoen aan deze vergelijking, derhalve voldoet de gevondene reeks aan de voorwaarden, en alzoo worden voor het tweede geval de zijden des driehoeks bepaald door de getallen 3, 4 en 5.

CXXI. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Men wenscht eenen regthoekigen driehoek te vinden, waarvan de zijden door rationale getallen kunnen worden voorgesteld, en waarbij het aantal lengte-eenheden, in de kortste regthoeks-zijde begrepen, gelijk is aan het aantal vierkante eenheden van den inhoud?

OPGELOST *door* J. KÖHLER, L. J. ULMAN, A. C. BELINFANTE, H. W. BLOEM, S. DIK, CORNZ., D. HOOLA VAN NOOTEN, C. F. JULIUS, B. LUBBERS, A. DE MOL VAN OTTERLOO, M. G. SNOER, J. S. SPEIJER, W. TOP, WZ., E. BOAS, S. T. BOAS, M. L. GORDE *en* J. TEIXEIRA DE MATTOS, BZ.

I. OPLOSSING *van* J. KÖHLER.

Stellen wij de langste regthoekszijde voor door x en de kortste door y, dan geeft het voorstel de vergelijking

$$\tfrac{1}{2}xy = y,$$

waaruit terstond volgt $x = 2$;
daar nu $y < x$ moet zijn, kunnen wij stellen

$$y = 2 - z,$$

de som van de vierkanten der regthoekszijden is alsdan

$$(2 - z)^2 + 4,$$

en ons blijft niets anders over, dan voor z eene waarde kleiner dan 2 zoodanig te bepalen, dat deze uitdrukking een volkomen vierkant worde; stellen wij voor den wortel uit dit vierkant $z - 2p$, dan moet

$$(2 - z)^2 + 4 = (z - 2p)^2$$

zijn, en hieruit z oplossende, vinden wij

$$z = \frac{p^2 - 2}{p - 1},$$

hierdoor wordt

$$y = 2 - z = 2 - \frac{p^2 - 2}{p - 1} = \frac{p(2 - p)}{p - 1},$$

waaruit blijkt, dat $p < 2$ en $p > 1$ genomen moet worden, omdat anders y negatief of $z > 2$ zoude worden; men kan dus voor p alle mogelijke waarden tusschen 1 en 2 nemen, om voor de kortste regthoekszijde y eene waarde te vinden, die met de langste regthoekszijde $x = 2$ aan het voorstel voldoet; voor $p = 1\tfrac{1}{2}$, vindt men $y = 1\tfrac{1}{2}$ en de zijden des driehoeks zijn alsdan $1\tfrac{1}{2}$, 2 en $2\tfrac{1}{2}$.

II. Oplossing van L. J. Ulman.

Omdat (zoo als in de vorige oplossing gebleken is) de langste regthoekszijde door het getal 2 moet worden voorgesteld, behoeft men slechts eenen willekeurigen regthoekigen driehoek te nemen, welks zijden in rationale getallen zijn uitgedrukt, en deze getallen te deelen door de helft van de langste regthoekszijde; dan zullen de quotienten de zijden eens driehoeks zijn, die aan de vraag voldoet; want deze quotienten blijven tot eenen regthoekigen driehoek behooren, zij blijven rationaal, en dat, hetwelk de langste regthoekszijde voorstelt, wordt daardoor gelijk aan 2

CXXII. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Men vraagt naar drie eerste getallen, wier som door de som der drie eerste getallen deelbaar en bovendien een vierkant zij?

Opgelost *door* B. Lubbers, D. Hoola van Nooten, C. F. Julius, J. Bassan, S. Dik, Cornz., L. J. Ulman *en* W. Top, Wz.

I. Oplossing *van* B. Lubbers.

Daar men drie ondeelbare getallen begeert, waarvan de som, door de drie eerste getallen, namelijk door 2, 3 en 4 deelbaar is, zal die som noodzakelijk van den vorm $12a = 4 \times 3a$ moeten zijn; dewijl deze som bovendien een vierkant zijn moet, kan men voor a geene andere waarde nemen, dan eene zoodanige, die $3a$ tot een vierkant maakt; hieraan voldoet $a = 3$ en alsdan wordt de som der drie ondeelbare getallen 36. Nu zijn de ondeelbare getallen, die kleiner dan 36 zijn,

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 en 31,

waarvan 2, 3 en 31 of 2, 5 en 29 of 2, 11 en 23 aan het gevraagde voldoen.

Aanmerking. Indien men voor a andere waarden neemt, die $3a$ tot een volkomen vierkant maken, bij voorbeeld, $a = 12$, $a = 27$, *enz.* zal men zoo vele antwoorden op het voorstel kunnen verkrijgen als men goedvindt; maar omdat de som der drie ondeelbare getallen, door $12a$ voorgesteld, altijd even is, zullen dezelve niet alle drie oneven kunnen zijn, en dewijl 2 het eenige evene ondeelbare getal is, zal alzoo, bij al de antwoorden, die men kan bekomen, altijd 2 een der drie verlangde getallen wezen.

II. Oplossing *van* D. Hoola van Nooten.

Het voorstel is dien zin opvattende, dat men drie ondeelbare getallen verlangt, waarvan de som, een vierkant zijnde, door elk der drie ondeelbare getallen zelve deelbaar is, stellen wij die drie ondeelbare getallen door x, y en z voor; zal nu de som dezer getallen door x, y en z deelbaar zijn, dan moet die som kennelijk van den vorm $pxyz$ zijn; deze som kan, daar x, y en z ondeelbare getallen zijn, geen volkomen vierkant worden, dan

 in-

in de onderstelling dat $p = q^2 xyz$, of $p = r^2 x$ en $y = z$ is; is $p = q^2 xyz$, dan hebben wij

$$x + y + z = q^2 x^2 y^2 z^2,$$

maar alsdan is het onmogelijk, dat x, y en z drie *verschillende* geheele getallen zouden zijn, want voor x, y en z, 1, 2 en 3 nemende, wordt reeds $x^2 y^2 z^2 > x + y + z$, en dit zou voor grootere waarden van x, y en z des te meer plaats hebben; wij moeten dus de tweede onderstelling, namelijk $p = r^2 x$ en $y = z$, aannemen; alsdan wordt de som der drie getallen

$$x + 2y;$$

zal nu deze som door de getallen zelve, dat is door x en y, deelbaar zijn, dan moeten

$$\frac{x + 2y}{x} = 1 + \frac{2y}{x}$$

en

$$\frac{x + 2y}{y} = \frac{x}{y} + 2$$

geheele getallen zijn; hieraan kan nu niet anders voldaan worden, dan door $x = y$ of $x = 2y$ te nemen; voor $x = y$ wordt de som der getallen $3x$, en om deze som tot een vierkant te maken, kan men voor x geen ander ondeelbaar getal dan 3 nemen, zoodat wij alsdan hebben

$$x = y = z = 3;$$

voor $x = 2y$ wordt de som der getallen $4y$, en deze kan door geen andere ondeelbare waarde voor y, dan door $y = 1$ tot een vierkant gemaakt worden; in dit geval hebben wij dus

$$x = 2y = 2 \text{ en } y = z = 1;$$

weshalve de verlangde getallen zijn 3, 3 en 3 of 2, 1 en 1.

CXXIII. Voorstel.

Door J. Bassan.

Eenen driehoek te berekenen, als gegeven zijn een der hoeken en het getal lengte-eenheden in de overstaande zijde begrepen; terwijl men bovendien weet, dat de omtrek even veel lengte-eenheden als de inhoud vierkante eenheden bevat?

Opgelost *door* J. Bassan, S. Dik, Cornz., A. C. Belinfante, H. W. Bloem, D. Hoola van Nooten, C. F. Julius, J. Teixeira de Mattos, Bz., W. Top, Wz., L. J. Ulman *en* M. L. Goedr.

I.

I. Oplossing van J. Bassan.

Stel de gegevene zijde door a, den gegeven hoek door 2α, de onbekende zijden door x en y, en het verschil der onbekende hoeken door 2ϕ voor, dan worden deze onbekende hoeken zelve uitgedrukt door $90° - (\alpha + \phi)$ en $90° - (\alpha - \phi)$; wij hebben derhalve

$$\frac{a}{Sin.\,2\,\alpha} = \frac{x}{Sin.\,(90° - (\alpha + \phi))} = \frac{y}{Sin.\,(90° - (\alpha - \phi))},$$

waaruit terstond volgt

$$x = \frac{a\,Cos.\,(\alpha + \phi)}{Sin.\,2\,\alpha} \text{ en } y = \frac{a\,Cos.\,(\alpha - \phi)}{Sin.\,2\,\alpha};$$

daar nu de omtrek des driehoeks door $a + x + y$ en deszelfs inhoud door $\frac{1}{2}\,x\,y\,Sin.\,2\,\alpha$ wordt voorgesteld, geeft het voorstel de vergelijking

$$a + \frac{a\,Cos.(\alpha + \phi)}{Sin.\,2\,\alpha} + \frac{a\,Cos.\,(\alpha - \phi)}{Sin.\,2\,\alpha} = \frac{a^2\,Cos.\,(\alpha + \phi)\,Cos.\,(\alpha - \phi)}{2\,Sin.\,2\,\alpha}$$

of $2\,Sin.\,2\alpha + 2\,Cos.(\alpha + \phi) + 2\,Cos.(\alpha - \phi) = a\,Cos.(\alpha + \phi)\,Cos.(\alpha - \phi)$; hetgeen, omdat in het algemeen

$$Sin.\,2\,\alpha = 2\,Sin.\,\alpha\,Cos.\,\alpha,$$

$$Cos.(\alpha + \phi) + Cos.(\alpha - \phi) = 2\,Cos\,\alpha\,Cos.\,\phi,$$

en $$Cos.(\alpha + \phi)\,Cos.(\alpha - \phi) = Cos^2.\,\phi - Sin^2.\,\alpha$$

is, dadelijk overgaat in

$$4\,Sin.\,\alpha\,Cos.\,\alpha + 4\,Cos.\,\alpha\,Cos.\,\phi = a\,(Cos^2.\,\phi - Sin^2.\,\alpha),$$

of $$Cos^2.\,\phi - \frac{4\,Cos.\,\alpha}{a}\,Cos.\,\phi = Sin^2.\,\alpha + \frac{4\,Sin.\,\alpha\,Cos.\,\alpha}{a};$$

uit welke vierkantsvergelijking gevonden wordt

$$Cos.\,\phi = \frac{2\,Cos.\,\alpha}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{4\,Cos^2.\,\alpha}{a^2} + \frac{4\,Sin.\,\alpha\,Cos.\,\alpha}{a} + Sin^2.\,\alpha\right)},$$

$$Cos.\,\phi = \frac{2\,Cos.\,\alpha}{a} \pm \left(\frac{2\,Cos.\,\alpha}{a} + Sin.\,\alpha\right),$$

dat is: $Cos.\,\phi = \frac{4\,Cos.\,\alpha}{a} + Sin.\,\alpha$ of $Cos.\,\phi = -\,Sin.\,\alpha$;

uit de tweede waarde voor $Cos.\,\phi$ zou terstond volgen $\phi = \alpha - 90°$, zoodat alsdan de zijde y en de tegen over die zijde staanden hoek beide gelijk nul zouden zijn, alleen de eerste waarde voor $Cos.\,\phi$ beantwoordt dus aan de bedoeling des voorstels, terwijl ϕ hierdoor bepaald zijnde, de zijden des driehoeks mede bekend worden.

II. Oplossing van S. Dik, Corn.

Dezelfde letters als in de vorige oplossing gebruikende, hebben wij uit het voorstel de vergelijking

$$a+x+y=\frac{1}{2}xy\,Sin.\,2\,\alpha,$$

terwijl de eigenschappen des driehoeks in het algemeen nog geven

$$a^2-x^2-y^2=-2\,xy\,Cos.\,2\,\alpha;$$

tellende nu deze laatste vergelijking bij het vierkant der eerste op, dan komt er

$$2a^2+2ax+2ay+2xy=\frac{1}{4}x^2y^2\,Sin^2.\,2\,\alpha-2\,xy\,Cos.\,2\,\alpha,$$

of, daar $2a^2+2ax+2ay=2a(a+x+y)$ en $a+x+y=\frac{1}{2}xy\,Sin.\,2\,\alpha$ is,

$$a\,xy\,Sin.\,2\,\alpha+2\,xy=\frac{1}{4}x^2y^2\,Sin^2.\,2\,\alpha-2\,xy\,Cos.\,2\,\alpha;$$

omdat nu uit den aard der zaak xy niet gelijk nul zijn kan, hebben wij, door xy deelende en met 4 vermenigvuldigende,

$$4\,a\,Sin.\,2\,\alpha+8=xy\,Sin^2.\,2\,\alpha-8\,Cos.\,2\,\alpha,$$

waaruit volgt

$$xy=\frac{8-8\,Cos.\,2\,\alpha+4\,a\,Sin.\,2\,\alpha}{Sin^2.\,2\,\alpha};$$

alzoo xy bekend wordende, is ook uit de eerste vergelijking

$$x+y=\frac{1}{2}xy\,Sin.\,2\,\alpha-a$$

bekend; stellende dus kortheidshalve $x+y=p$ en $xy=q$, zijn x en y de wortels van de vierkantsvergelijking

$$X^2-pX+q=0,$$

waardoor derhalve de geheele driehoek bepaald is.

CXXIV. Voorstel.

Door G. Brandstedeb.

Een regtstandige cylinder, welks lengte staat tot de dikte als 16 *tot* 3, *wordt met een touw lang* $\sqrt{222865}$ *Nederlandsche duimen, in* 25 *gelijke omslingeringen, van boven tot beneden omwonden; men vraagt hieruit de lengte en dikte des cilinders te berekenen?*

Opgelost *door* G. Brandstedeb, H. W. Bloem, S. Dik, Cornz., D. Hoola van Nooten, C. F. Julius, J. Köhler, L. J. Ulman, J. Bassan *en* W. Top, Wz. 4

Oplossing *van* G. Brandstedeb.

Indien wij het ronde opp rvlak des cylinders 25 malen achter ei-

elkander over een plat vlak uitrollen, verkrijgen wij eenen regthoek, die de hoogte des cylinders en het 25 voud van de omtrek van deszelfs grondvlak tot zijden heeft, en waarvan de gegevene lengte van het touw de diagonaal is; stellen wij nu de hoogte des cylinders in duimen uitgedrukt door $16x$ voor, dan is $3x$ deszelfs dikte en $3\pi x = 3 \times \frac{314}{100} x = \frac{471}{50} x$ de omtrek des grondvlaks; de zijden van den bedoelden regthoek zijn dus $16x$ en $\frac{471}{2} x$ en, daar de som van de vierkanten dezer zijden gelijk is aan het vierkant van de diagonaal, hebben wij

$$222865 = (16x)^2 + (\tfrac{471}{2} x)^2,$$
$$222865 = 256\, x^2 + \tfrac{221841}{4} x^2,$$
$$4 \times 222865 = 1024 x^2 + 221841\, x^2,$$

of
$$4 \times 222865 = 222865 x^2,$$

waaruit volgt $x^2 = 4$ en $x = 2$;

bij gevolg is de hoogte des cijlinders of $16x = 32$ duimen; en deszelfs dikte of $3x = 6$ duimen.

CXXV. VOORSTEL.

Door J. BADON GHIJBEN.

Drie punten gegeven zijnde, vraagt men in hetzelfde vlak een vierde punt te vinden, zoodanig, dat als men door deze punten, op alle mogelijke wijzen drie aan drie genomen, cirkels brengt, de stralen dier cirkels aan elkander gelijk zullen zijn?

OPGELOST *door* J. BADON GHIJBEN, L. J. ULMAN, J. BASSAN, D. HOOLA VAN NOOTEN *en* C. F. JULIUS.

OPLOSSING *van* J. BADON GHIJBEN.

Laat A, B en C (*Fig.* 44) de drie gegevene punten zijn en brengen wij door dezelve eenen cirkel, dan is het vooreerst klaar, dat elk punt, in den omtrek van dien cirkel gelegen, voor het begeerde vierde punt kan genomen worden; er blijft dus nog slechts over te onderzoeken, of er buiten den omtrek des cirkels ABC ook nog punten bestaan, en zoo ja welke, die aan de vraag voldoen.

De stralen der in het voorstel bedoelde cirkels moeten klaarblijkelijk alle gelijk zijn aan den straal r des cirkels ABC; behalve den cirkel ABC kunnen wij door de punten A en B slechts nog eenen cirkel APB brengen, welks straal gelijk r is, en deze cirkel zal dan den cirkel ABC in A en B snijden, terwijl alsdan

boog APB + *boog* AP′B = 360° is; bestaat er nu nog een vierde punt dat aan de vraag voldoet, dan moet hetzelve noodwendig in den omtrek des cirkels ABP liggen; door de punten B en C kan insgelijks nog slechts eenen cirkel BCQ, welks straal gelijk *r* is, gebragt worden; deze cirkel zal den cirkel ABC in B en C snijden, en wederom zal *boog* BQC + *boog* BQ′C = 360° zijn; het begeerde vierde punt zal nu ook op den omtrek des cirkels BCQ moeten gelegen zijn, en kan bij gevolg geen ander zijn, dan het snijpunt D der cirkels ABP en BCQ; brengt men nu door A, C en D eenen cirkel en is deszelfs straal dan gelijk *r*, zoo zal het punt D indedaad het begeerde vierde punt zijn, maar is die straal niet gelijk *r*, zoo zal er zoodanig vierde punt buiten den omtrek van ABC niet bestaan.

Laat nu *x* de straal des cirkels ACD zijn, trekken wij de lijnen AB, BC, CA, AD, BD en CD, en nemen wij in aanmerking, dat de straal eens cirkels, om eenen driehoek beschreven, gelijk is aan eene der zijden van dien driehoek gedeeld door twee malen de sinus van den overstaanden hoek, dan hebben wij

$$r = \frac{AC}{2\,Sin.\,ABC} \text{ en } x = \frac{AC}{2\,Sin.\,ADC},$$

waaruit volgt $r : x = Sin.\,ADC : Sin.\,ABC$;

nu is $boog\,APB + boog\,AP'B = 360$,

en daar *hoek* ADB door de helft van *boog* APB, gelijk mede *hoek* ACB door de helft van *boog* AP′B gemeten wordt

$$hoek\,ADB + hoek\,ACB = 180°,$$

even zoo is $hoek\,CDB + hoek\,CAB = 180°$;

tellen wij deze vergelijkingen bij elkander op, in het oog houdende dat

$$hoek\,ADB + hoek\,CDB = 360° - hoek\,ADC$$

en $hoek\,ACB + hoek\,CAB = 180° - hoek\,ABC$

is, dan komt er

$$360° - hoek\,ADC + 180° - hoek\,ABC = 360°,$$

of $hoek\,ADC = 180° - hoek\,ABC$,

en dus is $Sin.\,ADC = Sin.\,ABC$,

weshalve uit de boven gevondene evenredigheid blijkt, dat $x = r$ en het snijpunt D werkelijk een vierde punt is, dat aan de gevraagde voorwaarde voldoet.

Om-

Omdat twee gelijke cirkels van elkander gelijke boogen affnijden, hebben wij de gelijkheid der volgende hoeken, als wordende dezelve door de helften van gelijke boogen gemeten, namelijk

$$hoek\,BAD = hoek\,BCD,$$
$$hoek\,ACD = hoek\,ABD,$$
en
$$hoek\,CBD = hoek\,CAD,$$

waarvan de fom is

$$hoek\,BAD + hoek\,ACD + hoek\,CBD = hoek\,BCD + hoek\,AED + hoek\,CAD;$$

maar de fom van de beide leden dezer vergelijking is 180°, als makende juist de fom van de hoeken des driehoeks ABC uit, dus is elk dier leden in het bijzonder gelijk aan 90°, en wij hebben

$$hoek\,BAD + hoek\,ACD + hoek\,CBD = 90,$$

ftellen wij nu in plaats van *hoek* BAD wederom de daaraan gelijke *hoek* BCD, zoo wordt de laatfte vergelijking

$$hoek\,ACB + hoek\,CBD = 90°,$$

indien wij dus BD verlengen, tot zij AC in R fnijdt, is de fom van twee hoeken des driehoeks BRC gelijk aan 90°; de derde hoek, namelijk *hoek* BRC, moet dus regt zijn, weshalve BD en AC elkander regthoekig fnijden; even zoo blijkt, dat AD regthoekig door BC, en CD regthoekig door AB gaat, het gezochte punt D is dus geen ander, dan het onderlinge fnijpunt van de loodlijnen, die, in den driehoek ABC, uit de hoekpunten op de overftaande zijden worden nedergelaten, en is bij gevolg door conftructie zeer gemakkelijk te bepalen.

Aanmerkingen. Waren de punten A, B en D de gegevene, dan zou C het begeerde vierde punt zijn; dit punt C is dan ook werkelijk het onderlinge fnijpunt der loodlijnen, die uit de hoekpunten des driehoeks ABD op de overftaande zijden worden getrokken.

Liggen de gegevene punten zoodanig, dat de driehoek ABC, bij voorbeeld, in B, regthoekig wordt, dan valt het punt D in B, en in dat geval beftaat er geen vierde punt dat aan de vraag voldoet, met uitzondering van de punten, die in den omtrek des cirkels om ABC befchreven, gelegen zijn.

Voorts valt het punt D binnen of buiten den driehoek ABC, naar gelang die driehoek fcherp- of ftomphoekig is; indien de driehoek ABC gelijkzijdig is, valt het punt D klaarblijkelijk in

het middelpunt des om ABC beschreven cirkels; zijnde het eindelijk klaar dat de drie gegevene punten niet in eene regte lijn mogen liggen.

CXXVI. VOORSTEL.

Door J. BADON GHIJBEN.

De meetkunstige plaats te vinden van de middelpunten der cirkels, beschreven in alle regthoekige driehoeken, die dezelfde schuinsche zijde gemeen hebben?

OPGELOST *door* D. HOOLA VAN NOOTEN, J. BASSAN, B. LUBBERS, W. TOP, Wz., L. J. ULMAN *en* L. WARNSINCK.

OPLOSSING *van* D. HOOLA VAN NOOTEN.

Laat (*Fig.* 45) AC de schuinsche zijde zijn, die aan al de regthoekige driehoeken gemeen is, beschrijven wij dan op AC als middellijn eenen cirkel, dan zal het hoekpunt van den regten hoek der driehoeken in den omtrek van dien cirkel liggen; zij ABC een dezer driehoeken, beschrijven wij daarin den cirkel abc, uit welks middelpunt O wij de loodlijnen Oa, Ob, Oc op de zijden des driehoeks ABC trekken, dan zullen wij de meetkunstige plaats van dat punt O moeten bepalen. Nemen wij hiertoe A voor oorsprong der regthoekige coördinaten, en AC voor as der abscissen aan, en stellen wij $AC=2r$, $Ac=x$, $Oc=y$, dan is ook $Oa=Ob=Oc=y$; verder is

$$AB=Aa+aB=Ac+Ob=x+y,$$

en

$$BC=Cb+bB=Cc+Oa=2r-x+y,$$

deze waarden stellende in de vergelijking

$$AC^2=AB^2+BC^2,$$

komt er

$$4r^2=(x+y)^2+(2r-x+y)^2,$$

of na herleiding

$$x^2-2rx+y^2+2ry=0,$$

en deze vergelijking schrijvende in de gedaante

$$(x-r)^2+(y+r)^2=2r^2,$$

zien wij terstond, dat dezelve eenen cirkel aanwijst die $r\sqrt{2}$ tot straal heeft, en waarvan het middelpunt, $-r$ en r tot coördinaten hebbende, juist op de helft M van den halven omtrek AMC is gelegen; daar nu $AM=r\sqrt{2}$ is, zullen wij slechts uit M, met $AM=CM$ als straal, eenen boog AOC behoeven te beschrijven, welke boog alsdan de gevraagde meetkunstige plaats is.

AAN-

AANMERKING. Indien AC (*Fig.* 46) de koorde van eenen cirkel is, en men op die zelfde koorde als bazis verschillende driehoeken ABC plaatst, alle den top B in den omtrek des boogs ABC hebbende, dan zal insgelijks de meetkunstige plaats van de middelpunten der cirkels in die driehoeken beschreven gevonden worden, indien men, uit het midden M van den boog AMC, met AM = CM als straal, eenen boog AOC beschrijft; en voor elken driehoek ABC zal het middelpunt des ingeschreven cirkels, in het snijpunt O, van de lijn BM met dien boog, vallen; want uit de gelijkheid der boogen AM en MC volgt terstond die der hoeken ABM en CBM, weshalve BM de hoek ABC midden door deelt; en trekkende AO heeft men *hoek* OAC = ½ *hoek* OMC, omdat beide op de boog OC staan, de eerste met het hoekpunt in den omtrek en de tweede met het hoekpunt in het middelpunt des cirkels AOC, maar *hoek* OMC = *hoek* BAC zijnde, omdat beide door de helft des boogs BC gemeten worden, is ook *hoek* OAC = ½ *hoek* BAC, zoodat AO de hoek BAC midden door deelt, waaruit klaarblijkelijk volgt, dat O het middelpunt is van den cirkel in driehoek ABC beschreven.

CXXVII. VOORSTEL.

Door J. BADON GHIJBEN.

De cosinus van een evenmatig deel des halven cirkelomtreks kan altijd gevonden worden, door eene hoogere magtsvergelijking, waarvan eenè der wortels de gezochte cosinus is, en waarvan de coëfficiënten functiën zijn van het getal, dat aanduidt welk gedeelte des halven omtreks men genomen heeft. Men vraagt zulks aan te toonen?

OPGELOST *door* D. HOOLA VAN NOOTEN, J. BADON GHIJBEN *en* L. J. ULMAN.

I. OPLOSSING *van* D. HOOLA VAN NOOTEN.

In de bekende reeks

$$Cos.nx = 2^{n-1}Cos.^{n}x - \frac{n}{1}.2^{n-3}Cos.^{n-2}x + \frac{n(n-3)}{1.2}2^{n-5}Cos.^{n-4}x - enz. (*)$$

behoeft men slechts te stellen $nx = \pi$ of $x = \frac{\pi}{n}$, dan zal de komende vergelijking

—1

(*) Zie J. DE GELDER, *Beginselen der Meetkunst*, 3e druk, §. 989.

$$-1 = 2^{n-1}\,Cos^{n}\,\frac{\pi}{n} - \frac{n}{1}\,2^{n-3}\,Cos.^{n-2}\,\frac{\pi}{n} + \frac{n(n-3)}{1\,.\,2}\,.2^{n-5}\,Cos.^{n-4}\,\frac{\pi}{n} - enz.$$

de in het voorstel bedoelde hoogere magtsvergelijking zijn.

II. Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Stellende kortheidshalve $Cos.\frac{\pi}{n+2} = c$ en $Sin.\frac{\pi}{n+2} = s$, hebben wij

$$2sc = 2\,Sin.\frac{\pi}{n+2}\,Cos.\frac{\pi}{n+2} = Sin.\frac{2\pi}{n+2} = Sin.(\pi - \frac{2\pi}{n+2}) = Sin.n(\frac{\pi}{n+2}),$$

of, indien wij $Sin.\,n(\frac{\pi}{n+2})$ door de bekende reeks voor $Sin.nx$ ontwikkelen, en daarbij ter bekorting de binomiaal-coëfficienten door $\binom{1}{n}$, $\binom{2}{n}$, $\binom{3}{n}$, *enz.* voorstellen,

$$2sc = \binom{1}{n}c^{n-1}s - \binom{3}{n}c^{n-3}s^3 + \binom{5}{n}c^{n-5}s^5 - \binom{7}{n}c^{n-7}s^7 + enz.;$$

deelen wij nu de laatste vergelijking door sc en schrijven wij daarna in dezelve overal $1-c^2$ in plaats van s^2, dan komt er

$$2 = \binom{1}{n}c^{n-2} - \binom{3}{n}c^{n-4}(1-c^2) + \binom{5}{n}c^{n-6}(1-2c^2+c^4) -$$
$$\binom{7}{n}c^{n-7}(1-3c^2+3c^4-c^6) + enz.$$

of, na alles ontwikkeld te hebben,

$$\begin{aligned} 2 = &\left\{\binom{1}{n}+\binom{3}{n}+\binom{5}{n}+\binom{7}{n}+enz.\right\}c^{n-2} \\ &-\left\{\binom{3}{n}+2\binom{5}{n}+3\binom{7}{n}+4\binom{9}{n}+enz.\right\}c^{n-4} \\ &+\left\{\binom{5}{n}+3\binom{7}{n}+6\binom{9}{n}+10\binom{11}{n}+enz.\right\}c^{n-6} \\ &-\left\{\binom{7}{n}+4\binom{9}{n}+10\binom{11}{n}+20\binom{13}{n}+enz.\right\}c^{n-8} \\ &+enz. \end{aligned}$$

de wet van voortgang is in deze laatste uitdrukking zeer duidelijk; en voor eenige geheele positieve waarde van n zal dezelve altijd uit een bepaald getal termen bestaan; zij is dus altijd eene wezenlijke hoogere magtsvergelijking, waarin $c = Cos.\frac{\pi}{n+2}$ de onbekende is en welks coëfficienten alle van het getal n en dus ook van $n+2$ afhangen.

Aanmerking. De vergelijking in de laatste oplossing verkregen, en die alleen voor $n=0$ of $n=2$ onbruikbaar wordt, is al

altijd twee of drie graden lager, dan die der eerste oplossing; daar echter beide vergelijkingen, indien men slechts voor n in de laatste een getal neemt dat 2 kleiner is, dan het getal dat n in de eerste voorstelt, dezelfde onbekende bevatten, zoo zullen dezelve, op nul herleid zijnde, eenen gemeenen deeler moeten hebben, en men zal derhalve door het zoeken van dien gemeenen deeler tot vergelijkingen van nog lagere graden kunnen geraken; indien, bij voorbeeld, de cosinus van het 17de gedeelte des halven omtreks moest gezocht worden, zou men $Cos. \frac{\pi}{17} = x$ stellende, door in de eerste oplossing $n = 17$ te nemen, vinden

$$65536x^{17} - 278528x^{15} + 487424x^{13} - 452608x^{11} + 239360x^9 \ldots$$
$$- 71808x^7 + 11424x^5 - 816x^3 + 17x + 1 = 0;$$

en door in de tweede oplossing $n = 15$ te nemen,

$$16384x^{14} - 53248x^{12} + 67584x^{10} - 42240x^8 + 13440x^6 \ldots$$
$$- 2016x^4 + 112x^2 - 2x - 1 = 0,$$

zoekt men nu, door de gewone regels, den grootsten gemeenen deeler tusschen de eerste leden dezer vergelijkingen en stelt men dezen gemeenen deeler gelijk nul, dan verkrijgt men de vergelijking

$$256x^8 - 128x^7 - 448x^6 + 192x^5 + 240x^4 - 80x^3 - 40x^2 + 8x + 1 = 0,$$

van welke nu eene der wortels de gezochte cosinus van $\frac{1}{17}\pi$ is.

Het is gemakkelijk in te zien, dat men, door in beide de oplossingen in plaats van π overal 3π, 5π, 7π, *enz.* tot 15π te schrijven, dezelfde vergelijkingen ter bepaling der waarden van $Cos. \frac{3}{17}\pi$, $Cos. \frac{5}{17}\pi$, *enz.* zou verkregen hebben, en dat dus deze waarden de overige wortels onzer laatste vergelijking moeten zijn; waaruit dan, door de eigenschappen van de coëfficienten der hoogere magtsvergelijkingen, volgt, dat men heeft

$$Cos. \tfrac{1}{17}\pi \times Cos. \tfrac{3}{17}\pi \times Cos. \tfrac{5}{17}\pi \times Cos. \tfrac{7}{17}\pi \times Cos. \tfrac{9}{17}\pi \times Cos. \tfrac{11}{17}\pi \times Cos. \tfrac{13}{17}\pi$$
$$\times Cos. \tfrac{15}{17}\pi = \tfrac{1}{256},$$

en
$$Cos. \tfrac{1}{17}\pi + Cos. \tfrac{3}{17}\pi + Cos. \tfrac{5}{17}\pi + Cos. \tfrac{7}{17}\pi + Cos. \tfrac{9}{17}\pi + Cos. \tfrac{11}{17}\pi$$
$$+ Cos. \tfrac{13}{17}\pi + Cos. \tfrac{15}{17}\pi = \tfrac{1}{2}.$$

CXXVIII. VOORSTEL.

Door L. F. BEAULIEU.

Men vraagt de waarden van x, y, z en u te bepalen uit de ver-

vergelijkingen $x+y+z+u=a$, $x^2+y^2+z^2+u^2=b$, $x^3+y^3+z^3+u^3=c$ *en* $x:y=z:u$?

Opgelost *door* L. F. Beaulieu, J. Bassan, A. C. Belinfante, D. Hoola van Nooten, C. F. Julius, J. Teixeira de Mattos, Bz., L. J. Ulman, H. W. Bloem, J. Köhler *en* W. Top, Wz.

Oplossing *van* L. F. Beaulieu.

Men ftelle $m=x+u$, $n=y+z$, dan is $m+n=a$ en men heeft verder

$$m^2=x^2+2xu+u^2,\quad m^3=x^3+3xu(x+u)+u^3,$$
$$n^2=y^2+2yz+z^2,\quad n^3=y^3+3yz(y+z)+z^3;$$

hieruit verkrijgt men door optelling, in het oog houdende dat gegeven is $x+y+z+u=a$, $x^2+y^2+z^2+u^2=b$, $x^3+y^3+z^3+u^3=c$ en $yz=xu$,

$$m^2+n^2=b+4xu \text{ en } m^3+n^3=c+3axu;$$

uit deze beide vergelijkingen het product xu verdrijvende, vindt men

$$4(m^3+n^3)-3a(m^2+n^2)=4c-3ab,$$

verheft men nu $m+n=a$ fuccesfievelijk tot de tweede en derde magt, zoo vindt men daaruit

$$m^2+n^2=a^2-2mn,$$
$$m^3+n^3=a^3-3mn(m+n)=a^3-3amn,$$

en deze waarden in de laatst verkregene vergelijking overbrengende, komt er na herleiding

$$a^3-6amn=4c-3ab,$$

waaruit volgt $$mn=\frac{a^3+3ab-4c}{6a};$$

en daar $$m+n=a$$

is, zoo vindt men dadelijk

$$m=x+u=\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a^3-6ab+8c}{3a}},$$

en $$n=y+z=\tfrac{1}{2}a-\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a^3-6ab+8c}{3a}};$$

brengt men deze waarden van m en n over in de vroeger gevondene vergelijking $m^2+n^2=b+4xu$, zoo vindt men terftond

$$xu=yz=\frac{a^3-3ab+2c}{6a}.$$

Door

Door middel van deze drie laatste vergelijkingen zullen nu $x+u$ en xu, $y+z$ en yz kunnen berekend worden, terwijl daarna de gewone regels, voor de oplossing der tweede magts-vergelijkingen, voldoende zijn, om de waarden van x, y, z en u te bepalen.

CXXIX. VOORSTEL.

Door L. F. BEAULIEU.

Een trapezium te berekenen, als gegeven zijn de beide diagonalen en de beide schuinsche zijden?

OPGELOST *door* S. DIK, CORNZ., L. F. BEAULIEU, J. BASSAN, D. HOOLA VAN NOOTEN, W. TOP, WZ., L. J. ULMAN, I. WARNSINCK, C. F. JULIUS *en* M. L. GOEDE.

OPLOSSING *van* S. DIK, CORNZ.

Laat ABCD (*Fig.* 47) het trapezium voorstellen, waarvan de schuinsche zijden $AD = a$, $BC = d$, de diagonalen $BD = b$ en $AC = c$ gegeven zijn, dan zal aan het begeerde voldaan zijn, indien wij de beide evenwijdige zijden $AB = x$ en $CD = y$ bepaald hebben.

Hiertoe behoeven wij slechts de gelijke inhouden der driehoeken ABD en ABC in derzelver zijden uit te drukken, volgens de overbekende formule $I = \sqrt{s(s-p)(s-q)(s-r)}$, waardoor wij verkrijgen de vergelijking

$$(a+b+x)(a+b-x)(a-b+x)(-a+b+x) = (c+d+x)$$
$$(c+d-x)(c-d+x)(-c+d+x),$$

deweike achtereenvolgens herleid wordt tot

$$((a+b)^2-x^2)(x^2-(a-b)^2) = ((c+d)-x^2)(x^2-(c-d)^2),$$
$$\{(a+b)^2+(a-b)^2\}x^2-(a^2-b^2)^2-x^4 = \{(c+d)^2+(c-d)^2\}x^2$$
$$-(c^2-d^2)^2-x^4,$$
$$2(a^2+b^2)x^2-(a^2-b^2)^2 = 2(c^2+d^2)x^2-(c^2-d^2)^2,$$

en waaruit men oogenblikkelijk vindt

$$x = \sqrt{\frac{(a^2-b^2)^2-(c^2-d^2)^2}{2(a^2+b^2)-2(c^2+d^2)}};$$

indien wij op dezelfde wijs van de gelijkheid der driehoeken ADC en BDC gebruik maken, vinden wij even zoo

$$y = \sqrt{\frac{(a^2-c^2)^2-(b^2-d^2)}{2(a^2+c^2)-2(b^2+d^2)}}.$$

CXXX. VOORSTEL.

Door L. F. BEAULIEU.

Een trapezium te berekenen, als gegeven zijn de afstanden van het snijpunt der diagonalen tot de vier zijden?

OPGELOST *door* L. F. BEAULIEU, C. F. JULIUS, L. J. ULMAN, M. L. GOEDE *en* D. HOOLA VAN NOOTEN.

I. OPLOSSING *van* L. F. BEAULIEU.

De oplossing, die wij van dit voorstel geven zullen, berust hoofdzakelijk daarop, dat de vergelijking eener regte lijn, ten opzigte van regthoekige coördinaten assen, gebragt kan worden tot den vorm

$$p = (x - x')\,Cos.\,\alpha + (y - y')\,Sin.\,\alpha \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

waarin p de loodlijn is, uit het punt, waarvan x' en y' de coördinaten zijn, op de bedoelde regte lijn nedergelaten; α de hoek van deze loodlijn met de positieve as der abscissen; en eindelijk x en y de coördinaten van een willekeurig punt der regte lijn.

Deze vergelijking laat zich gemakkelijk bewijzen; want laat OX en OY (*Fig.* 48) twee regthoekige asfen zijn en $OP = x$ $PM = y$ de coördinaten van een punt M in de regte lijn AB genomen; voorts $OQ = x'$, $QN = y'$ de coördinaten van een punt N, waaruit $NR = p$ loodregt op AB is getrokken, en zij eindelijk α de hoek, die NR met OX of met de daaraan evenwijdig getrokkene lijn ND maakt, dan heeft men

$$p = NR = ND \times Cos.\,RND = (NC + CD)\,Cos.\,\alpha,$$

of, daar $NC = OP - OQ = x - x'$ en $CD = CM \times Tang.\,CMD$ $= (PM - QN) \times Tang.\,RND = (y - y')\,Tang.\,\alpha$ is,

$$p = \{(x - x') + (y - y')\,Tang.\,\alpha\}\,Cos.\,\alpha,$$

dat is $\quad p = (x - x')\,Cos.\,\alpha + (y - y')\,Sin.\,\alpha.$

Zij nu ABCD (*Fig.* 49) het te berekenen trapezium, waarin bekend zijn de afstanden $OM = m$, $ON = n$, $OP = p$ en $OQ = q$, uit het snijpunt O de diagonalen tot de vier zijden, zoo liggen vooreerst OM en ON, uit hoofde der evenwijdigheid van AD en BC, in eene zelfde regte lijn. Nemen wij dan het punt O tot oorsprong der regthoekige coördinaten, de lijn MON tot as der y en de lijn OX, door O loodregt op MN of evenwijdig met AD en BC getrokken, tot as der x aan, en stellen wij verder *hoek* $POX = \alpha$ en *hoek* $QOX = \beta$, dan hebben wij

vol-

volgens (1), voor de vergelijkingen

van AB, $p = x\, Cos.\, \alpha + y\, Sin.\, \alpha$,

van CD, $q = x\, Cos.\, \beta + y\, Sin.\, \beta$;

terwijl die van AD is $y = n$,

en van BC, $y = -m$;

verbindt men nu succesfievelijk de vergelijkingen van AD en BC eerst met de vergelijking van AB en daarna met die van CD, dan verkrijgt men voor de coördinaten

$$\left.\begin{array}{l} \text{van het punt A},\ x = -AN = \frac{p - n\, Sin.\, \alpha}{Cos.\, \alpha},\ y = ON = n, \\ \text{„ „ „ B},\ x = -BM = \frac{p + m\, Sin.\, \alpha}{Cos.\, \alpha},\ y = -OM = -m, \\ \text{„ „ „ C},\ x = CM = \frac{q + m\, Sin.\, \beta}{Cos.\, \beta},\ y = -OM = -m, \\ \text{„ „ „ D},\ x = DN = \frac{q - n\, Sin.\, \beta}{Cos.\, \beta},\ y = ON = n, \end{array}\right\} (2);$$

verder heeft men, daar de drie punten A, O en C, gelijk ook de drie punten B, O en D in eene regte lijn moeten liggen, klaarblijkelijk

ON : OM = AN : CM en ON : OM = DN : BM,

of ON × CM = OM × AN en ON × BM = OM × DN,

en hierin voor de verschillende lijnen hunne waarden uit (2) substituerende, verkrijgt men de twee vergelijkingen

$$\left.\begin{array}{l} n\, q\, Cos.\, \alpha + m\, n\, Sin.\, \beta\, Cos.\, \alpha = mn\, Sin.\, \alpha\, Cos.\, \beta - mp\, Cos.\, \beta \\ n\, p\, Cos.\, \beta + m\, n\, Sin.\, \alpha\, Cos.\, \beta = mn\, Sin.\, \beta\, Cos.\, \alpha - mq\, Cos.\, \alpha \end{array}\right\} . (3),$$

waaruit α en β bepaald moeten worden.

Hiertoe vinden wij uit deze vergelijkingen door optelling

$$n\, q\, Cos.\, \alpha + n\, p\, Cos.\, \beta = -m\, p\, Cos.\, \beta - m\, q\, Cos.\, \alpha,$$

waaruit volgt

$$Cos.\, \beta = -\frac{nq + mq}{np + mp}\, Cos.\, \alpha = -\frac{q}{p}\, Cos.\, \alpha \quad . \quad . \quad . \quad (4);$$

deze waarde van $Cos.\, \beta$ in eene der vergelijkingen (3) substituerende, vindt men gemakkelijk

$$Sin.\, \beta = \frac{q}{mn}(m - n) - \frac{q}{p}\, Sin.\, \alpha \quad . \quad . \quad . \quad (5);$$

alsnu de vergelijkingen (4) en (5) in het vierkant brengende en

dan

dan bij elkander optellende, met inachtneming dat $Cos.^2 a + Sin.^2 a = 1$ is, bekomt men

$$1 = \frac{q^2}{p^2} + \frac{q^2}{m^2 n^2}(m-n)^2 - \frac{2 q^2}{p m n}(m-n) Sin. \alpha,$$

of $$p^2 = q^2 + \frac{p^2 q^2}{m^2 n^2}(m-n)^2 - 2 q \frac{p q}{m n}(m-n) Sin. \alpha;$$

indien wij ter bekorting stellen

$$l = \frac{p q}{m n}(m-n) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6),$$

hebben wij derhalve

$$p^2 = q^2 + l^2 - 2 q l \, Sin. \alpha,$$

waaruit terstond volgt

$$Sin. \alpha = \frac{q^2 + l^2 - p^2}{2 q l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7);$$

en daar eindelijk uit (5) en (6) volgt

$$Sin. \beta = \frac{l}{p} - \frac{q}{p} Sin. \alpha,$$

zoo is ook

$$Sin. \beta = \frac{p^2 + l^2 - q^2}{2 p l} \quad \ldots\ldots \quad (8).$$

Door de vergelijkingen (6), (7) en (8) de hoeken α en β bepaald hebbende, kan men de lijnen AN, BM, CM en DN door de vergelijkingen (2) berekenen, waardoor dan het geheele trapezium zal bepaald zijn.

Aanmerking. Daar $Sin. \alpha = Sin.$ POX $= Sin.$ POE $= Cos.$ PEO $= Cos.$ B en $Sin. \beta =$ QOX $= Cos.$ QFO $= Cos.$ C is, zoo is ook

$$Cos. B = \frac{q^2 + l^2 - p^2}{2 q l} \text{ en } Cos. C = \frac{p^2 + l^2 - q^2}{2 p l};$$

indien men dus, onder de drie lijnen p, q en l als zijden, eenen driehoek zamenstelt, zullen de hoeken, die aan de zijde l liggen, gelijk zijn aan de hoeken B en C van het trapezium.

II. Oplossing *van* C. F. Julius.

De gegevene loodlijnen wederom door m, n, p en q voorstellende, hebben wij uit de gelijkvormigheid der driehoeken BOC en AOD (*Fig.* 49)

$$AD : BC = NO : MO = n : m,$$

en

en dus is $AD \times m = BC \times n$ . . . . (1);
uit de gelijkvormigheid dezer zelfde driehoeken volgt nog, dat $AO \times OB = DO \times QC$ is, derhalve zijn de driehoeken AOB en DOC, die eenen gelijken hoek en ook de producten der zijden om dien hoek gelijk hebben, van gelijken inhoud, en hieruit heeft men

$$AB \times p = CD \times q \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2);$$

omdat voorts *drieh.* ABC $=$ *drieh.* ABO $+$ *drieh.* OBC,
en dus ook $BC \times MN = AB \times p + BC \times m$
is, vinden wij, in plaats van MN deszelfs waarde $m+n$ schrijvende, na weglating der gelijke termen

$$BC \times n = AB \times p \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3);$$

stellen wij nu $AB = mnqx$,
dan is, door (3), $BC = mpqx$,
door (2) $CD = mnpx$,
en door (1) $AD = npqx$, } . . . . . . (4);

en het trapezium zal dus geheel bepaald zijn, zoodra wij slechts eene uitdrukking voor x in bekenden kunnen vinden. Laten wij hiertoe uit A en D loodlijnen AG en DH op BC vallen, dan is

$$BC - AD = BG + HC = \sqrt{(AB^2 - AG^2)} + \sqrt{(CD^2 - DH^2)},$$

brengen wij hierin voor AG en DH hunne waarde $MN = m+n$, korheidshalve $m+n = h$ stellende, en voor de zijden des trapeziums de waarden (4), daarbij ter bekorting $mnq = a$, $mpq = b$, $mnp = c$ en $npq = d$ stellende, dan komt er

$$bx - dx = \sqrt{(a^2x^2 - h^2)} + \sqrt{(c^2x^2 - h^2)};$$

deze vergelijking in het vierkant brengende, verkrijgen wij

$$(b-d)^2x^2 = a^2x^2 - h^2 + c^2x^2 - h^2 + 2\sqrt{(a^2c^2x - (a^2+c^2)h^2x^2 + h^4)},$$

of, na verschikking der termen,

$$\{(b-d)^2 - (a^2+c^2)\}x^2 + 2h^2 = 2\sqrt{(a^2c^2x^4 - (a^2+c^2)h^2x^2 + h^4)};$$

deze vergelijking nogmaals in het vierkant brengende, komt er

$$\{(b-d)^2 - (a^2+c^2)\}^2x^4 + 4\{(b-d)^2 - (a^2+c^2)\}h^2x^2 + 4h^4 =$$
$$4a^2c^2x^4 - 4(a^2+c^2)h^2x^2 + 4h^4,$$

of, de gelijke termen weglatende en door x^2 deelende,

$$\{(b-d)^2 - (a^2+c^2)\}^2x^2 + 4(b-d)^2h^2 = 4a^2c^2x^2,$$

waaruit men terstond vindt

$$x = \frac{2(b-d)h}{\sqrt{\{4a^2c^2 - [(b-d)^2 - (a^2+c^2)]^2\}}} \quad \ldots (5);$$

brengen wij deze waarde van x in de vergelijkingen (4) over, zoo vinden wij voor de zijden van het trapezium,

$$AB = \frac{2ah(b-d)}{\sqrt{\{4a^2c^2 - [(b-d)^2 - (a^2+c^2)]^2\}}},$$

$$BC = \frac{2bh(b-d)}{\sqrt{\{4a^2c^2 - [(b-d)^2 - (a^2+c^2)]^2\}}},$$

$$CD = \frac{2ch(b-d)}{\sqrt{\{4a^2c^2 - [(b-d)^2 - (a^2+c^2)]^2\}}},$$

en $$AD = \frac{2dh(b-d)}{\sqrt{\{4a^2c^2 - [(b-d)^2 - (a^2+c^2)]^2\}}}.$$

CXXXI. VOORSTEL.

Door C. VAN SCHAICK.

Men vraagt eene rekenkunstige reeks van vijf termen te vinden, zoodanig dat de som der uiterste termen een vijfhoekig getal, het product der twee eerste termen een achthoekig getal en het product der eerste, tweede en vierde termen een vierkant zij?

OPGELOST *door* J. BADON GHIJBEN, C. F. JULIUS, L. J. ULMAN, B. LUBBERS, S. DIK, CORNZ. *en* C. VAN SCHAICK.

OPLOSSING *van* J. BADON GHIJBEN.

Dewijl ieder achthoekig getal begrepen is in den vorm $3x^2 - 2x$ of $x(3x-2)$, kunnen wij voor den eersten term der reeks x en voor den tweeden term $3x-2$ nemen, de reeks zelve is alsdan

$$x,\ 3x-2,\ 5x-4,\ 7x-6,\ 9x-8;$$

en nu is aan de voorwaarde, dat het product der beide eerste termen een achthoekig getal zijn moet, voldaan. Dewijl ieder vijfhoekig getal begrepen is in den vorm $\frac{1}{2}y(3y-1)$ en de som der uiterste termen $10x-8$ een vijfhoekig getal zijn moet, hebben wij

$$10x - 8 = \tfrac{1}{2}y(3y-1),$$

waaruit volgt $$x = \frac{3y^2 - y + 16}{20};$$

hierdoor gaat onze reeks over in

$2y^2-$

$$\frac{3y^2-y+16}{20},\ \frac{9y^2-3y+8}{20},\ \frac{15y^2-5y}{20},\ \frac{21y^2-7y-8}{20},\ \frac{27y^2-9y-16}{20},$$

welke nu aan twee der bepaalde voorwaarden voldoet, er blijft dus nog slechts over, y zoodanig te bepalen, dat het product der eerste, tweede en vierde termen een vierkant worde; hiertoe zal men terstond geraken, door te stellen dat het product der eerste en tweede termen gelijk zij aan den vierden, hetgeen geeft

$$\frac{3y^2-y+16}{20}\times\frac{9y^2-3y+8}{20}=\frac{21y^2-7y-8}{20},$$

of na herleiding

$$9y^4-6y^3-83y^2+28y+96=0;$$

de wortels dezer vierde magtsvergelijking op de gewone wijze opsporende, vinden wij dat aan dezelve voldoet $y=3$, $y=-1$, $y=\frac{4}{3}$ en $y=-\frac{8}{3}$; de eerste dezer waarden van y gebruikende, vinden wij voor de reeks

2, 4, 6, 8, 10;

de andere waarden van y geven geene eigenlijke reeksen in geheele getallen.

CXXXII. Voorstel.

Door M. de Leon.

Twee op elkander volgende getallen van drie cijfers te vinden, zoodanig, dat de som der cijfers van het kleinste één minder zij dan viermaal de som der cijfers van het grootste?

Opgelost door L. J. Ulman, E Boas, S. Dik, Cornz., M. L. Gorde, C. F. Julius, B. Lubbers, J. S. Speijer, J. Teixeira de Mattos, Bz., S. T. Boas, Mr. G. W. de Bruijn Kops, J. J. Gefken, D. Hoola van Nooten, M. de Leon, M. G. Snoek, A. C. Belinfante en C. van Schaick.

Oplossing van L. J. Ulman.

Wanneer van een getal A de som der cijferletters gelijk a is, dan zal, wanneer slechts op de plaats der eenheden geen 9 staat, de som der cijferletters van het getal (A+1) gelijk aan $a+1$ moeten zijn. Bevindt zich echter in het getal A het getalmerk 9 op de plaats der eenheden, zonder dat op de plaats der tientallen eene 9 staat, dan wordt de som der cijfers van het getal (A+1) voorgesteld door $a+1-9$ (waarin a altijd de som der cijfers van het getal A beteekent). Bevindt zich op de

plaats der eenheden en op die der tientallen beide eene 9, zonder dat zulks op de plaats der honderdtallen het geval is, dan is de som der cijfers van het getal $(A+1)$ gelijk aan $a+1-2\times 9$. Algemeen wordt dus de som van de cijfers van elk getal $(A+1)$ uitgedrukt, door $a+1-n\times 9$, waarin n te kennen geeft, hoe veel achtereenvolgende plaatsen, van die der eenheden afgerekend, door het getalmerk 9 vervuld zijn; dit is zoo klaarblijkelijk, dat het geen bewijs behoeft; ter opheldering stelle men, dat $A=4999$ en dus $a=31$ was, dan zou $(A+1)=5000$ en de som der cijfers van $(A+1)$ gelijk aan $a+1-n\times 9=31\times 1-3\times 9=5$ zijn.

Bij het opteloshen voorstel moet derhalve, indien wij de som der cijfers van het kleinste getal door x voorstellen,

$$x+1=4\,(x+1-9n)$$

zijn, waaruit volgt

$$x=12n-1;$$

maar daar er twee getallen van drie cijfers gevraagd worden, kan n niet gelijk aan of grooter dan 3 zijn, want voor $n=3$ zou het kleinste getal reeds niet minder dan 999 en het volgende niet minder dan 1000 kunnen zijn; n kan ook niet gelijk nul of negatief zijn, omdat alsdan x negatief zoude worden en derhalve is $n=1$ of $n=2$. Is $n=2$, dan is $x=23$, en dewijl in de veronderstelling van $n=2$ de twee achterste cijfers van het kleinste getal beide 9 zijn, blijft er voor de voorste cijfer, van de gevondene som 23, slechts 5 over, zoodat als dan de getallen 599 en 600 zijn. Is $n=1$, dan is $x=11$, dewijl in deze veronderstelling de achterste cijfer eene 9 is, blijft er voor de som der beide anderen, slechts 2 over; deze zijn derhalve beide gelijk 1, of een derzelve is eene 2 en de andere eene 0; dewijl deze nul niet vooraan geplaatst kan worden, is dus het kleinste getal voor $n=1$, 119 of 209; weshalve er niet meer dan drie antwoorden op de vraag mogelijk zijn, te weten:

599 en 600; 119 en 120; 209 en 210.

CXXXIII. VOORSTEL.

Door J. SCHOTBORGH, Hz.

Een last op een hellend vlak is in evenwigt met een vermogen, dat in de rigting der helling werkt; indien men deze last en magt

in

in ponden en de hoogte en schuinsche zijde van het hellend vlak in ellen uitdrukt, worden de hiertoe gebruikte getallen bepaald door de volgende voorwaarden: 1°. dat de som van last en magt gelijk is aan het halve product van de hoogte en schuinsche zijde; 2°. dat het product van last en hoogte het dubbeld van een driehoekig getal is, dat tweemaal de hoogte tot wortel heeft; en 3°. dat de som van last en schuinsche zijde het dubbeld is van een ander driehoekig getal, welks wortel een meer is dan de hoogte. Men vraagt hieruit de hoegrootheid van last, magt, hoogte en schuinsche zijde te vinden?

OPGELOST *door* J. SCHOTBORGH, Hz., A. C. BELINFANTE, S. DIK, CORNZ., J. J. GEFKEN, D. HOOLA VAN NOOTEN, B. DE JONGH, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, B. LUBBERS, M. G. SNOER, J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz., L. J. ULMAN, E WARNSINCK *en* S. T. BOAS.

OPLOSSING *van* J. SCHOTBORGH, Hz.

Stelle dat de last x, de magt y ponden, de hoogte z en de schuinsche zijde v ellen zij, dan geeft het voorstel de vergelijkingen

$$x+y=\tfrac{1}{2}zv, \quad \text{of } 2(x+y)=zv \quad \ldots (1),$$

$$xz=2z(2z+1), \text{ of } x=2(2z+1) \quad \ldots (2)$$

en

$$x+v=(z+1)(z+2) \quad \ldots\ldots (3);$$

voorts geeft de voorwaarde des evenwigts nog

$$x:y=v:z \quad \text{of } xz=yv \quad \ldots\ldots (4);$$

zonderen wij nu uit (4) de waarde van y af en brengen wij dezelve in (1) over, zoo komt er na herleiding

$$2x(v+z)=zv^2 \quad \text{of} \quad x=\frac{zv^2}{2(v+z)},$$

brengen wij de waarde van x in (2) gevonden, in de laatste vergelijking, zoo mede in de vergelijking (3), over, dan verkrijgen wij

$$2(2z+1)=\frac{zv^2}{2(v+z)} \text{ en } 2(2z+1)+v=(z+1)(z+2);$$

zonderen wij nu uit de laatste dezer twee vergelijkingen $v=z^2-z$ af, en brengen wij deze waarde in de andere over, dan komt er

$$2(2z+1)=\frac{z(z^2-z)^2}{2(z^2-z+z)}=$$

 of

of na herleiding

$$z^3 - 2z - 7z - 4 = 0,$$

welke vergelijking twee wortels $z = -1$ en eene $z = 4$ heeft; de negatieve wortel uit den aard der zaak onbruikbaar zijnde, nemen wij alleen $z = 4$; alsdan vinden wij gemakkelijk $x = 18$, $v = 12$ en $y = 6$; derhalve is de last 18 pond, de magt 6 pond, de hoogte 4 ellen en de schuinsche zijde 12 ellen.

CXXXIV. VOORSTEL.

Door J. S. SPEIJER.

Men vraagt eenen driehoek te berekenen, als gegeven zijn de loodlijnen, uit twee der hoekpunten op de overstaande zijden vallende, benevens de hoek waaronder deze loodlijnen elkander snijden?

OPGELOST *door* L. J. ULMAN, J. S. SPEIJER, A. C. BELINFANTE, S. T. BOAS, S. DIK, CORNZ., D. HOOLA VAN NOOTEN, B. DE JONGH, C. F. JULIUS, D. VAN LANKERREN MATTHES, B. LUBBERS, J. TEIXEIRA DE MATTOS, BZ., I. WARNSINCK *en* M. L. GOEDE.

OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

Zij ABC (*Fig.* 50.) de driehoek, in welken de loodlijnen AD en BE, uit de hoekpunten A en B op de overstaande zijden getrokken, elkander in F snijden. Laat dan gegeven zijn $AD = a$, $BE = b$ en *hoek* $AFB = \alpha$, dan zijn in den vierhoek CDFE twee regte hoeken en derhalve is de hoek C het supplement van $EFD = AFB = \alpha$, zoodat $Sin. C = Sin. \alpha$ is; nu is in den regthoekigen driehoek ADC

$$AC = \frac{AD}{Sin.\,C} = \frac{a}{Sin.\,\alpha} = a\,Cosec.\,\alpha.$$

en in den regthoekigen driehoek BEC

$$BC = \frac{BE}{Sin.\,C} = \frac{b}{Sin.\,\alpha} = b\,Cosec.\,\alpha;$$

hierdoor zijn dan in den driehoek ABC de twee zijden AC en BC met den ingesloten hoek C bekend.

De derde zijde vindt men onmiddelijk, door de eigenschap

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\,AC \times BC \times Cos.\,C,$$

hierin de gevondene waarden van AC en BC overbrengende, vinden wij, daar $Cos.\,C = -Cos.\,\alpha$ is

$$AB = Cosec.\,\alpha \sqrt{(a^2 + b^2 + 2\,a\,b\,Cos.\,\alpha)}.$$

AAN-

AANMERKING *van* J. BADON GHIJBEN. Bij het voorstel diende nog bepaald te zijn, of men door den gegevenen hoek, *hoek* AFB dan wel *hoek* BFD bedoelt; was namelijk *hoek* BFD $= \alpha$ gegeven, dan zou *hoek* C niet meer het supplement van α maar gelijk aan α zijn, de zijden AC en BC zouden hierdoor onveranderd blijven, maar in de gevondene uitdrukking voor de zijde AB, zou men het teeken van *Cos.* α moeten veranderen.

CXXXV. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Eene rekenkunstige reeks van vier termen in geheele getallen te vinden, zoodat de som der twee middelste termen een vierkant en de som van de geheele reeks eene derde magt zij; terwijl eindelijk de som der twee laatsten, gedeeld door de som der twee eersten, het quotient $\frac{13}{15}$ *minder moet zijn dan een vierde gedeelte van het verschil der reeks?*

OPGELOST *door* L. J. ULMAN, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, C. F. JULIUS, S. T. BOAS, S. DIK, CORNZ., B. LUBBERS, C. VAN SCHAICK, M. G. SNOER *en* L. J. SPEIJER.

OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

Daar in elke rekenkunstige reeks de som der beide uiterste termen gelijk aan de som der beide middelste is, zoo is, in eene reeks van vier termen, de som der geheele reeks het dubbeld van de som der beide middelste termen, en dus het in de vraag vermelde cubiekgetal gelijk aan het dubbeld van een vierkant. Dit nu is niet anders mogelijk, dan wanneer het cubiekgetal van den vorm $8x^6$ is, als wanneer $4x^6$ het vierkant voorstelt. Stellen wij nu voor de reeks, het verschil y noemende,

$$2x^6 - 1\tfrac{1}{2}y\,,\quad 2x^6 - \tfrac{1}{2}y\,,\quad 2x^6 + \tfrac{1}{2}y\,,\quad 2x^6 + 1\tfrac{1}{2}y\,,$$

dan is aan de beide eerste voorwaarden voldaan en dus moet nog slechts

$$\frac{4x^6 + 2y}{4x^6 - 2y} + \frac{13}{15} = \frac{y}{4}$$

zijn, waaruit men gemakkelijk trekt

$$x^6 = \frac{15y^2 + 8y}{30y - 224}.$$

Dewijl nu alles in geheele getallen moet bepaald worden, moet vooreerst y een even getal zijn, men kan dus $y = 2z$ stellen, als wanneer men verkrijgt $x^6 =$

$$x^6 = \frac{60z^2+16z}{60z-224} = \frac{15z^2+4z}{15z-56} = z+4+\frac{224}{15z-56},$$

blijkende hieruit, dat $15z-56$ een deeler van 224 moet zijn; onderzoeken wij nu al de deelers van 224, dan blijkt het, dat onder alle die deelers, er geene andere van den vorm $15z-56$ is, dan alleen de deeler 4; stellen wij dus $15z-56=4$, zoo wordt daardoor $z=4$, $y=8$ en $x^6=64$; en daar dit laatste getal werkelijk eene zesde magt is, zoo zijn de termen der gevraagde reeks

116, 124, 132 en 140.

CXXXVI. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

Indien men elk der zijden van eenen onregelmatigen vierhoek midden door deelt, en de opvolgende deelpunten door regte lijnen vereenigt, is de vierhoek die daardoor ontstaat een parallelogram, welks inhoud de helft is van die des oorspronkelijken vierhoeks. Men vraagt het bewijs hiervoor? (*)

Opgelost *door* W. J. C. Rammelman Elsevier, D. Hoola van Nooten, A. C. Belinfante, S. T. Boas, J. J. Gefken, B. de Jongh, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes; J. S. Speijer, J. Teixeira de Mattos, Bz., L. J. Ulman *en* I. Warnsinck.

Oplossing *van* W. J. C. Rammelman Elsevier.

Zij ABCD (*Fig.* 51) de vierhoek, waarin de lijnen EF, FG, GH en HE de middelpunten der zijden vereenigen, indien dan de diagonalen AC en BD getrokken worden, is, omdat $BF=\frac{1}{2}AB$ en $BG=\frac{1}{2}BC$ is, klaarblijkelijk FG evenwijdig met AC; even zoo is EH evenwijdig met AC, EF evenwijdig met BD, GH evenwijdig met BD; de zijden van den vierhoek EFGH zijn dus twee aan twee evenwijdig met de diagonalen en met elkander, bijgevolg is die vierhoek een parallelogram.

Trekt men NE, dan is

driehoek AEK = *driehoek* KEN,

want ook AN door FE midden door gedeeld wordende, hebben deze driehoeken gelijke bazis AK en KN, terwijl ook hunne hoogten gelijk zijn; even zoo is

drie-

(*) Vergel. van Swinden, *Meetkunst*, I. Boek, 36. Voorstel.

driehoek EID = *driehoek* IEN

en nu geeft de ſom dezer beide vergelijkingen

drieh. AEK + *drieh.* EID = *parallelogr.* IENK,

men vindt op gelijke wijze

drieh. AFK + *drieh.* FLB = *parallelogr.* KFLN,

drieh. BLG + *drieh.* GMC = *parallelogr.* LGMN,

drieh. CMH + *drieh.* HID = *parallelogr.* MHIN,

de vier laatſte vergelijkingen optellende, verkrijgt men

drieh. AEF + *drieh.* BFG + *drieh.* CGH + *drieh.* DHE = *parall.* EFGH,

waaruit ten klaarſte blijkt, dat het parallelogram EFGH gelijk is aan de helft des vierhoeks ABCD.

Aanmerkingen *van* D. Hoola van Nooten. Indien men de punten I, K, L en M wederom vereenigt, ontſtaat daardoor een vierhoek, gelijkvormig aan den oorſpronkelijken, en welks inhoud een vierde gedeelte van den inhoud des oorſpronkelijken vierhoeks is.

De bewezene eigenſchappen gaan even goed door, indien de vierhoek eenen inſpringenden hoek heeft; om hetwelk te bewijzen men het vorige bewijs op *Fig.* 52 onmiddellijk kan toepasſen, indien men bij de optelling der vier genoemde vergelijkingen, ſlechts twee derzelve negatief neemt.

CXXXVII. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

Men verlangt eenen vierhoek, die in eenen cirkel is beſchreven, te berekenen, als de ſtraal des cirkels, benevens de omtrek en de hoeken des vierhoeks gegeven zijn?

Opgelost *door* W. J. C. Rammelman Elsevier, C. F. Julius, J. S. Speijer, L. J. Ulman, I. Warnsinck, A. C. Belinfante, J. Teixeira de Mattos, Bz. *en* M. L. Goede.

Oplossing *van* W. J. C. Rammelman Elsevier.

Laat ABCD (*Fig.* 53) den vierhoek voorſtellen, beſchreven in eenen cirkel waarvan de ſtraal gelijk r gegeven is; zij verder bekend *hoek* BAD $= \alpha$, *hoek* ADC $= \beta$, en ſtellen wij, na de diagonalen getrokken te hebben, *hoek* BAC $=$ *hoek* BDC $= \phi$, dan is *hoek* CAD $= \alpha - \phi$, *hoek* ADB $= \beta - \phi$ en *hoek* ACD $=$ *hoek* ABD $= 180° - (\alpha + \beta - \phi)$. Daar nu de zijde, van eenen driehoek in eenen cirkel beſchreven, gelijk is aan de middellijn des

des cirkels vermenigvuldigd met de sinus van den hoek over die zijde staande, zoo hebben wij

$$\left.\begin{array}{l} AB = 2r\,Sin.\,ADB = 2r\,Sin.(\beta-\phi), \\ BC = 2r\,Sin.\,BDC = 2r\,Sin.\,\phi, \\ CD = 2r\,Sin.\,CAD = 2r\,Sin.(\alpha-\phi) \\ \text{en}\quad AD = 2r\,Sin.\,ACD = 2r\,Sin.(\alpha+\beta-\phi) \end{array}\right\} \ldots (A);$$

door optelling dezer vergelijkingen vinden wij, den gegeven omtrek des vierhoeks s noemende,

$$s = 2r\,(Sin.\,\phi + Sin.(\alpha-\phi) + Sin.(\beta-\phi) + Sin.(\alpha+\beta-\phi));$$

nu is in het algemeen

$$Sin.(\alpha-\phi) + Sin.(\beta-\phi) = 2\,Sin.\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-2\phi)\,Cos.\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

en $Sin.\,\phi + Sin.(\alpha+\beta-\phi) = 2\,Sin.\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,Cos.\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-2\phi)$,

hierdoor verandert onze vergelijking in

$$s = 4r\left\{Sin.\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-2\phi)Cos.\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) + Sin.\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)Cos.\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-2\phi)\right\}$$

of, door $4r\,Cos.\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$ deelende, in

$$\frac{s}{4r\,Cos.\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} = Sin.\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-2\phi) + \frac{Sin.\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{Cos.\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}Cos.\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-2\phi);$$

stellende nu

$$\frac{Sin.\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{Cos.\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} = Tang.\tfrac{1}{2}p \quad \ldots\ldots (B)$$

en

$$\frac{s\,Cos.\frac{1}{2}p}{4r\,Cos.\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} = Sin.\tfrac{1}{2}q \quad \ldots\ldots (C),$$

dan verandert de laatste vergelijking in

$$\frac{Sin.\frac{1}{2}q}{Cos.\frac{1}{2}p} = Sin.\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-2\phi) + Tang.\tfrac{1}{2}p\,Cos.\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-2\phi);$$

door vermenigvuldiging met $Cos.\frac{1}{2}p$ vinden wij

$$Sin.\tfrac{1}{2}q = Sin.\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-2\phi)\,Cos.\tfrac{1}{2}p + Sin.\tfrac{1}{2}p\,Cos.\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-2\phi)$$

of $Sin.\frac{1}{2}q = Sin.\frac{1}{2}(\alpha+\beta-2\phi+p)$,

waaruit volgt $\quad q = \alpha+\beta-2\phi+p$

of $\quad \phi = \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+p-q) \quad \ldots\ldots (D);$

men kan dus door de vergelijkingen (B), (C) en (D) den hoek ϕ en vervolgens door de vergelijkingen (A) de zijden des vierhoeks berekenen, terwijl men voor de diagonalen terstond heeft

$$BD = 2r\,Sin.\,\alpha \text{ en } AC = 2r\,Sin.\,\beta.$$

CXXXVIII. VOORSTEL.

Door F. VAN HEUKELOM, JR.

Van eene rekenkunstige reeks, van drie termen, is het product der

der twee eersten en het vierkant van den derden term te zamen 1408; *en het product der twee laatste termen is* 768; *men vraagt deze reeks te vinden?*

Opgelost *door* Mr. G. W. de Bruijn Kops, A. C. Belinfante, R. M. C. Belinfante, E. Boas, S. T. Boas, S. Dik, Cornz., J. J. Gefken, M. L. Goede, F. van Heukelom, Jr., D. Hoola van Nooten, B. de Jongh, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, B. Lubbers, C. van Schaick, M. G. Snoer, J. S. Speijer, J. Teixeira de Mattos, Bz., L. J. Ulman *en* I. Warnsinck.

Oplossing *van* Mr. G. W. de Bruijn Kops.

Stelle de termen der reeks te zijn $x-y$, x en $x+y$, dan geeft het voorstel de vergelijkingen

$$x(x-y)+(x+y)^2=1408 \quad \text{en} \quad x^2+xy=768;$$

deze vergelijkingen bij elkander optellende, komt er

$$2x^2+(x+y)^2=2176,$$

waaruit volgt $\quad x+y=\sqrt{(2176-2x^2)}$;

deze waarde van $x+y$ overbrengende, in de vergelijking $x(x+y)=768$, vindt men $\quad x\sqrt{(2176-2x^2)}=768$;

deze vergelijking in het vierkant brengende, verkrijgt men na verschikking der termen en deeling door 2

$$x^4-1088x^2=-294912,$$

waaruit gevonden wordt

$$x^2=576 \quad \text{of} \quad x^2=512;$$

dus is $\quad x=\pm 24 \quad \text{of} \quad x=\pm 16\sqrt{2}$,

en dan vindt men $\quad y=\pm 8 \quad \text{of} \quad y=\pm 8\sqrt{2}$,

zoodat de reeks is

$$\pm 16, \quad \pm 24 \quad \text{en} \quad \pm 32;$$

of $\quad \pm 8\sqrt{2}, \quad \pm 16\sqrt{2} \quad \text{en} \quad \pm 24\sqrt{2}.$

CXXXIX. VOORSTEL.

Door B. Lubbers.

Men verlangt de zijden eens regthoekigen driehoeks zoodanig te bepalen, dat het aantal vierkante eenheden van den inhoud gelijk zij aan het aantal lengte eenheden van de middellijn des ingeschreven cirkels?

Opgelost *door* B. Lubbers, A. C. Belinfante, S. Dik, Cornz., D. Hoola van Nooten, C. F. Julius, J. S. Speijer, J. Teixeira

DE

de Mattos, Bz., L. J. Ulman, I. Warnsinck, S. T. Boas en M. L. Goede.

Oplossing van B. Lubbers.

De zijden des gevraagden regthoekigen driehoeks door de bekende vormen x^2-y^2, $2xy$ en x^2+y^2 voorstellende, heeft men voor den inhoud x^3y-xy^3 en voor den omtrek $2x^2+2xy$; vermits nu de omtrek vermenigvuldigd met $\frac{1}{4}$ van de middellijn des ingeschreven cirkels de inhoud geeft, en deze middellijn gelijk aan den inhoud moetende zijn ook door x^3y-xy^3 wordt uitgedrukt, heeft men

$$(2x^2+2xy)\times\tfrac{1}{4}(x^3y-xy^3)=x^3y-xy^3,$$

waaruit onmiddellijk volgt

$$x^2+xy=2$$

en

$$x=-\tfrac{1}{2}y\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}y^2+2)},$$

waarin om x positief te hebben, alleen het bovenste teeken gebruikt kan worden; $\frac{1}{4}y^2+2$ moet dus een volkomen vierkant zijn, stellen wij deszelfs wortel te zijn $\frac{1}{2}y+a$, dan geeft dit

$$\tfrac{1}{4}y^2+2=(\tfrac{1}{2}y+a)^2,$$

waaruit men vindt $y=\frac{2}{a}-a$;

men kan nu a naar willekeur nemen, mits, omdat y positief zijn moet, $\frac{2}{a}>a$ en dus $a<\sqrt{2}$ zij; er zijn dus oneindig vele antwoorden; nemende $a=1\frac{1}{4}$ wordt $y=\frac{7}{20}$, $x=1\frac{1}{4}$ en de zijden zijn dan $\frac{7}{8}$, $\frac{36}{25}$ en $\frac{337}{200}$.

CXL. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Men begeert acht op elkander volgende getallen, die (even als de getallen van 2 tot en met 9) respectievelijk, het eerste door 2, het tweede door 3, het derde door 4, enz. zonder overschot kunnen gedeeld worden?

Opgelost *door* B. Lubbers, A. C. Belinfante, R. M. C. Belinfante, E. Boas, S. T. Boas, Mr. G. W. de Bruijn Kops, S. Dik, Cornz., J. J. Gefken, M. L. Goede, D. Hoola van Nooten, C. F. Julius, M. G. Snoek, J. S. Speijer, J. Teixeira de Mattos, Bz. *en* L. J. Ulman.

Op-

OPLOSSING *van* B. LUBBERS.

Het kleinste gemeene veelvoud van de deelers 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9 is 2520; wanneer men nu hierbij elk der deelers in het bijzonder optelt, verkrijgt men de getallen

2522, 2523, 2524, 2525, 2526, 2527, 2528 en 2529,

welke aan het voorstel beantwoorden. Ieder veelvoud van 2520, op dezelfde wijze behandeld, zal klaarblijkelijk een nieuw antwoord op het gevraagde geven.

CXLI. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Het is reeds zoo lang, dat ik geen onderwijzer meer ben, dat het aantal der verloopene jaren door twee getalmerken moet worden uitgedrukt, die de eigenschap hebben, dat hun product één *meer is dan hunne som, en dat, het vierkant van hunne som met het cijfer der eenheden verminderd wordende, er juist elfmaal het cijfer der tientallen overblijft. Sedert hoelang ben ik geen onderwijzer meer?*

OPGELOST *door* B. LUBBERS, Mr. G. W. DE BRUIJN KOPS, A. C. BELINFANTE, R. M. C. BELINFANTE, E. BOAS, S. T. BOAS, S. DIK, CORNZ., J. J. GEFKEN, M. L. GORDE, D. HOOLA VAN NOOTEN, B. DE JONGH, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, M. G. SNOER, J. S. SPEIJER J. TEIXEIRA DE MATTOS, BZ., L. J. ULMAN *en* I. WARNSINCK.

OPLOSSING *van* B. LUBBERS.

Zij x het cijfer der tientallen, y dat der eenheden, zoo geeft het voorstel de vergelijkingen

$$x+y+1=xy \text{ en } (x+y)^2-y=11x,$$

uit de eerste vergelijking volgt terstond $x=\frac{y+1}{y-1}$, en deze waarde van x in de tweede vergelijking substituerende, komt er na herleiding $y^4-y^3-7y^2-y+12=0$;

de eenige geheele positieve wortel dezer vergelijking is $y=3$, hierdoor vindt men $x=2$, en het aantal der verloopene jaren is bijgevolg 23.

AANMERKING *van* Mr. G. W. DE BRUIJN KOPS. Dewijl geene andere geheele getallen, dan 2 en 3, de eigenschap hebben dat hun

hun product één meer is dan hunne som, is uit de eerste voorwaarde reeds terstond op te maken, dat het aantal jaren 23 of 32 zijn moet; en men behoeft dus de tweede voorwaarde alleen te gebruiken, om te onderzoeken welk dezer beide getallen het begeerde zij.

CXLII. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Welk getal, van vier cijfers, heeft de volgende eigenschappen: 1°. dat het product van de tientallen en eenheden gelijk zij aan de som van de honderdtallen en het tienvoud der duizendtallen; 2°. dat het vierkant der eenheden gelijk zij aan de som van de duizendtallen en het tienvoud der honderdtallen; en 3°. dat de som der duizend- en honderdtallen gelijk zij aan het aantal eenheden?

OPGELOST *door* B. LUBBERS, J. TEIXEIRA DE MATTOS, BZ., A. C. BELINFANTE, R. M. C. BELINFANTE, S. T. BOAS, MR. G. W. DE BRUIJN KOPS, S. DIK, CORNZ., M. L. GOEDE, D. HOOLA VAN NOOTEN, C. F. JULIUS, M. G. SNOER, J. S. SPEIJER, L. J. ULMAN, E. BOAS *en* C. VAN SCHAICK.

I. OPLOSSING *van* B. LUBBERS.

Laat de cijfers der duizendtallen, honderdtallen, tientallen en eenheden respectievelijk voorgesteld worden door v, x, y en z, zoo geeft ons het voorstel de vergelijkingen

$$yz = 10v + x \ (1), \quad z^2 = 10x + v \ (2) \text{ en } \quad z = v + x \ (3);$$

de waarde van z uit de derde vergelijking in de tweede overbrengende, vindt men

$$(v+x)^2 = 10x + v \quad \ldots\ldots \quad (4),$$

welke vergelijking men schrijven kan onder den vorm

$$(v+x)^2 - 10(v+x) = -9v,$$

als wanneer uit dezelve terstond volgt

$$v + x = 5 \pm \sqrt{(25 - 9v)}$$

of

$$x = 5 - v \pm \sqrt{(25 - 9v)} \quad \ldots\ldots \quad (5);$$

het blijkt dus, dat $25 - 9v$ een volkomen vierkant moet zijn, welks wortel een geheel getal is; hieraan kan nu niet anders voldaan worden, dan door $v = 0$, of $v = 1$ te nemen; voor $v = 0$ zoude uit (4) volgen $x^2 = 10x$ en dus $x = 10$, daar x niet grooter dan 9 zijn mag, kan dus alleen $v = 1$ zijn, en hierdoor vinden wij uit (5) $x = 8$, of $x = 0$; $x = 0$ nemende, zoude

vol-

volgens (3) $z = v = 1$ en dus volgens (1) $y = \frac{10v + x}{z} = 10$ zijn; daar dit nu weder niet kan plaats hebben is alleen $x = 8$, derhalve door (3) $z = v + x = 9$ en door (1) $y = \frac{10v + x}{z} = 2$, zoodat het begeerde getal 1829 is.

II. Oplossing *van* J. Teixeira de Mattos, Bz.

Trekt men de vergelijking (3) van (2) af, zoo verkrijgt men

$$z^2 - z = 9x,$$

waaruit volgt

$$x = \frac{z(z-1)}{9};$$

daar nu x een heel getal moet zijn, moeten z of $z - 1$ een van beide door 9 deelbaar zijn, want z en $z - 1$ kunnen niet gelijktijdig beide door 3 deelbaar wezen; daar z kleiner dan 10 moet zijn, kan $z - 1$ niet zonder overschot door 9 gedeeld worden, dus moet dit met z het geval zijn en, bij gevolg, is $z = 9$; hieruit volgt dadelijk $x = 8$, en men zal dan uit (3) $v = 1$ en uit (1) $y = 2$ vinden.

CXLIII. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Twee gelijke cirkels snijden elkander zoodanig, dat de omtrek van den eenen cirkel den inhoud van den anderen in twee gelijke deelen deelt; nu vraagt men hoe veel graden, minuten, enz. de boog bevat, die de eene cirkelomtrek van den anderen affnijdt?

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, B. Lubbers, D. Hoola van Nooten, L. J. Ulman, M. L. Goede, S. Dik *en* I. Warnsinck.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Laten AMB en ANB (*Fig.* 54) de gelijke cirkels zijn, elkander in A en B snijdende, dan zal de inhoud van het figuur AMBNA gelijk moeten zijn aan de helft van den inhoud van eenen der gelijke cirkels; deze inhoud door de gemeenschappelijke koorde AB midden door gedeeld wordende, zal dus de inhoud van een der gelijke segmenten ABM of ABN het vierde gedeelte van den inhoud des cirkels zijn. Stellen wij nu de straal, waarmede de cirkels beschreven zijn, gelijk r en uit de

middelpunten P en Q de ftralen PA, PB, QA en QB getrokken hebbende, *hoek* APB $=$ *hoek* AQB $= \phi$, dan is

$$Inh.\ Segm.\ ABM = \tfrac{1}{2} r^2 (\phi - Sin.\phi),$$

en daar dit fegment een vierde gedeelte van den inhoud des cirkels moet bevatten, hebben wij de vergelijking

$$\tfrac{1}{2} r^2 (\phi - Sin.\phi) = \tfrac{1}{4} r^2 \pi,$$

of $$\phi - Sin.\phi = \tfrac{1}{2}\pi,$$

ftellen wij nu dat α eene benaderde waarde van ϕ is, en van deszelfs wezenlijke waarde flechts een zeer kleine boog x verfchilt, dan is $\phi = \alpha + x$ en wij hebben dus

$$\alpha + x - Sin.(\alpha + x) = \tfrac{1}{2}\pi,$$

of $$\alpha + x - Sin.\alpha\, Cos.x - Cos\,\alpha\, Sin.x = \tfrac{1}{2}\pi;$$

nemende nu, wegens de kleinheid van x, $Cos.x = 1$ en $Sin.x = x$, dan verkrijgen wij

$$\alpha + x - Sin.\alpha - x\, Cos.\alpha = \tfrac{1}{2}\pi,$$

waaruit $$x = \frac{\tfrac{1}{2}\pi - \alpha + Sin.\alpha}{1 - Cos.\alpha},$$

zoodat nu

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \frac{\tfrac{1}{2}\pi - \alpha + Sin.\alpha}{1 - Cos.\alpha} &= \alpha', \\ \alpha' + \frac{\tfrac{1}{2}\pi - \alpha' + Sin.\alpha'}{1 - Cos.\alpha'} &= \alpha'', \\ \alpha'' + \frac{\tfrac{1}{2}\pi - \alpha'' + Sin.\alpha''}{1 - Cos.\alpha''} &= \alpha''', \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (A)$$

enz. opvolgelijk digter benaderde waarden van ϕ zijn zullen, weshalve men, deze benaderingen ver genoeg voortzettende, ϕ zoo naauwkeurig zal verkrijgen als men goedvindt.

Om eene eerfte benaderde waarde van ϕ te vinden, kan men opmerken, dat, indien $\phi = 120°$ en dus AB de zijde van den ingefchreven regelmatigen driehoek was, het fegment ABM kleiner dan $\tfrac{1}{4} r^2 \pi$ zijn zou; dat, indien $\phi = 135°$ en dus de fector APM drie achtfte gedeelte van den inhoud des geheelen cirkels was, het fegment ABM grooter dan $\tfrac{1}{4} r^2 \pi$ zijn zou; en dat dus de wezenlijke waarde van ϕ tusfchen 120° en 135° ligt; nemen wij nu $\alpha = 130°$, dan vinden wij, door het uitvoeren der berekeningen in de vergelijkingen (A) aangeduid, $\alpha' = 132°22'7''$, $\alpha'' = 132°20'47'',3$, welke laatfte waarde reeds zoo naauwkeurig is, dat wij hier de benadering ftakende en

boog

boog ABM $=$ boog ABN $= \phi = 132° 20' 47''$ nemende, geene seconde van de juiste waarde des boogs verschillen.

CXLIV. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Men begeert twee reeksen, eene rekenkunstige en eene meetkunstige, te vinden, elk van drie termen in geheele getallen; de eigenschap hebbende, dat de eerste term der eene reeks gelijk is aan de eerste term der andere en dat de sommen der overeenkomstige termen vierkanten zijn?

OPGELOST *door* L. J. ULMAN, J. BASSAN, D. HOOLA VAN NOOTEN, C. F. JULIUS, J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz., A. C. BELINFANTE, S. DIK, J. J. GEFKEN, B. LUBBERS *en* J. S. SPEIJER.

OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

Daar de som der beide eerste termen een vierkant in geheele getallen en door 2 deelbaar zijn moet, zoo doen wij aan de algemeenheid niets te kort, door $4x^2$ voor dit vierkant, en dus $2x^2$ voor ieder der eerste termen, te stellen. Nemen wij nu $2xy$ voor den tweeden term der meetkunstige reeks, dan is de derde $2y^2$; stellen wij verder dat de som der beide laatste termen $4p^2$ zij, dan is $4p^2 - 2y^2$ de laatste term der rekenkunstige reeks en, bij gevolg, de middelste $x^2 + 2p^2 - y$; de reeksen zijn dus

$$2x^2, \quad 2xy, \quad 2y^2,$$

en $$2x^2, \quad x^2 + 2p^2 - y^2, \quad 4p^2 - 2y^2;$$

ter voldoening aan al de voorwaarden des voorstels, blijft er dan alleen nog over, dat de som der beide middelste termen $x^2 + 2p^2 - y^2 + 2xy$ een vierkant moet zijn. Tot hiertoe hebben wij geenerlei willekeurige onderstelling aangenomen, doch zien terstond, dat, wanneer wij slechts $y = p$ nemen, de som der middelste termen een vierkant en daardoor tevens de laatste term der eene reeks gelijk aan den laatsten term der andere wordt; stelde men bij v. $x = 1$ en $y = p = 2$, zoo zou men voor de meetkunstige reeks 2, 4, 8; voor de rekenkunstige 2, 5, 8; en voor de sommen der overeenkomstige termen 4, 9, 16 hebben.

Om echter eene oplossing zonder willekeurig aangenomene voorwaarden te bekomen, stellen wij

 $x^2 +$

$$x^2 + 2p^2 - y^2 + 2xy = (x + y + 2q)^2,$$

dan vinden wij daaruit

$$x = \frac{p^2 - y^2}{2q} - y - q;$$

nu kunnen wij q en y willekeurig aannemen en p zoodanig, dat $p^2 - y^2$ door $2q$ deelbaar wordt; zij bij v. $q = 1$, $y = 1$, $p = 3$ dan wordt $x = 2$; de reekfen zijn alsdan 8, 4, 2; en 8, 21, 34; en de fommen der overeenkomstige termen 16, 25, 36.

CXLV. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Van welken boog is de fom van Sinus en Cofinus gelijk aan het verfchil van Tangens en Cotangens?

OPGELOST *door* C. F. JULIUS, J. BASSAN, J. S. SPEIJER, L. J. ULMAN, D. HOOLA VAN NOOTEN, H. VAN BLANKEN, B. LUBBERS, S. DIK, J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz., M. L. GOEDE, S. T. BOAS, A. C. BELINFANTE *en* I. WARNSINCK.

OPLOSSING *van* C. F. JULIUS.

De gevraagde boog door ϕ voorftellende, zal dezelve moeten voldoen aan de vergelijking

$$Sin.\phi + Cos.\phi = Tang.\phi - Cot.\phi \quad . \; . \; . \quad (A),$$

of

$$Sin.\phi + Cos\,\phi = \frac{Sin\,\phi}{Cos.\phi} - \frac{Cos.\phi}{Sin.\phi},$$

hieruit de breuken verdrijvende, vindt men

$$Sin.\phi\,Cos.\phi\,(Sin\,\phi + Cos.\phi) = Sin^2.\phi - Cos^2.\phi,$$

$$Sin.\phi\,Cos\,\phi\,(Sin.\phi + Cos.\phi) = (Sin.\phi + Cos.\phi)(Sin.\phi - Cos.\phi)$$

$$\text{of}\,(Sin.\phi + Cos.\phi)\,(Sin.\phi\,Cos.\phi - Sin.\phi + Cos.\phi) = 0 \quad . \; (B);$$

aan deze vergelijking wordt vooreerst voldaan door te ftellen $Sin.\phi + Cos.\phi = 0$ of $Sin.\phi = -Cos.\phi$; alsdan is

$$Sin^2.\phi = Cos^2.\phi = 1 - Sin^2.\phi,$$

waaruit volgt $Sin.\phi = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, en dus, indien wij flechts pofitieve boogen kleiner dan 180° in aanmerking nemen, $\phi = 45°$ of 135°, daar echter de vergelijking $Sin^2.\phi = Cos^2.\phi$ even goed uit $Sin.\phi = Cos.\phi$ kan zijn voortgekomen, en hier $Sin.\phi = -Cos.\phi$ zijn moet, hebben wij alleen $\phi = 135°$.

Aan de vergelijking (B) wordt ten tweede voldaan door te ftellen

$$Sin.\phi\,Cos.\phi - Sin.\phi + Cos.\phi = 0,$$

of

of $$Sin.\,\phi\, Cos.\,\phi = Sin.\,\phi - Cos.\,\phi,$$
deze vergelijking in het vierkant brengende, en in het oog houdende dat $Sin^2.\,\phi + Cos^2.\,\phi = 1$ is, vinden wij
$$Sin^2.\,\phi\, Cos^2.\,\phi + 2\, Sin.\,\phi\, Cos.\,\phi = 1,$$
waaruit volgt
$$Sin.\,\phi\, Cos.\,\phi = -1 \pm \sqrt{2},$$
of $$Sin\, 2\,\phi = 2\, Sin.\,\phi\, Cos.\,\phi = -2 \pm 2\sqrt{2};$$
het benedenste teeken gebruikende, zou $Sin.\,2\,\phi$ negatief grooter dan 1 en bij gevolg ϕ onbestaanbaar worden, wij hebben dus alleen
$$Sin.\,2\,\phi = -2 + 2\sqrt{2} = 0.8284271,$$
indien wij voor ϕ wederom slechts positieve boogen kleiner dan 180° in aanmerking willen nemen, hebben wij uit deze waarde van $Sin.\,2\,\phi$,
$$2\,\phi = 55°\, 56'\, 15'' \text{ of } 124°\, 3'\, 45'',$$
en $$\phi = 27°\, 58'\, 7'' \text{ of } 62°\, 1'\, 52'';$$
daar echter de vergelijking $Sin^2.\,\phi\, Cos^2.\,\phi + 2\, Sin.\,\phi\, Cos.\,\phi = 1$ even goed uit de tweede magtsverheffing van $Sin.\,\phi\, Cos.\,\phi = Cos.\,\phi - Sin.\,\phi$ kan zijn voortgekomen, en deze laatste zou gevolgd zijn, uit het stellen van
$$Sin.\,\phi + Cos.\,\phi = Cot.\,\phi - Tang.\,\phi \quad . \; . \; . \quad (C),$$
zoo is het klaar dat $\phi = 62°\, 1'\, 52''$ alleen aan de vergelijking (A), maar $\phi = 27°\, 58'\, 7''$ alleen aan de vergelijking (C) voldoet; laat men dus onbepaald welke van beide Tangens of Cotangens de grootste zijn moet, zoo voldoen aan het voorstel drie boogen, te weten: 27° 58′ 7″, 62° 1′ 52″ en 135°.

CXLVI. VOORSTEL.

Door K. SMIT.

Men begeert twee geheele positieve getallen te vinden; wanneer men bij het eerste 9 optelt, en die som met het zevenvoud van het tweede vermenigvuldigt; en wanneer men bij het tweede 60 optelt en die som met het vijfvoud van het eerste vermenigvuldigt; dan moet de som der beide alzoo verkregene producten gelijk zijn aan 343 *maal de som der beide getallen. Men verlangt ook te weten hoe veel antwoorden op deze vraag mogelijk zijn?* (*)

Qp.

(*) P. HALCKEN, *Sinnen confect*, No 127.

Opgelost *door* K. Smit, L. J. Ulman, Mr. G. W. de Bruijn Kops, D. Hoola van Nooten, C. F. Julius, M. L. Goede, B. Lubbers *en* M. G. Snoer.

Oplossing *van* K. Smit.

Stel voor de getallen x en y, dan moet

$$7y(x+9)+5x(y+60)=343(x+y)$$

zijn; uit deze vergelijking vindt men, na ontwikkeling,

$$x=\frac{280y}{12y-43},$$

of de deeling werkelijk verrigtende

$$x=24+\frac{1032-8y}{12y-43}=24+\frac{129-y}{12y-43}\times 8;$$

het blijkt dus dat $12y-43$ een deeler moet zijn van $129-y$ en dus ook van alle deszelfs veelvouden; daar nu het twaalfvoud van $129-y$, met $12y-43$ vermeerderd, 1505 geeft, zoo moet $12y-43$ ook in 1505 deelbaar zijn; de deelers van 1505 zijn 1, 5, 7, 35, 43, 215, 301 en 1505, derhalve heeft y acht waardens, doch slechts twee derzelve geven geheele getallen; stellen wij namelijk

	$12y-43=5$	of $12y-43=1505$,
dan is	$12y=48$ „	$12y=1548$,
dus	$y=4$ „	$y=129$,
en bij gevolg	$x=224$, „	$x=24$;

weshalve $x=224$ en $y=4$, of $x=24$ en $y=129$ de twee eenigste antwoorden op het voorstel zijn.

CXLVII. Voorstel.

Door K. Smit.

Gegeven zijnde $x=\dfrac{249a^2}{113a+19b}$, *begeert men de waarde van* x, *a en b in geheele getallen te bepalen?* (*)

Opgelost *door* B. Lubbers, K. Smit, L. J. Ulman, C. F. Julius, A. C. Belinfante, M. L. Goede, D. Hoola van Nooten, M. G. Snoer *en* J. Teixeira de Mattos, Bz.

Op-

(*) G. Hiddinga, *Tweede Verzam.* No. 3. *in de Toegift*; te vinden bij J. Oostwoud, *Bundel van Wisk. Uitsp.*

OPLOSSING *van* B. LUBBERS.

Ter oplossing van dit voorstel is er niets anders te doen dan $\frac{249 a^2}{113 a + 89 b}$ tot een geheel getal te brengen, en hieraan kan op een oneindig aantal wijzen voldaan worden; men beginne namelijk met b in betrekking tot a willekeurig aan te nemen, b. v. om kleine getallen te hebben $b = -a$. dan gaat de gegevene vergelijking over in

$$x = \frac{249 a^2}{123 a + 89 b} = \frac{249 a^2}{24 a} = \frac{83 a}{8},$$

en daar nu 8 noch deelbaar in 83 is, noch met 83 factoren gemeen heeft, moet 8 in a deelbaar en dus $a = 8$, of a een veelvoud van 8 zijn; neemt men $a = 8$, zoo zijn de drie begeerde waarden

$$x = 83. \quad a = 8 \text{ en } b = -8.$$

Neemt men $b = a$, dan heeft men

$$x = \frac{249 a^2}{113 a + 89 b} = \frac{249 a^2}{202 a} = \frac{249 a}{202},$$

en nu moet $a = 202$ of a een veelvoud van 202 zijn; voor $a = 202$ heeft men

$$x = 249, \quad a = 202, \quad b = 202.$$

Het blijkt dus, dat men, voor elke willekeurig genomene betrekking tusschen a en b, eene oneindige reeks van antwoorden bekomt.

CXLVIII. VOORSTEL.

Door K. SMIT.

Twee driehoekige getallen te vinden, waarvan het verschil der vierde magten 9150544 is? (*)

OPGELOST *door* K. SMIT, A. C. BELINFANTE, D. HOOLA VAN NOOTEN, C. F. JULIUS, B. LUBBERS *en* J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz.

OPLOSSING *van* K. SMIT.

Laten x en ax de wortels der driehoekige getallen zijn, dan zijn die getallen zelve $\frac{x^2 + x}{2}$ en $\frac{a^2 x^2 + a x}{2}$, en het verschil van

(*) VIENEMA, *Algebra*, *Besluit* No. 11. (Uitgaaf van 1786).

van derzelver vierde magten is

$$\frac{(a^8-1)x^8+4(a^7-1)x^7+6(a^6-1)x^6+4(a^5-1)x^5+(a^4-1)x^4}{16},$$

volgens het voorstel is deze uitdrukking gelijk aan 9150544, maar dewijl $9150544 = 13\times29\times37\times41\times16$ is, hebben wij de vergelijking

$$(a^8-1)x^8+4(a^7-1)x^7+6(a^6-1)x^6+4(a^5-1)x^5+(a^4-1)x^4 =$$
$$= 13\times29\times37\times41\times2^4\times2^4,$$

door vergelijking der factoren blijkt, dat x^4 geene andere waarde kan hebben dan 2^4, waaruit volgt $x=2$; deze waarde van x in de laatste vergelijking substituerende, vindt men, na behoorlijke herleiding,

$$256a^8+512a^7+384a^6+128a^5+16a^4=146410000,$$

beide de leden dezer vergelijking volkomen vierde magten zijnde, vindt men door den vierdemagtswortel te nemen

$$4a^2+2a=110,$$

of $$a^2+\tfrac{1}{2}a=27\tfrac{1}{2},$$

waaruit volgt $a=5$ of $a=-5\tfrac{1}{2}$,

door beide deze waarden van a, vindt men voor de begeerde getallen 3 en 55.

CXLIX. VOORSTEL.

Door J. BADON GHIJBEN.

De waarde van ϕ te vinden uit de vergelijking

$$\sqrt[3]{a^2 Sin^2.\phi}+\sqrt[3]{b^2 Cos^2.\phi}=\sqrt[3]{(a+b)^2}\,?$$

OPGELOST *door* J. BADON GHIJBEN, L. J. ULMAN, A. C. BELINFANTE, H. VAN BLANKEN, D. HOOLA VAN NOOTEN, C. F. JULIUS *en* J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz.

OPLOSSING *van* J. BADON GHIJBEN.

Schrijven wij de gegevene vergelijking onder de gedaante

$$(a\,Sin.\phi)^{\frac{2}{3}}+(b\,Cos.\phi)^{\frac{2}{3}}=(a+b)^{\frac{2}{3}},$$

en deelen wij dezelve door $(b\,Cos.\phi)^{\frac{2}{3}}$, dan komt er

$$\left(\frac{a}{b}\,Tang.\phi\right)^{\frac{2}{3}}+1=\left(\frac{a}{b}+1\right)^{\frac{2}{3}}Sec.^{\frac{2}{3}}\phi;$$

stellen wij nu gemakshalve $\frac{a}{b}=n^3$, $Tang.^{\frac{2}{3}}\phi=x$, en dus

$Sec.^{\frac{2}{3}}\phi=(Sec^2.\phi)^{\frac{1}{3}}=(1+Tang^2.\phi)^{\frac{1}{3}}=(1+x^3)^{\frac{1}{3}}$, zoo gaat on-

onze vergelijking over in

$$n^2x+1=(n^3+1)^{\frac{2}{3}}(x^3+1)^{\frac{1}{3}},$$

dezelve als nu tot de derde magt verheffende, verkrijgt men

$$(n^2x+1)^3=(n^3+1)^2(x^3+1),$$

of na herleiding

$$(1+2n^3)x^3-3n^4x^2-3n^2x+n^3(n^3+2)=0,$$

door op te merken, dat $x=n$ terstond aan deze vergelijking voldoet (en dus de beide overige waarden van x door eene vierkantsvergelijking kunnen gevonden worden) zal men vinden, dat dezelve ontbonden kan worden in de factoren

$$(x-n)^2(x+2n^3x+2n+n^4)=0,$$

weshalve $\quad x=n \quad$ of $\quad x=-n\dfrac{2+n^3}{1+2n^3};$

stellende nu voor x en n weder hunne waarden $Tang.^{\frac{2}{3}}\phi$ en $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$, zoo hebben wij

$$Tang.^{\frac{2}{3}}\phi=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ of } Tang.^{\frac{2}{3}}\phi=-\frac{a+2b}{2a+b}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}},$$

dat is: $Tang.\phi=\sqrt{\frac{a}{b}}$ of $Tang.\phi=\sqrt{-\frac{(a+2b)^3a}{(2a+b)^3b}}$;

indien a en b beide positief zijn, is alleen de eerste waarde van $Tang.\phi$ bestaanbaar en wij hebben in dat geval

$$\phi=Boog\,Tang.\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

CL. VOORSTEL.

Door J. BADON GHIJBEN.

Een gegeven cirkelboog in twee deelen te verdeelen, zoodanig dat de koorden der deelen in gegeven reden zijn?

OPGELOST *door* H. VAN BLANKEN, D. HOOLA VAN NOOTEN, L. J. ULMAN, I. WARNSINCK, J. S. SPEIJER, A. C. BELINFANTE *en* J. TEIXEIRA DE MATTOS, BZ.

OPLOSSING *van* H. VAN BLANKEN.

Laat AB (*Fig.* 55) de gegevene boog zijn, dan deele men derzelver koorde in het punt C zoodanig, dat men heeft AC : BC $=p:q$; verder neme men, op het verlengde der koorde AB, een punt D zoodanig, dat ook AD : BD $=p:q$ is,

 en

en vervolgens beschrijve men op CD als middellijn eenen cirkel, dan zal het punt E, waarin die cirkel den boog AB snijdt, het begeerde deelpunt zijn. Want de cirkel op CD beschreven is (volgens J. DE GELDER, *Beginsſ. der Meetk.*, 3e druk, § 432) de meetkunstige plaats van de toppunten aller driehoeken, die AB tot bazis hebben, en waarvan de opstaande zijden tot elkander in reden zijn als $p:q$; bij gevolg is $AE:BE=p:q$.

AANMERKING *van* J. BADON GHIJBEN. De cirkel op CD beschreven zal het verlengde van boog AB andermaal in E′ snijden en dan is ook $AE':BE=p:q$, zoodat dan tevens de vraag opgelost is, om een gegevene boog zoodanig te verlengen, dat de koorde van de boog met het verlengde tot de koorde van het verlengde in gegeven reden staat. Had men dus gevraagd: *op eenen boog of deszelfs verlengde een punt te vinden, zoodanig dat de afstanden van dit punt tot de uiteinden des boogs in gegeven reden zijn?* dan zouden de punten E en E′ beide aan deze vraag voldoen.

CLI. VOORSTEL.

Door J. BADON GHIJBEN.

Wanneer twee cirkels M *en* N *gegeven zijn en een stelsel van twee lijnen, die elkander onder eenen standvastigen hoek snijden, zoodanig bewogen wordt, dat de eene lijn altijd den cirkel* M *en de andere altijd den cirkel* N *blijft aanraken, dan zal elk punt, dat in het vlak dier lijnen gelegen is en gedurende die beweging eenen onveranderlijken stand ten opzigte der bewegende lijnen behoudt, eene epicykloïde beschrijven. Men vraagt zulks te bewijzen?*

OPGELOST *door* J. BADON GHIJBEN *en* H. VAN BLANKEN.

OPLOSSING *van* J. BADON GHIJBEN.

§ 1. Laten M en N (*Fig.* 56) de middelpunten, MP en NQ de stralen zijn der gegevene cirkels; Aa en Bb de lijnen die elkander in S snijdende onophoudelijk elk eenen der cirkels aanraken; zij voorts Z een punt in het vlak dier lijnen, bepaald, door dat men deszelfs afstanden ZH en ZG tot de lijnen Aa en Bb kent; indien men dan uit M als middelpunt met eenen straal $Mp=MP+ZH$ en uit N met eenen straal $Nq=NQ+ZG$ cirkels beschrijft, zullen die cirkels geraakt worden door de lijnen ZC en ZD, uit Z evenwijdig met Aa en Bb getrokken; la-

laten wij nu het geheele stelsel lijnen A*a*, B*b*, ZC en ZD zoodanige beweging ondergaan, dat de lijnen A*a* en B*b* met de cirkels MP en NQ in aanraking blijven, dan zullen ook de lijnen ZC en ZD onophoudelijk de cirkels M*p* en N*q* blijven raken. Daar nu het punt Z, dat de in het voorstel bedoelde kromme lijn beschrijft, het snijpunt is der lijnen ZC en ZD die respectievelijk de cirkels M*p* en N*q* blijven raken, is ons algemeener voorstel terstond terug gebragt tot het meer bijzondere: *dat het snijpunt van twee lijnen, die eenen standvastigen hoek insluitende elk in het bijzonder eenen gegevenen cirkel blijven raken, eene epicycloïde zal beschrijven*; wij zullen ons dus alleen met dit laatste behoeven bezig te houden, en trachten eene vergelijking te vinden voor de kromme lijn door het snijpunt S (*Fig.* 57) der lijnen A*a* en B*b* beschreven wordende, wanneer die lijnen zoodanig worden bewogen, dat zij altijd raaklijnen aan de cirkels M en N blijven.

§ 2. Laat ASB (*Fig.* 57) eenen willekeurigen stand der bewegende lijnen A*a* en B*b* voorstellen; trekken wij door M eene lijn MV evenwijdig met A*a* en door N eene lijn NU evenwijdig met B*b*; brengen wij door het snijpunt T van deze getrokkene lijnen en door de punten M en N eenen cirkel; en trekken wij eindelijk door S en T eene lijn, die dien cirkel behalve in T andermaal in O snijdt, dan zal men, voor eenigen anderen stand A′S′B′ der bewegende lijnen deze zelfde bewerking herhalende, standvastig denzelfden cirkel MTNO, en op deszelfs omtrek standvastig hetzelfde punt O verkrijgen. Want in welken stand zich ook ASB mag bevinden, is de *hoek* MTN, waarvan de beenen altijd door M en N gaan, standvastig gelijk aan den onveranderlijken *hoek* ASB, weshalve de omtrek des cirkels op MN als koorde beschreven, welks segment eenen hoek gelijk aan ASB bevat, de meetkunstige plaats van het punt T is; verder is in elken stand van ASB het parallelogram USVT standvastig hetzelfde, de diagonaal ST deelt dus den *hoek* UTV, of, met andere woorden, de lijn SO deelt den *hoek* MTN standvastig in dezelfde deelen, en daar nu die hoek bestendig aan den omtrek des cirkels MTNO ligt en door de halve boog MON gemeten wordt, moet de lijn SO ook altijd den boog MON in dezelfde deelen MO en ON snijden, waaruit het klaar is, dat de lijn SO stand-

vas-

vastig door een zelfde punt O van den omtrek des cirkels MTNO gaan zal.

§ 3. Dewijl nu het punt O en de cirkel MTNO standvastig zijn, kunnen wij, ten einde voor de bedoelde kromme lijn eene polaire vergelijking te vinden, het punt O als pool en de lijn OX, uit O door het middelpunt C van den cirkel MTNO getrokken, als oorsprong der hoeken aannemen; stellen wij dan *hoek* XOS $=\phi$, OS $=z$, MN $=a$, *hoek* ASB $=\alpha$, de straal des cirkels M $=r$ en die des cirkels N $=r'$ en trekken wij uit S, SI en SK regthoekig op MV en NU, dan is

$$r = SI = SV \times Sin.\,SVI = SV \times Sin.\,\alpha, \text{ waaruit } SV = \frac{r}{Sin.\,\alpha},$$

$$\text{en } r' = SK = SU \times Sin.\,SUK = SU \times Sin.\,\alpha, \text{ waaruit } SU = \frac{r'}{Sin.\,\alpha};$$

voorts is in het parallelogram USVT

$$TS^2 = SV^2 + SU^2 + 2 . SV \times SU \times Cos.\,USV,$$

hierin bovenstaande waarden van SV en SU overbrengende, vindt men na herleiding

$$TS = \pm \frac{1}{Sin.\,\alpha} . \sqrt{(r^2 + r'^2 + 2\,rr'\,Cos.\,\alpha)};$$

wijders LT getrokken zijnde, is de driehoek LTO als in een halven cirkel staande regthoekig in T, dus is OT $=$ OL $\times$ *Cos.* LOT $=$ OL $\times$ *Cos.* ϕ, maar OL de middellijn zijnde van eenen cirkel, beschreven om den driehoek MTN, waarvan de zijde MN $=a$ en de tegenoverstaande *hoek* MTN $=\alpha$ bekend zijn, is volgens eene bekende formule OL $=\frac{a}{Sin.\,\alpha}$, en hierdoor verandert de laatste waarde van OT in

$$OT = \frac{a}{Sin.\,\alpha} . Cos.\,\phi;$$

daar $z =$ OS $=$ OT $+$ TS is, hebben wij voor OT en TS de gevondene waarden schrijvende

$$z = \frac{a}{Sin.\,\alpha} . Cos.\,\phi \pm \frac{1}{Sin.\,\alpha} . \sqrt{(r^2 + r'^2 + 2\,rr'\,Cos.\,\alpha)}$$

voor de polaire vergelijking der kromme lijn, die door het punt S beschreven wordt; stellen wij kortheidshalve

$$\frac{a}{Sin.\alpha}=p \text{ en } \frac{1}{Sin.\alpha}.\sqrt{(r^2+r'^2+2rr'\,Cos.\,\alpha)}=q,$$

dan is deze vergelijking eenvoudiglijk

$$z=p\,Cos.\,\phi\pm q,$$

waarin nu p de middellijn des cirkels MTNO en q de diagonaal des parallelograms USVT beteekent, die de overstaande hoekpunten S en T vereenigt.

§ 4. Om te doen zien dat de kromme lijn, welker vergelijking wij gevonden hebben, werkelijk eene epicycloïde is, zullen wij thans de vergelijking voor de laatstgenoemde opmaken. Laten daartoe (*Fig.* 58) C en C′ twee cirkels van gelijke stralen zijn elkander in R′ rakende, dat verder de cirkel C′ om den cirkel C rolle en y' het punt zij, op het verlengde van den straal C′R′ des bewegenden cirkels genomen, waardoor eene epicycloïde zal beschreven worden; maken wij R′O = R′y', nemen wij O tot pool en OC tot oorsprong der hoeken aan, zij C″ de stand waarin de cirkel C′ na een klein gedeelte der beweging volbragt te hebben, gekomen is, in welken stand zij den cirkel C in r raakt, indien wij dan *boog* rR″ = *boog* rR′ nemen, C″R″ trekken en C″y'' = C′y' maken, zijn R″ en y'' de punten waarin R′ en y' door de beweging des cirkels gekomen zijn, en y'' is dus een onbepaald punt der epicycloïde. Stellen wij nu CR′ = C′R′ = R, R′y' = R′O = b, voorts Oy'' getrokken hebbende Oy'' = z en *hoek* COy'' = ϕ, en trekken wij R′R″ en CC″, die klaarblijkelijk door het raakpunt r gaat, dan zijn Oy'', R′R″ en CC″ evenwijdig, omdat *boog* rR′ = *boog* rR″ zijnde ook *hoek* rCR′ = *hoek* rC″R″ is, terwijl CR′ = C″R″ en CO = C″y'' zijn; trekken wij dus door C eene lijn evenwijdig met C″y'' tot dat zij het verlengde van Oy'' in G″ snijdt, dan is G″CC″y'' een parallelogram, weshalve CG″ = C″y'' en dus ook CG″ = CO is; de driehoek G″CO is alzoo gelijkbeenig *hoek* CG″O = *hoek* COG″ = ϕ, *hoek* G″CO = 180° − 2ϕ; voorts hebben wij de evenredigheid

$$OG'' : OC = Sin.\,G''CO : Sin.\,CG''O,$$

maar, omdat G″CC″y'' een parallelogram en dus G″y'' = CC″ = 2R is, is

$$OG'' = Oy'' + y''G'' = z + 2R;$$

voorts

voorts is $$OC = CR + RO = R + b,$$

$$Sin. G'CO = Sin. (180° - 2\phi) = Sin. 2\phi = 2\, Sin.\phi\, Cos.\phi,$$

en $$Sin. CG'O = Sin.\phi;$$

wij kunnen dus voor de laatste evenredigheid schrijven

$$z + 2R : R + b = 2\, Sin.\phi\, Cos.\phi : Sin.\phi,$$

waaruit men terstond vindt

$$z = 2(R + b)\, Cos.\phi - 2R;$$

hadden wij echter den stand des bewegenden cirkels reeds zoo verre gevorderd aangenomen, bijv. in C''', dat het punt y' in y''' boven de lijn CC' was komen te liggen, dan zou men $Oy''' = z$ en *hoek* $COy''' = \phi$ stellende, na CG''' evenwijdig met $C'''y'''$ getrokken te hebben, alles als boven vinden; alleen met dat onderscheid, dat dan $OG''' = Oy''' - y'''G''' = z - 2R$ zijn zou, waardoor men alsdan zou hebben

$$z = 2(R + b)\, Cos.\phi + 2R;$$

de vergelijking der epicycloïde door het punt y' gedurende de beweging des cirkels C' beschreven is dus eigenlijk

$$z = 2(R + b)\, Cos\,\phi \pm 2R;$$

stellen wij nu $2(R + b) = p$ en $2R = q$, dan wordt deze vergelijking

$$z = p\, Cos.\phi \pm q,$$

welke volkomen dezelfde is als die in § 3 gevonden; het blijkt dus hieruit, dat de kromme lijn in *Fig.* 57 verkregen indedaad eene epicycloïde is.

§ 5. In *Fig.* 58 zijn de parallelogrammen $G''CC''y''$, $G'''CC'''y'''$ altijd uit dezelfde zijden zamengesteld, dezelve hebben altijd een der hoekpunten in C, het daartegen over staande hoekpunt y'', y''' ligt altijd in de kromme lijn en de hoeken aan de beide overige hoekpunten zijn altijd gelijk aan den hoek die eene der zijden in C met de lijn CO maakt; indien dus een parallelogram $G''CC''y''$, met standvastige zijden doch veranderlijke hoeken, om een zijner hoekpunten C draait en tevens de hoeken van dat parallelogram zoodanig veranderen, dat de hoeken G'' en C'' ter wederzijde van het draaijings hoekpunt, altijd gelijk blijven aan den hoek die eene zijde CC'' in het draaijingspunt maakt met eene door dat punt gaande standvastige lijn CO, dan zal het hoekpunt y'', dat over het draaijings-punt

punt ligt, eene epicycloïde beschrijven; van het alzoo bewogen wordende parallelogram beschrijven de andere hoekpunten G″ en C″ klaarblijkelijk cirkels, waarvan de eene $CC' = CC'' = CC''' = 2R = q$, en de andere $CG'' = CG''' = CO = R + b = \frac{1}{2}p$ tot straal heeft; de laatstgenoemde cirkel in *Fig.* 58 is dus dezelfde als de cirkel MTNO in *Fig.* 57.

§ 6. Om in *Fig.* 57 de cirkels C en C′ en het punt y, waardoor in *Fig.* 58 de epicycloïde geboren werd, in derzelver ware stand en grootte te teekenen, hebben wij in *Fig.* 57 slechts $Oy = OL - TS = p - q = 2(R + b) - 2R = 2b$ te nemen, voorts Oy midden door te deelen in R en met $\frac{1}{2}TS = \frac{1}{2}q = R$ als stralen twee cirkels te beschrijven, die door het punt R gaan en welker middelpunten C en C′ op de lijn OX liggen; dan zal omdat, in *Fig.* 57 en 58, $OC = \frac{1}{2}p$ is een dier middelpunten in het middelpunt des cirkels MTNO vallen, en als men dan den cirkel C′ om den cirkel C laat rollen, zal het punt y op het verlengde van den straal C′R des cirkels C′ liggende, de epicycloïde beschrijven die in *Fig.* 57 vroeger op eene geheel andere wijze is geboren geworden.

§ 7. De kromme lijn in de *Figuren* 57 en 58 verkregen is eigenlijk die, welke men de verlengde epicycloïde noemt; had men in *Fig.* 58 het uiteinde R′ van den straal C′R′ des bewegenden cirkels tot beschrijvend punt aangenomen, zoo zoude men de gewone epicycloïde verkregen hebben; bij deze is het binnenste blad der verlengde epicycloïde van *Fig.* 57 en 58 in een keerpunt overgegaan, (zijnde de punten O, y' en R′ in elkander gevallen,) en om de vergelijking van § 4 op dezelve te kunnen toepassen zoude men slechts $b = 0$ behoeven te nemen. Had men eindelijk tot beschrijvend punt een punt op den straal C′R′ in plaats van op deszelfs verlengde genomen, dan zou men de verkorte epicycloïde bekomen hebben; bij dezelve is het zoo even genoemde keerpunt in een stelsel van twee buigpunten overgegaan, en om de vergelijking van § 4 er op te kunnen toepassen, heeft men slechts b negatief te nemen. Dewijl *b positief, gelijk nul* of *negatief* te nemen hetzelfde is als $p > q$, $p = q$ of $p < q$ te stellen, zoo ziet men hieruit, op welke wijze het van de waarde der standvastige grootheden r, r', a en α in § 3

voor-

voorkomende afhangt, of de in het voorstel opgegevene wet van beweging eene verlengde, eene verkorte of eene gewone epicycloïde zal voortbrengen. Veronderstelt men echter, dat de in het voorstel gegevene cirkels M en N elkander niet snijden, dan kan men door die wet van beweging slechts de verlengde epicycloïde verkrijgen, hoe groot of klein men ook de hoek α verkoos te nemen; want snijden die cirkels elkander niet, dan is $a > r + r'$ en bij gevolg $a^2 > r^2 + 2rr' + r'^2$; maar wat ook α zijn mag, is altijd $r^2 + 2rr' + r'^2 > r^2 + 2rr' \, Cos. \alpha + r'^2$, omdat voor $\alpha > 90°$ de term $2rr' \, Cos. \alpha$ negatief wordt, terwijl, voor $\alpha < 90°$, $Cos. \alpha < 1$ zijnde, altijd $2rr' \, Cos. \alpha < 2rr'$ is; derhalve is ook $a^2 > r^2 + 2rr' \, Cos. \alpha + r'^2$ of $a > \sqrt{(r^2 + r'^2 + 2rr' Cos. \alpha)}$ en bij gevolg $p > q$, hetgeen aanduidt, dat de kromme lijn eene verlengde epicycloïde is. Ten aanzien der laatstgenoemde zullen wij nog eenige bijzonderheden bijbrengen, die men op de gewone en verkorte epicycloïde, voor zoo verre dezelve daarvoor vatbaar zijn, ligtelijk zal kunnen toepassen.

§. 8. Uit de vergelijking $z = p \, Cos. \phi \pm q$ volgt terstond, dat de kromme lijn (*Fig.* 57) ter wederzijde van OX volmaakt denzelfden vorm heeft; want of men ϕ positief of negatief neemt, dit maakt ten aanzien der waarde van $Cos. \phi$ en dus ook van z geen het minste verschil. Door $\phi = 0$ te stellen vindt men, voor de overeenkomstige waarden van z, $OY = p + q$ en $Oy = p - q$. Door $\phi = 90°$ te stellen vindt men voor de polaire ordinaten die regthoekig door OX gaan, $Og = +q$, $Oh = -q$. Trekt men voor eene willekeurige waarde van ϕ, bij voorbeeld, $\phi =$ *hoek* LOT, de beide waarden van z, te weten

$$OS = p \, Cos. \phi + q,$$
$$Os = p \, Cos. \phi - q$$

van elkander af, dan vindt men

$$Ss = 2q,$$

en dewijl $TS = q$ is wordt Ss en T midden door gedeeld. Wanneer dus door O willekeurige lijnen OS, OY, OS′ worden getrokken, zijn de gedeelten van die lijnen sS, yY, $s'S'$, tusschen de beide bladen der kromme lijn begrepen, altijd even groot en worden door den cirkel MTNO midden door gedeeld. Hieruit volgt een zeer gemakkelijke weg om, wanneer eenmaal de

waar-

waarden van p en q bekend zijn, de kromme lijn te beschrijven; men neemt namelijk op OX een stuk OL $= p$, beschrijft op OL als middellijn eenen cirkel MTNO, trekt uit O willekeurige lijnen en zet op dezelve, ter wederzijde van het punt waar zij den omtrek des cirkels MTNO snijden, stukken uit, die gelijk q zijn, dan verkrijgt men daardoor zoo vele punten van de kromme lijn als men goedvindt.

Laat men den hoek LOT grooter worden, dan worden OS en Os beide kleiner, hun verschil S$s = 2q$ blijft echter standvastig; op het oogenblik dus dat OS $=$ Ss wordt, verdwijnt Os en alsdan moet de polaire ordinaat klaarblijkelijk de kromme lijn in het punt O raken; neemt men dus in de kromme lijn de koorden OW $=$ OZ $= 2q$, dan zijn de lijnen Ww en Zz juist de raaklijnen, die den hoek bepalen onder welken de kromme lijn zich zelve in O snijdt; deze hoek wordt klaarblijkelijk door de lijn gh midden door gedeeld; stelt men

$$z = p\,Cos.\,\phi + q = 2q \quad \text{of} \quad z = p\,Cos.\,\phi - q = 0,$$

dan vindt men voor de waarde van $Cos.\,\phi$, die met deze waarden van z overeenkomt

$$Cos.\,\mathrm{LOW} = \frac{q}{p},$$

waaruit men verder gemakkelijk afleidt

$$Sin.\,\mathrm{WO}g = \frac{q}{p},\quad Sin.\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{WO}z = \frac{q}{p},\quad Cos.\,\mathrm{WO}z = \frac{p^2 - 2q^2}{p^2},$$

$$Cos.\,\mathrm{WOZ} = \frac{2q^2 - p^2}{p^2};$$

de lijnen OW en OZ worden door den cirkel MTNO in m en n wederom midden door gedeeld; men kan dus ook in dien cirkel de koorden Om $=$ On $= q$ nemen, om daardoor de genoemde raaklijnen te verkrijgen, zonder dat men vooraf de kromme lijn zelve behoeft te construeren.

§ 9. Wij hebben steeds opgemerkt, dat, gedurende de beweging der lijnen ASB, de lijn OS den hoek MTN of ASB altijd in dezelfde standvastige deelen ASO en BSO blijft verdeelen en tevens altijd door het punt O blijft gaan; hieruit volgt dat wij de beweging van het punt S, waardoor de kromme lijn beschreven wordt, ook aanduiden kunnen, door te zeggen: dat van twee

lijnen, die elkander in S onder eenen standvastigen hoek ASO of BSO snijden, de eene OS altijd door het punt O gaat, terwijl de andere AS of BS altijd eenen cirkel M of N blijft aanraken.

De betrekking der deelen ASO en BSO van den hoek ASB staat met die der stralen van de cirkels M en N, gelijk mede met die der afstanden van de middelpunten dier cirkels tot het punt O, in een opmerkenswaardig verband; men heeft namelijk

uit den driehoek SIT, $SI = ST \times Sin. STI$ of $r = q \times Sin\, ASO$,

en uit den driehoek SKT, $SK = ST \times Sin. STK$ of $r' = q \times Sin. BSO$;

waaruit volgt $Sin. ASO = \frac{r}{q}$, $Sin. BSO = \frac{r'}{q}$,

en $Sin. ASO : Sin. BSO = r : r'$;

laat nu MO en NO getrokken worden, dan zijn de driehoeken MTO en NTO in den cirkel beschreven, welks middellijn OL is; wij hebben dus

$$p = OL = \frac{MO}{Sin. MTO} = \frac{MO}{Sin. ASO} \text{ en } p = OL = \frac{NO}{Sin. NTO} = \frac{NO}{Sin. BSO},$$

waaruit volgt $MO = p \times Sin. ASO$ en $NO = p \times Sin. BSO$,

als mede $Sin. ASO : Sin. BSO = MO : NO$;

de gevondene vergelijkingen en evenredigheden met elkander verbindende, verkrijgt men terstond nog

$$MO = \frac{p}{q} \times r, \quad NO = \frac{p}{q} \times r',$$

en $MO : NO = r : r'$.

§ 10. Trekt men uit S eene willekeurige lijn SE en uit T evenwijdig aan SE eene lijn, die den omtrek des cirkels MTNO in D snijdt, beschrijft men vervolgens uit D als middelpunt eenen cirkel, die de lijn SE aanraakt, en stelt men zich nu voor, dat het stelsel lijnen ASE, MTD, STO, zoodanig beweegt, dat de lijn AS den cirkel M blijft raken, STO door O blijft gaan, en dus, volgens hetgeen in den aanvang der vorige § gezegd is, het punt S de kromme lijn beschrijft, dan blijft TD bestendig door D gaan, omdat de hoek OTD onveranderd blijvende ook altijd de boog OD even groot blijven moet; SE, die altijd op eenen afstand gelijk aan den straal des cirkels D evenwijdig met TD is, blijft dus bestendig den cirkel D aanraken, en bij gevolg kan men de kromme lijn ook beschouwen, als beschreven te zijn door het

het snijpunt S van de lijnen AS en SE, die elkander onder eenen standvastigen hoek ASE snijden, waarvan de eene AS den cirkel M en de andere SE den cirkel D onophoudelijk blijft aanraken. Even als wij nu hier den cirkel N door eenen anderen cirkel D vervangen hebben, kan men ook den cirkel M door eenen anderen vervangen, en het blijkt dus, dat men om dezelfde epicycloide door onze voorgestelde wet van beweging voort te brengen, twee cirkels naar willekeur kan nemen, mits de stralen geen van beide grooter dan q zijn, wier middelpunten op den omtrek moeten liggen van den cirkel MTNO, die p tot middellijn heeft.

§ 11. Trekt men DO dan is, omdat de driehoek OTD in den cirkel beschreven is, die OL tot middellijn heeft,

$$p = OL = \frac{DO}{Sin.\,DTO} \quad \text{of} \quad DO = p \times Sin.\,DTO,$$

stelt men nu de straal des cirkels D door r'' voor en trekt men TF loodregt op SE, dan is

$$r'' = TF = ST \times Sin.\ TSF = q \times Sin.\,DTO \quad \text{of} \quad Sin.\,DTO = \frac{r''}{q},$$

deze beide vergelijkingen met elkander in verband brengende, heeft men

$$DO = \frac{p}{q} \times r'' \quad \text{of} \quad p : q = DO : r'';$$

zijn dus p en q bekend, dan behoeft men slechts eene vierde evenredige te construeren, om voor eenen willekeurigen straal r'' den afstand DO en dus het punt D te bepalen, of ook om den straal r'' te vinden, indien het punt D en bij gevolg de afstand DO gegeven is.

De uitdrukkingen, zoo hier als in § 9 gevonden, leeren dus, dat zoo men ρ noemt den straal eens cirkels, die naar de voorgestelde wijze, tot het beschrijven der epicycloide zal gebruikt worden, en ϑ de afstand van deszelfs middelpunt tot het polaire punt O, in het algemeen is

$$\vartheta = \frac{p}{q} \times \rho \quad \text{of} \quad p : q = \vartheta : \rho.$$

§ 12. Hetgeen wij aan het slot van § 10 gezegd hebben, kan door de vergelijking in § 3 gevonden nader opgehelderd worden; het is namelijk gebleken, dat de epicycloide slechts van twee

ſtandvaſtige grootheden p en q afhangt, wij hebben echter in § 3 tot het voortbrengen der epicycloïde vier ſtandvaſtige grootheden r, r', a en α gebruikt, waaruit p en q door de vergelijkingen

$$p = \frac{a}{Sin.\,\alpha} \text{ en } q = \frac{1}{Sin.\,\alpha} \sqrt{(r^2 + r'^2 + 2rr' Cos.\,\alpha)}$$

gevonden worden, dus kunnen wij over twee dezer vier ſtandvaſtigen naar welgevallen beſchikken, mits men ſlechts r en r' geen van beide grooter dan q neme en niet over a en α gelijktijdig naar willekeur beſchikke.

Men wil, bij voorbeeld, dat de bewegende lijnen elkander regthoekig ſnijden, en dat de cirkels, waarmede zij in aanraking zijn, gelijke ſtralen hebben, zoo ſtelle men in de laatstgenoemde vergelijkingen $\alpha = 90^\circ$ en $r' = r$, dan vindt men oogenblikkelijk

$$a = p \text{ en } r = q\sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

den afſtand, die het middelpunt van deze cirkels van het punt O moet hebben, is volgens § 11

$$\vartheta = \frac{p}{q} \times r = \frac{p}{q} \times q\sqrt{\tfrac{1}{2}} = p\sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

trekkende dus (*Fig.* 57) eene lijn die OX regthoekig in C en den cirkel MTNO in G en H ſnijdt, heeft men daar OL $= p$ is

$$OG = OH = p\sqrt{\tfrac{1}{2}} \text{ en } GH = a = p;$$

G en H zijn dus de middelpunten van twee gelijke cirkels, wier ſtralen gelijk $q\sqrt{\frac{1}{2}}$ moeten genomen worden, opdat het ſnijpunt van twee onderling regthoekige lijnen, die elk beſtendig eenen dier cirkels raken, de epicycloïde beſchrijven, die door de grootheden p en q bepaald wordt.

Wil men, om nog een voorbeeld te nemen, dat wederom de bewegende lijnen elkander regthoekig ſnijden, maar dat een der cirkels in een enkel punt overgaat, zoodat men alsdan de epicycloïde zou beſchrijven, door het ſnijpunt van twee onderling regthoekige lijnen, waarvan de eene beſtendig door een ſtandvaſtig punt gaat, terwijl de andere eenen cirkel blijft aanraken, dan zou men $\alpha = 90^\circ$ en $r' = 0$ moeten ſtellen, hetgeen terſtond geeft

$$a = p \text{ en } r = q;$$

voor de bepaling van de middelpunten heeft men weder:

voor die welks ſtraal $r = q$ is, $\vartheta = \frac{p}{q} \times r = \frac{p}{q} \times q = p$,

en

en voor die welks ſtraal $r' = 0$ is, $\vartheta = \frac{p}{q} \times 0 = 0$;
de eerstgenoemde cirkel is dus klaarblijkelijk die, welke uit L als middelpunt met LY als ſtraal beſchreven wordt, de laatstgenoemde, die tot een enkel punt is overgegaan, is het punt O. (*)

Stellen wij tot een laatſte voorbeeld, dat men tot het beſchrijven der epicycloide twee cirkels wilde gebruiken, die gelijke ſtralen hadden en elkander raakten, zoo zoude men in de vergelijkingen

$$p = \frac{a}{Sin.\,\alpha} \quad \text{en} \quad q = \frac{1}{Sin.\,\alpha} \sqrt{(r^2 + r'^2 + 2rr' \, Cos.\,\alpha)},$$

$r = r'$ en $a = r + r' = 2r$ moeten ſtellen, waardoor dezelve overgaan in

$$p\,Sin.\,\alpha = 2r \quad \text{en} \quad q\,Sin.\,\alpha = 2r\sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} Cos.\,\alpha)},$$

deze vergelijkingen in elkander deelende, komt er

$$\frac{q}{p} = \sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} Cos.\,\alpha)} \quad \text{of} \quad \frac{q^2}{p^2} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} Cos.\,\alpha,$$

hieruit vindt men gemakkelijk

$$Cos.\,\alpha = \frac{2q^2 - p^2}{p^2} \quad \text{en} \quad Sin.\,\alpha = \sqrt{(1 - Cos^2.\,\alpha)} = \frac{2q}{p^2}\sqrt{(p^2 - q^2)},$$

deze waarde voor $Sin\,\alpha$ in de bovenſtaande vergelijking $p\,Sin.\,\alpha = 2r$ overbrengende, vindt men

$$r = \frac{q}{p}\sqrt{(p^2 - q^2)},$$

en nu is volgens § 11.

$$\vartheta = \frac{p}{q} \times r = \frac{p}{q} \times \frac{q}{p}\sqrt{p^2 - q^2}) = \sqrt{(p^2 - q^2)};$$

neemt men derhalve in *Fig.* 57 de koorde $L\beta = q$, dan is β het middelpunt van eenen der begeerde cirkels en $\beta\gamma$, uit β loodregt op OL getrokken, deszelfs ſtraal; want wij hebben

$$O\beta = \sqrt{(OL^2 - L\beta^2)} = \sqrt{(p^2 - q^2)},$$

en

$$OL : O\beta = L\beta : \beta\gamma,$$

waaruit

$$\beta\gamma = \frac{O\beta \times L\beta}{OL} = \frac{q}{p}\sqrt{(p^2 - q^2)},$$

het-

(*) Men vindt dit voorbeeld afzonderlijk behandeld in het 199 Voorſtel der Verz., II Deel.

hetgeen met de boven gevondene waarden van ϑ en r overeenkomt; het middelpunt van den anderen cirkel ligt klaarblijkelijk op dezelfde wijze aan de andere zijde van OL; wat eindelijk den hoek α betreft, waaronder de bewegende lijnen elkander moeten snijden, deze is niets anders dan de *hoek* WOZ, daar wij voor de *Cosinus* van dien hoek in § 8. dezelfde waarde als zoo even voor *Cos.* α gevonden hebben.

Wij merken nog op dat $p = \frac{a}{Sin.\,\alpha}$ zijnde, voor $\alpha = 90°$ altijd $p = a$ is, en dat derhalve, indien de bewegende lijnen elkander regthoekig snijden, de middelpunten der cirkels, waarmede die lijnen in aanraking blijven, op de uiteinden van eene zelfde middellijn des cirkels MTNO moeten liggen en omgekeerd.

§ 13. Gedurende de beweging der lijnen Aa' en Bb' blijft derzelver snijpunt S altijd een punt van de lijn Bb, de lijn Bb blijft altijd eene raaklijn aan den cirkel N, hieruit volgt, dat het punt S altijd buiten den cirkel N blijft; alleen is hiervan uitgezonderd het oogenblik, waarin juist S het punt van de lijn Bb is, waarmede zij den cirkel raakt, dewijl alsdan het punt S zich op den omtrek van dien cirkel bevindt. Dewijl nu het punt S, waardoor de epicycloide beschreven wordt, gedurende deszelfs beweging, zich een enkel oogenblik op den omtrek des cirkels N bevindt, maar overigens buiten dien cirkel blijft, moet de epicycloide dien cirkel raken; dit heeft natuurlijk twee malen plaats, eens terwijl het punt van de lijn Bb, waarmede die lijn den cirkel raakt, zich van B naar b, en nog eens terwijl zich dat punt van b naar B verplaatst; het eerste gebeurt wanneer het punt S het buitenste blad, het laatste wanneer dat punt het binnenste blad der epicycloide beschrijft; bij gevolg moet de cirkel N de beide bladen van de kromme lijn raken, hetzelfde geld voor alle andere cirkels als M of D, die men kan gebruiken om door onze voorgestelde wet van beweging de kromme lijn te beschrijven; en daar volgens § 10 de middelpunten dezer cirkels altijd op den omtrek van den cirkel MTNO liggen, blijkt, dat de omtrek MTNO de meetkunstige plaats is, van de middelpunten der cirkels, die tusschen de beide bladen der kromme lijn zoodanig beschreven kunnen worden, dat zij elk dier bladen aanraken.

De-

Dewijl volgens § 11. voor alle die cirkels

$$MO : r = NO : r' = DO : r'' = \vartheta : \rho = p : q$$

is, ziet men verder, dat indien men een willekeurig aantal cirkels beschrijft, wier middelpunten op den omtrek MTNO van eenen anderen gegevenen cirkel liggen, en wier stralen evenredig zijn aan de afstanden hunner middelpunten van een standvastig punt O in dien gegeven omtrek, dat dan alle deze cirkels zullen kunnen omvat worden, door eene epicycloide, waarvan de beide bladen elk in het bijzonder alle die cirkels raken.

§ 14. Hoe men den straal van eenen cirkel, die de beide bladen der epicycloide aanraakt, kan vinden, indien deszelfs middelpunt gegeven is of omgekeerd, is reeds in § 11 gebleken; wij zullen thans onderzoeken, hoe men het raakpunt van zulk eenen cirkel met de kromme lijn kan vinden, indien het middelpunt des cirkels gegeven is of omgekeerd. Indien men naar een punt S onzer kromme lijn (*Fig.* 57) eene polaire ordinaat OS trekt, die den cirkel MTNO in T snijdt, zullen de lijnen uit T naar het middelpunt van den cirkel N en uit S rakende aan dien cirkel getrokken evenwijdig zijn; uit § 2 is blijkbaar; dat dit voor elk willekeurig punt der kromme plaats heeft. Laat nu S″ het punt zijn waarin het buitenste blad der kromme lijn den cirkel N raakt, indien wij dan de polaire ordinaat OS″ trekken, die den cirkel MTNO in T″ snijdt; en verder door S″ eene raaklijn B″b″ aan den cirkel N en uit T″ eene lijn T″N naar het middelpunt N van dien cirkel getrokken wordt, zijn B″b″ en T″N evenwijdig; B″b″ als raaklijn regthoekig op den straal NS″ zijnde, is derhalve ook T″N regthoekig NS″ en bij gevolg is de driehoek T″NS″ regthoekig in N; wij hebben dus, daar $T''S'' = q$ en $NS'' = r'$ is,

$$T''N = \surd(T''S''^2 - NS''^2) = \surd(q^2 - r'^2);$$

de koorde LN getrokken hebbende, is ook de driehoek LNO regthoekig in N, omdat de hoek LNO in eenen halven cirkel staat; daar nu $OL = p$ en volgens § 9. $NO = \frac{p}{q} r'$ is, hebben wij

$$LN = \surd(OL^2 - NO^2) = \surd(p^2 - \frac{p^2}{q^2} r'^2) = \frac{p}{q} \surd(q^2 - r'^2);$$

uit de beide laatste vergelijkingen volgt terstond

$$LN : T'N = \frac{p}{q} : 1 = p : q ;$$

is dus het punt S' gegeven, waar een cirkel, dien men tusschen de beide bladen der epicycloide wil beschrijven, het buitenste blad raken moet, zoo trekke men OS', die den cirkel MTNO in T' snijdt en deele de boog LT' in N zoodanig, dat de koorden der deelen LN en NT' in rede zijn als $p : q$, (*) dan is N het middelpunt van den cirkel, die met NS' als straal beschreven, het buitenste blad der epicycloide in S' en ook het binnenste blad ergens raken zal. Was daarentegen het middelpunt N gegeven en wilde men het punt S' bepalen, zoo zoude men uit N eene koorde NT' in den cirkel MTNO moeten uitzetten die vierde evenredig was tot p, q en LN; hierdoor zou alsdan het punt T'' gevonden zijn, waardoor men slechts de polaire ordinaat OS'' behoeft te trekken om het punt S'' te verkrijgen.

Het raakpunt s'' op het binnenste blad der kromme lijn staat met het middelpunt N in een dergelijk verband; men trekke namelijk de polaire ordinaat Os'' wier verlengde den cirkel MTNO in t'' snijdt, dan is de koorde Nt'' weder evenwijdig met de raaklijn $B'''b'''$, de driehoek $s''Nt''$ is dus weder regthoekig in N en men heeft, daar ook $s''t'' = q$ en $s''N = r'$ is,

$$t''N = \sqrt{(t''s''^2 - Ns''^2)} = \sqrt{(q^2 - r'^2)},$$

en

$$LN : t''N = p : q ;$$

is dus het punt s'' gegeven, zoo kan men het punt N vinden, door $Os''t''$ te trekken en op het verlengde van den boog Lt'' een punt N te bepalen, zoodanig dat de koorde LN tot de koorde $t''N$ in rede zij als $p : q$ (†); was het punt N gegeven, zoo zoude men omgekeerd het punt s'' vinden door wederom Nt'' vierde evenredig tot p, q en LN te nemen en daarna Ot'' te trekken, die dan de kromme lijn in het begeerde punt s'' moet snijden.

§ 15. Uit de gevondene waarden voor $T''N$ en $t''N$ blijkt dat deze koorden en dus ook de boogen die zij onderspannen ge-

(*) Hoe dit geschiedt is in het vorige Voorstel aangewezen.

(†) Hoe dit geschieden kan blijkt almede uit de aanmerking op het vorige Voorstel.

gelijk zijn; de hoeken $S''ON$ en $s''ON$ door de helften dier boogen gemeten wordende, zijn derhalve even groot; verder zijn de driehoeken $NT''S''$ en $Nt''s''$, als uit gelijke zijden zamengesteld, gelijk en gelijkvormig; zoo even vonden wij

$$LN:T''N=p:q,$$

volgens § 11. is $NO:NS''=p:q$,

en klaarblijkelijk is ook $OL:S''T''=p:q$,

de driehoek LNO is dus gelijkvormig met den driehoek $NT''S''$ of ook met $Nt''s''$; omdat $NO:NS''=p:q$ gevonden is, hebben wij uit den driehoek NOS''

$$Sin.\,NS''O:Sin.\,NOS''=p:q;$$

daar echter wegens de gelijkvormigheid der driehoeken LNO en $NT''S''$, *hoek* $NS''O=$ *hoek* LON is, terwijl *hoek* $NOS''=$ *hoek* NOs'' is gevonden, kunnen wij de laatste evenredigheid veranderen in

$$Sin.\,LON:Sin.\,(NOS''\text{ of }NOs'')=p:q.$$

De hoek $Os''N$ heeft den hoek $Ns''t''$, en dus ook den daaraan gelijken hoek $NS''T''$, tot supplement; van den vierhoek $Os''NS''$ zijn dus twee over elkander staande hoeken elkanders supplementen, en bij gevolg kan dien vierhoek in eenen cirkel beschreven worden; hieruit blijkt ook nog dat de hoek $s''NS''$, die gelijk is aan den hoek $t''NT''$, het supplement is van den hoek $s''OS''$.

§ 16. De eigenschap dat de punten O, s'', N en S'' altijd op den omtrek van eenen cirkel liggen, geeft ons een nog eenvoudiger middel aan de hand, dan in § 14. gegeven is, om indien een van de drie punten s'' N en S'' bekend is, de beide anderen terstond te vinden. De driehoek ONS'' is een ingeschrevene driehoek, in den cirkel die door de vier genoemde punten gaat, indien wij dus den straal van dien cirkel door x voorstellen, hebben wij terstond

$$x=\frac{ON}{2\,Sin.\,OS''N},$$

uit den driehoek $NT''S''$ hebben wij $Sin.\,OS''N=\frac{T''N}{T''S''}$, of daar $T''S''=q$ en volgens § 14. $T''N=\sqrt{(q^2-r'^2)}$ is, $Sin.\,OS''N=\frac{\sqrt{(q^2-r'^2)}}{q}$; brengen wij nu deze waarde, zoo mede de

vroeger gevondene $ON=\frac{p}{q}r'$, in de bovenstaande uitdrukking voor x over, dan komt er

$$x=\frac{pr'}{2\sqrt{(q^2-r'^2)}}.$$

Stellen wij verder op ON als bazis eenen gelijkbeenigen driehoek OPN, met den top P van OX afgewend en waarvan de opstaande zijden $x=\frac{pr'}{2\sqrt{(q^2-r'^2)}}$ zijn, dan is P klaarblijkelijk het middelpunt van den cirkel die door de meergenoemde vier punten gaat. Uit dezen gelijkbeenigen driehoek OPN, die wij, om verwarring voor te komen, in de figuur niet geteekend hebben, doch die men zich ligtelijk daarin zal voorstellen, trekken wij oogenblikkelijk

$$Cos.\,NOP=\frac{\frac{1}{2}ON}{OP},$$

of, daar $OP=\frac{pr'}{2\sqrt{(q^2-r'^2)}}$ genomen en $ON=\frac{p}{q}r'$ gevonden is,

$$Cos.\,NOP=\frac{\sqrt{(q^2-r'^2)}}{q},$$

waaruit volgt

$$Sin.\,NOP=\sqrt{(1-Cos^2.\,NOP)}=\sqrt{(1-\frac{q^2-r'^2}{q^2})}=\frac{r'}{q},$$

maar nu is

$$Cos.\,LON=Cos.\,T''S''N=\frac{NS''}{T''S''}=\frac{r'}{q},$$

en dus is $Sin.\,NOP=Cos.\,LON$, weshalve *hoek* NOP + *hoek* LON $=90^\circ$ is; wij besluiten dan hieruit dat het middelpunt van den cirkel, die tevens door *de pool* der kromme lijn, *het middelpunt* van den cirkel tusschen zijne bladen beschreven, en *de raakpunten* van dien cirkel met de kromme lijn gaat, op eene lijn ligt door O regthoekig op OX getrokken. Is dus een der drie punten r', N of S' gegeven, zoo behoeft men door dat gegevene punt en het punt O slechts eenen cirkel te brengen, welks middelpunt in gh of deszelfs verlengde ligt, dan zal die cirkel door hare snij-

snijding met de epicycloide en den cirkel MINO, de beide andere dier drie punten aanwijzen.

§ 17. Wanneer men aan den cirkel in het punt S' eene raaklijn trekt, zal deze tevens de epicycloide in S' raken; en wij kunnen dus door middel van de beschouwde rakende cirkels ook zeer gemakkelijk eene raaklijn aan eenig gegeven punt der epicycloide construeeren. Het punt O echter is van deze constructie uitgezonderd, omdat aldaar de geheele rakende cirkel in het enkele punt O overgaat; voor dit punt hebben wij echter reeds in § 8. de constructie der raaklijnen leeren kennen.

§ 18. Ten slotte zullen wij nog opmerken hoe uit het voorgaande duidelijk blijkt, dat men een stelsel van willekeurig aangenomene lijnen, die elkander echter alle in een zelfde punt S onder standvastige hoeken snijden, derwijze kan laten bewegen, dat eene dier lijnen bestendig door een aangenomen punt O gaat, terwijl elk der anderen eenen cirkel blijft aanraken, die naar de boven gegevene voorschriften gemakkelijk bepaald wordt.

CLII VOORSTEL.

Door G. Brandsteder.

De dag, gerekend de hoeveelste der maand, op welke de Heer G geboren werd, maakt met de maand, gerekend de hoeveelste des jaars, zoo veel uit als de som der cijfers van de eenheden, honderdtallen en duizendtallen des jaartals bedraagt. De dag, het cijfer der honderdtallen, de maand, en het cijfer van de eenheden des jaartals met den dag vermeerderd, vormen eene rekenkunstige reeks, waarvan de som gelijk is aan een derde van het getal, dat door de beide laatste cijfers des jaartals wordt uitgedrukt. Eindelijk is het driehoekig getal van den dag, gelijk aan de som der cijfers van de eenheden en tientallen des jaartals. Men vraagt hieruit te vinden op welken dag der week de Heer G geboren werd?

Opgelost *door* S. T. Boas, G. Brandsteder, D. Hoola van Nooten, L. J. Ulman, S. Dik, Cornz., C. F. Julius, A. C. Belinfante, R. M. C. Belinfante, M. G. Snoer, J. S. Speijer *en* J. Teixeira de Mattos, Bz.

Oplossing *van* S. T. Boas.

Stellen wij voor de reeks, in de tweede voorwaarde des Voorstels bedoeld,

$x-3y$,

$$x-3y,\ x-y,\ x+y \text{ en } x+3y,$$

dan is het getal dat de dag aanwijst

$$x-3y,$$

dat hetwelk de maand aanduidt

$$x+y,$$

het cijfer van de honderdtallen des jaartals

$$x-y,$$

en dat der eenheden

$$(x+3y)-(x-3y) \text{ of } 6y;$$

het cijfer der duizendtallen is klaarblijkelijk

$$1,$$

en dat der tientallen stellen wij voor door

$$z,$$

nu geeft de eerste voorwaarde de vergelijking

$$(x-3y)+(x+y)=6y+(x-y)+1,$$

waaruit men terstond vindt

$$x=7y+1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1);$$

de gegevene bepaling van de som der reeks geeft verder

$$4x=\frac{10z+6y}{3},$$

hierin de waarde van x uit (1) overbrengende en z afzonderende, komt er

$$z=\frac{39y+6}{5} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2);$$

eindelijk geeft de laatste voorwaarde nog

$$\frac{(x-3y)^2+(x-3y)}{2}=z+6y,$$

hierin voor x en z derzelver waarde (1) en (2) stellende, vindt men na herleiding

$$y^2-\tfrac{39}{40}y-\tfrac{1}{40}=0,$$

waaruit volgt $y=1$ of $y=-\tfrac{1}{40}$;

alzoo y niet anders dan een geheel positief getal zijn kan, hebben wij dus $y=1$, waaruit door (1) en (2) volgt $x=8$ en $z=9$.

De Heer G is dus op den 5 September 1796 geboren; terwijl wij door toepassing van den regel, opgegeven bij OZANAM, *Récr. Math.*

Math. et Phys., II Deel, pag. 240, vinden dat die dag MAANDAG was.

AANMERKING. Het cijfer der eenheden, door $6y$ voorgesteld, een geheel positief getal kleiner dan 9 moetende zijn, had men, zonder de laatste voorwaarde te gebruiken, terstond kunnen besluiten, dat $y=1$ moest zijn; waaruit dan het overige van zelf volgt.

CLIII. VOORSTEL.

Door G. GRAAFLAND.

Twee reizigers A *en* B *vertrekken op hetzelfde oogenblik van twee plaatsen* C *en* D. A *vertrekt van* C, *met voornemen om door* D *te gaan, en* B *vertrekt van* D, *om denzelfden kant heen te reizen als* A. *Na eenigen tijd gaans haalt* A, B *in, en op dit oogenblik bevinden zij, dat zij te zamen* 30 *mijlen hebben afgelegd, dat* A *reeds voor vier dagen door* D *gegaan was; en dat* B, *naar evenredigheid van den weg dien hij elken dag heeft afgelegd, zich negen dagreizen van* C *bevindt. Men vraagt naar den afstand van* C *en* D.

OPGELOST *door* L. J. ULMAN, G. GRAAFLAND, A. C. BELINFANTE, R. M. C. BELINFANTE, S. DIK, CORNZ., M. L. GOBDE, D. HOOLA VAN NOOTEN, B. DE JONGH, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, M. G. SNOER, J. S. SPEIJER, J. TEIXEIRA DE MATTOS, BZ. *en* I. WARNSINCK.

OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

Stel de afstand van C naar D gelijk x, en van D naar de plaats waar de reizigers elkander hebben ingehaald gelijk y mijlen, dan heeft A afgelegd $x+y$ mijlen,
en B y „ ;
de y mijlen legde A af in 4 dagen, dus de $x+y$ mijlen in

$$\frac{4(x+y)}{y} \text{ dagen;}$$

$x+y$ mijlen zou B in 9 dagen afleggen, dus y mijlen in

$$\frac{9y}{x+y} \text{ dagen;}$$

deze tijden klaarblijkelijk aan elkander gelijk moetende zijn, is alzoo

$$\frac{4(x+y)}{y}=\frac{9y}{x+y},$$

of $4(x+y)^2=9y^2$;

dus is $2(x+y)=3y$,

en $2x=y$;

maar het getal mijlen, dat zij te zamen afgelegd hebben, gelijk aan 30 gegeven zijnde, is

$$1(x+y)+y=30,$$

hierin de gevondene waarde $y=2x$ stellende, vindt men terstond

$$5x=30 \text{ en } x=6,$$

weshalve de gevraagde afstand 20 mijlen is.

Hieruit volgt verder dat zij tot aan hunne ontmoeting 6 dagen gereisd hebben, dat A 3 mijlen en B 2 mijlen per dag aflegde, en dat A 18, en B 12 mijlen in het geheel heeft afgelegd.

CLIV. VOORSTEL.

Door J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz.

Van eene meetkunstige evenredigheid zijn de eerste en derde term driehoekige getallen, en de tweede en vierde vierkanten; de som van de wortels beloopt $9\frac{2}{3}$. Zoo nu de eerste wortel in de tweede driemaal, en de derde in de vierde zesmaal begrepen is, begeert men deze evenredigheid te vinden?

OPGELOST *door* J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz., A. C. BELINFANTE, R. M. C. BELINFANTE, E. BOAS, S. T. BOAS, S. DIK, CORNZ., D. HOOLA VAN NOOTEN, C. F. JULIUS, B. LUBBERS, M. G. SNOEK, J. S. SPEIJER, L. J. ULMAN *en* I. WARNSINCK.

OPLOSSING *van* J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz.

Laat de wortels van den eersten en tweeden term zijn x en $3x$, dan is de som der wortels van den derden en vierden $9\frac{2}{3}-4x$; daar nu de eene der beide laatste wortels zesmaal in den anderen begrepen is, hebben wij voor den wortel van den derden term $\frac{9\frac{2}{3}-4x}{7}$ en voor dien van den vierden $\frac{6(9\frac{2}{3}-4x)}{7}$; bij gevolg wordt de bedoelde evenredigheid voorgesteld door

$$\tfrac{1}{2}x(x+1):9x^2=\tfrac{1}{2}\left(\frac{9\frac{2}{3}-4x}{7}\right)\left(\frac{9\frac{2}{3}-4x}{7}+1\right):\left(\frac{6(9\frac{2}{3}-4x)}{7}\right)^2,$$

welke uitdrukking dadelijk vereenvoudigd wordt tot

$$x+1:x=16\tfrac{2}{3}-4x:4(9\tfrac{2}{3}-4x),$$

of

of $$x+1 : x = 82 - 20x : 188 - 80x;$$
de gelijkheid van de producten der uiterste en middelste termen geeft alsnu
$$188 + 108x - 80x^2 = 82x - 20x^2,$$
of na herleiding
$$30x^2 - 13x - 94 = 0,$$
dus is $$x^2 - \tfrac{13}{30}x - \tfrac{47}{15} = 0,$$
en $$x = 2 \quad \text{of} \quad x = -\tfrac{47}{30};$$
waardoor wij dan voor de gevraagde evenredigheid vinden
$$3 : 36 = \tfrac{8}{25} : \tfrac{96}{25},$$
of $$\tfrac{729}{1800} : \tfrac{8299}{100} = \tfrac{1598}{441} : \tfrac{8836}{49}.$$

CLV. VOORSTEL.

Door A. C. BELINFANTE.

Men begeert het getal 48 in twee deelen te verdeelen, zoodanig dat het kleinste een pronik en het grootste een vierkant zij, welker wortels te zamen zoo veel bedragen als het vierkant van hun verschil?

Opgelost door A. C. BELINFANTE, Mr. G. W. DE BRUIJN KOPS, M. G. SNOER, R. M. C. BELINFANTE, E. BOAS, S. T. BOAS, S. DIK, CORNZ., J. J. GEFKEN, M. L. GOEDE, D. HOOLA VAN NOOTEN, B. DE JONGH, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, B. LUBBERS, J. S. SPEIJER, J. TEIXEIRA DE MATTOS, BZ., L. J. ULMAN en I. WARNSINCK.

I. OPLOSSING van A. C. BELINFANTE.

Zij x het verschil der wortels, x^2 hunne som, $\frac{x^2 - x}{2}$ de pronikwortel en $\frac{x^2 + x}{2}$ de vierkantswortel, dan zijn de deelen
$$\left(\frac{x^2-x}{2}\right)^2 + \frac{x^2-x}{2} \text{ en } \left(\frac{x^2+x}{2}\right)^2;$$
volgens de opgaaf hebben wij dus
$$\left(\frac{x^2-x}{2}\right)^2 + \frac{x^2-x}{2} + \left(\frac{x^2+x}{2}\right)^2 = 48,$$
hetgeen gemakkelijk herleid wordt tot
$$x^4 + 2x^2 - x - 96 = 0;$$
men vindt in deze vergelijking slechts eenen meetbaren wortel, $x = 3$, en de deelen zijn alzoo 12 en 36.

II.

II. Oplossing *van* Mr. G. W. de Bruijn Kops.

Dewijl 24 de helft van 48 is, moet het grootste deel meer dan 24 zijn; daar verder het grootste deel een vierkant zijn moet en 25 en 36 de eenige volkomen vierkanten tusschen 24 en 48 zijn, moet het grootste deel 25 of 36 en dus het kleinste 23 of 12 wezen; van deze beide alleen 12 een pronikgetal zijnde, kunnen de gevraagde deelen geene andere dan 36 en 12 zijn, en deze voldoen werkelijk aan de verdere voorwaarden des voorstels; want de wortels 6 en 3 zijnde, is hunne som 9 gelijk aan het vierkant van hun verschil.

CLVI. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Men vraagt twee regthoeken en een vierkant te vinden, waarvan de omtrekken aan elkander gelijk zijn en waarvan de inhouden harmonisch evenredig zijn?

Opgelost *door* B. Lubbers, C. F. Julius, L. J. Ulman, A. C. Belinfante, S. Dik, Cornz., M. L. Goede, J. Teixeira de Mattos, Bz., D. Hoola van Nooten, B. de Jongh *en* D. van Lankeren Matthes.

Oplossing *van* B. Lubbers.

Laat de zijde van het vierkant door x worden voorgesteld, de zijden van den eenen regthoek door $x+a$ en $x-a$ en die van den anderen regthoek door $x+b$ en $x-b$, dan zijn de omtrekken allen gelijk $4x$, en derhalve is aan de eene voorwaarde des Voorstels voldaan.

De inhouden zijn als nu

$$x^2,\ x^2-a^2 \text{ en } x^2-b^2,$$

dewijl deze inhouden harmonisch evenredig moeten zijn, heeft men

$$x^2 : x^2-b^2 = x^2-(x^2-a^2) : x^2-a^2)-(x^2-b^2),$$

waaruit men terstond vindt

$$x^2 = \frac{a^2b^2}{2a^2-b^2},$$

en

$$x = \frac{ab}{\sqrt{(2a^2-b^2)}},$$

het blijkt dus dat $2a^2-b^2$ een vierkant moet zijn; voorts is x^2 blijkbaar de grootste term der harmonische evenredigheid, derhalve

ve moet $x^2-a^2 > x^2-b^2$ en bij gevolg $b > a$ zijn; stellende alzoo $b=a+n$ heeft men voor het genoemde vierkant $a^2-2an-n^2$; laat nu $a-mn$ deszelfs wortel zijn, dan is

$$a^2-2an-n^2=a^2-2amn+m^2n^2,$$

waaruit gevonden wordt

$$n=\frac{2a(m-1)}{m^2+1},$$

hierin kan men nu voor a en m willekeurige waarden nemen, mits slechts $m>1$ zij; nemende $m=2$, heeft men $n=\frac{2}{5}a$, hierin $a=5$ nemende, is $n=2$, dus $b=a+n=7$, en $x=\frac{ab}{\sqrt{(2a^2-b^2)}}=35$; derhalve zijn alsdan de inhouden

$$x^2=1225,\ x^2-a^2=1200 \text{ en } x^2-b^2=1176,$$

welke getallen harmonisch evenredig zijn, terwijl voor de onttrekken van elk dezer inhouden 140 gevonden wordt.

CLVII. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Men begeert twee meetbare getallen te vinden, zoodat het vierkant van het eerste bij het tweede, of het vierkant van het tweede bij het eerste opgeteld wordende, de som in beide gevallen eene zelfde volkomene tweede magt zij?

OPGELOST *door* S. DIK, CORNZ., B. LUBBERS, A. C. BELINFANTE, D. HOOLA VAN NOOTEN, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, J. S. SPETJER, J. TEIXEIRA DE MATTOS, BZ., L. J. ULMAN, B. DE JONGH, M. G SNOER, M. L. GOEDE en M. H. GODEFROI.

OPLOSSING *van* S. DIK, CORNZ.

Stellen wij de begeerde getallen te zijn $x-y$ en $x+y$, dan hebben wij vooreerst

$$(x-y)^2+(x+y)=(x+y)^2+(x-y),$$

waaruit men terstond vindt

$$x=\tfrac{1}{2};$$

de gestelde getallen gaan dus over in $\frac{1}{2}-y$ en $\frac{1}{2}+y$, en ons blijft slechts over om

$$(\tfrac{1}{2}-y)^2+(\tfrac{1}{2}+y)=(\tfrac{1}{2}+y)^2+(\tfrac{1}{2}-y)=\tfrac{3}{4}+y^2$$

tot een volkomen vierkant te maken; stellen wij hiertoe dat $y+p$ deszelfs wortel zij, dan is

$$\tfrac{3}{4}+y^2=y^2+2yp+p^2,$$

waaruit men vindt

$$y=\frac{3-4p^2}{8p},$$

hierin kan men voor p eene willekeurige waarde nemen, die, ingeval men flechts pofitieve getallen begeert, echter zoodanig moet zijn, dat $y<\tfrac{1}{2}$ en dus ook $3-4p^2<4p$ is; voor $p=-1$ is $y=\tfrac{1}{8}$, en bij gevolg zijn dan de getallen $\tfrac{3}{8}$ en $\tfrac{5}{8}$; voor $p=-\tfrac{5}{4}$, is $y=\tfrac{13}{40}$ en de begeerde getallen zijn dan $\tfrac{7}{40}$ en $\tfrac{33}{40}$.

CLVIII. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Als men van een vierkant ABCD (*Fig.* 59) *op eene gegevene lijn* AB *als bazis befchreven, de opftaande zijden* AD *en* BC, *om de punten* A *en* B, *ieder even veel buitenwaarts laat omdraaijen en daarna de punten* C′ *en* D′ *door eene regte lijn vereenigt, verkrijgt men een trapezium* ABC′D′; *hoe groot zullen deze vereenigingslijn* C′D′ *en de hoeken van het trapezium moeten zijn, opdat deszelfs inhoud een maximum zij?*

OPGELOST *door* B. LUBBERS, L. J. ULMAN, F. J. STAMKART, C. F. JULIUS, S. T. BOAS, S. DIK, CORNZ., P. T. GRINWIS, D. HOOLA VAN NOOTEN *en* M. L. GOEDE.

I. OPLOSSING *van* B. LUBBERS.

Laat ABCD (*Fig.* 59) het bedoelde vierkant zijn, welks zijde gelijk a gegeven is en waarvan de opftaande zijden AD en BC, in den ftand AD′ en BC′ gekomen zijnde, het trapezium ABC′D′ hebben gevormd, welks inhoud een maximum moet zijn; ftellen wij dan

$$ED'=FC'=x,$$

zoo is $AE=BF=\sqrt{(AD'^2-ED'^2)}=\sqrt{(a^2-x^2)}$,

$$C'D'=EF+ED'+FC'=a+2x,$$

en voor den inhoud des trapeziums heeft men

$$\tfrac{1}{2}(AB+C'D')\times AE=(a+x)\sqrt{(a^2-x^2)};$$

zal deze inhoud een maximum zijn, zoo moet ook deszelfs tweede magt en dus de functie

$$y=(a+x)^2(a^2-x^2)=a^4+2a^3x-2ax^3-x^4$$

een maximum worden; de laatfte vergelijking differentierende, komt er

δy

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2a^3 - 6ax^2 - 4x^3,$$

dit differentiaal-quotient gelijk nul stellende, heeft men na deeling door 2

$$a^3 - 3ax^2 - 2x^3 = 0;$$

stellende nu $a = xz$, zoo gaat deze vergelijking, na deeling door x^3, over in

$$z^3 - 3z - 2 = 0,$$

waaruit men vindt $\quad z = 2;$

dus is $\quad x = \frac{a}{z} = \frac{1}{2}a,$

en $\quad C'D' = a + 2x = 2a;$

ter bepaling der hoeken heeft men

$$ED' = AD' \times Cos.\, ED'A,$$

of $\quad Cos.\, ED'A = \frac{ED'}{AD'} = \frac{1}{2},$

derhalve is $\quad$ *hoek* $ED'A =$ *hoek* $FC'B = 60°,$

en $\quad$ *hoek* $D'AB =$ *hoek* $C'BA = 120°.$

II. Oplossing *van* L. J. Ulman.

Laat wederom $AB = a$ zijn en stellen wij *hoek* $ED'A = \phi$, dan is $AE = a\, Sin.\, \phi$, $D'E = a\, Cos.\, \phi$, en derhalve

Inh. trap. $ABC'D' = (AB + D'E) \times AE = (a + a\, Cos.\, \phi)\, a\, Sin.\, \phi$
$= a^2\, Sin.\, \phi\, (1 + Cos.\, \phi),$

alzoo moet $Sin\, \phi (1 + Cos.\, \phi)$ een maximum zijn; stellen wij dus het differentiaal quotient dezer uitdrukking gelijk nul, dan komt er

$$Cos.\, \phi + Cos^2.\, \phi - Sin^2.\, \phi = 0,$$

of, $Sin^2.\, \phi = 1 - Cos^2.\, \phi$ substitúerende, en daarna door 2 deelende,

$$Cos^2.\, \phi + \tfrac{1}{2} Cos.\, \phi - \tfrac{1}{2} = 0,$$

waaruit men vindt

$$Cos.\, \phi = \tfrac{1}{2} \text{ en dus } \phi = 60°;$$

wij hebben dus *hoek* $ED'A = 60°$, *hoek* $D'AE = 30°$, *hoek* $D'AB = 120°$, $D'E = \frac{1}{2}a$ en $D'C' = 2a$.

Aanmerking *van* F. J. Stamkart. Het is ligt in te zien, dat de lijnen AD en BC, voortgaande met om de punten A en B te draaijen, in het verlengde van AB zullen komen, en dat alsdan

 de

de inhoud van het trapezium gelijk nul zal zijn; dat deze lijnen zich nog al verder voortbewegende, schuin naar beneden zullen vallen; en dat er onder de lijn AB nog een trapezium ABC″D″ zijn zal, waarvan de inhoud een maximum is. Daar echter dit trapezium onder AB, met betrekking tot dat boven AB, negatief is, is hetzelve geen *maximum*, maar een *minimum*. Wanneer dan ook *hoek* EAD′ $=90^\circ$ en de inhoud des trapeziums gelijk nul wordt, kan zulks geen minimum zijn, daar de inhoud alsdan slechts van den positieven tot den negatieven toestand overgaat; hetzelfde heeft plaats als *hoek* EAD′ $=270^\circ$ wordt, dan is de inhoud wederom gelijk nul en gaat van den negatieven tot den positieven toestand over, offchoon er eigenlijk, van *hoek* EAD′ $=210^\circ$ tot *hoek* EAD $=330^\circ$, geen trapezium, maar een stelsel van twee driehoeken bestaat.

De berekening bevestigt het bovenstaande volkomen; stellende namelijk den inhoud des trapeziums door I en *hoek* EAD′ door ψ voor, dan is, na behoorlijke herleidingen,

$$I = a^2 \,Cos.\, \psi (1 + Sin.\, \psi),$$

$$\frac{\partial I}{\partial \psi} = a^2 (1 + Sin.\, \psi)(1 - 2\, Sin.\, \psi),$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \psi^2} = -a^2 (Cos.\, \psi + 2\, Sin\ 2\psi),$$

$$\frac{\partial^3 I}{\partial \psi^3} = a^2 (Sin.\, \psi - 2\, Cos.\, 2\psi),\ enz.$$

door nu $\frac{\partial I}{\partial \psi} = 0$ te stellen, vindt men $Sin.\, \psi = -1$ of $Sin\, \psi = \frac{1}{2}$ en dus $\psi = 270^\circ$, $\psi = 30^\circ$ of $\psi = 150^\circ$; $\psi = 270^\circ$ maakt $\frac{\partial^2 I}{\partial \psi^2} = 0$ en $\frac{\partial^3 I}{\partial \psi^3} = -3a^2$, derhalve heeft er voor $\psi = 270^\circ$ noch maximum noch minimum plaats; $\psi = 30^\circ$ maakt $\frac{\partial^2 I}{\partial \psi^2} = -\frac{3}{2} a^2 \sqrt{3}$, dus heeft er voor $\psi = 30^\circ$ een maximum plaats; en eindelijk $\psi = 150^\circ$ maakt $\frac{\partial^2 I}{\partial \psi^2} = +\frac{3}{2} a^2 \sqrt{3}$, weshalve er voor $\psi = 150^\circ$ een minimum bestaat.

III. Oplossing *van* C. F. Julius.

Zal het trapezium ABC′D′ een maximum zijn, dan moet C′D′ de

de middellijn van den cirkel wezen, die om dit trapezium kan beschreven worden; (zie J DE GELDER, *Beg. der Meetk.* 3e druk, § 510) wij hebben dus, na uit het middelpunt M de lijnen MA en MB getrokken te hebben, de onderling gelijke gelijkzijdige driehoeken AMD′, AMB en BMC′, waaruit terstond volgt, dat de hoeken van het trapezium 60° en 120° zijn en dat de lijn C′D′ het dubbeld van de zijde des vierkants is.

CLIX. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

In eenen cirkel is een vierhoek beschreven, waarvan de diagonalen gelijk zijn, loodregt op elkander staan en elkander wederkeerig in de uiterste en middelste reden deelen. Men vraagt de hoeken van dezen vierhoek en de verhouding van deszelfs zijden tot de middellijn des cirkels te bepalen?

OPGELOST *door* L. J. ULMAN, B. LUBBERS, S. DIK, CORNZ., C. F. JULIUS, M. L. GOEDE, J. DE HOOP *en* D. VAN LANKEREN MATTHES.

OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

Zij ABCD (*Fig.* 60) de bedoelde vierhoek, welks diagonalen elkander regthoekig en in de uiterste en middelste reden snijden in E, dan blijkt vooreerst dat AD = BC en dus de vierhoek een trapezium is, en vervolgens, dewijl *hoek* E regt en AE = EB is, dat *hoek* EAB = *hoek* ABE = 45° en *boog* BC = *boog* AD = 90° is; wanneer de straal des cirkels voor eenheid wordt aangenomen, hebben wij alzoo AD = BC = $\sqrt{2}$. Stellen wij nu AE = EB = x en EC = ED = y, dan hebben wij, uit de snijding der diagonalen in de uiterste en middelste reden,

$$x+y : x = x : y,$$

dus is $$xy+y^2=x^2,$$

of $$x^2-y^2=xy \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1);$$

en, omdat de driehoek AED regthoekig is in E,

$$x^2+y^2=AD^2=2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

door nu de vergelijkingen (1) en (2) bij elkander op te tellen en van elkander af te trekken, vinden wij

$$2x^2=2+xy \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

en $$2y^2=2-xy \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4),$$

het product dezer laatste vergelijkingen is

$$4x^2y^2 = 4 - x^2y^2,$$

en daaruit volgt terstond

$$5x^2y^2 = 4 \text{ of } xy = 2\sqrt{\tfrac{1}{5}};$$

deze waarde van xy in (3) en (4) overbrengende, verkrijgt men

$$2x^2 = 2 + 2\sqrt{\tfrac{1}{5}} \text{ en } 2y^2 = 2 - 2\sqrt{\tfrac{1}{5}},$$

en daar nu $AB^2 = AE^2 + EB^2 = 2x^2$,

als mede $DC^2 = DE^2 + EC^2 = 2y^2$

is, hebben wij

$$AB = \sqrt{\left\{2 + 2\sqrt{\tfrac{1}{5}}\right\}} \text{ en } DC = \sqrt{\left\{2 - 2\sqrt{\tfrac{1}{5}}\right\}},$$

weshalve al de zijden des vierhoeks bekend zijn.

Om de hoeken te vinden, merken wij op, dat AB en CD, als koorden beschouwd, de dubbelde sinussen zijn van de helft der boogen AB en CD, dat is, van de hoeken ADB en DAC; alzoo is

$$\textit{Sin.}\,ADB = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left\{2 + 2\sqrt{\tfrac{1}{5}}\right\}} \text{ en } \textit{Sin.}\,DAC = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left\{2 - 2\sqrt{\tfrac{1}{5}}\right\}}$$

of $\textit{Sin.}\,ADB = 0{,}8506508$ en $\textit{Sin.}\,DAC = 0{,}5257311$,

en *hoek* $ADB = 58^\circ 16' 57'',09$ en *hoek* $DAC = 31^\circ 43' 2'',91$;

wij hebben dus

hoek ADC = *hoek* BDC = *hoek* ADB + 45° = 103° 16′ 57″. 09,

en *hoek* ABC = *hoek* DAB = *hoek* DAC + 45° = 76° 43′ 2″ 91,

waarmede het voorstel is opgelost.

Niets is echter gemakkelijker, dan den vierhoek ook meetkunstig te construeren. Trekken wij te dien einde in den gegeven cirkel de middellijnen AF en DG regthoekig door elkander, dan is AD reeds eene der zijden van den vierhoek. Deelen wij DG in de uiterste en middelste reden in H, trekken wij door H de lijn AHC, door deze regthoekig de koorde DB, dan zullen AC en DB elkander in de uiterste en middelste reden snijden in E, en gevolgelijk B en C de twee overige hoekpunten des vierhoeks zijn. Want, BG getrokken hebbende, is DBG een regthoekige driehoek, gelijkvormig met DEH, en dus DG : DH = DB : DE; DB is derhalve in E, in dezelfde reden gedeeld als DG in H; voorts is, omdat *boog* AD = 90° is, *hoek* DCA = *hoek* DBA = 45°, en dus, daar *hoek* E regt is, AE = EB en DE = EC; hieruit volgt, dat AC gelijk aan en in dezelfde reden als BD gesneden is. Uit deze constructie kunnen wij ook ge-

gemakkelijk de hoeken en zijden berekenen; zij als boven de ſtraal voor eenheid aangenomen en dus DG $= 2$, dan is GH $= -1+\sqrt{5}$ en HI $= -2+\sqrt{5}$; maar HI is klaarblijkelijk de *tangens* van den *hoek* HAI, weshalve

Tang. HAI $= -2+\sqrt{5} = 0{,}236068 =$ *Tang.* $13^\circ\, 16'\, 57'',09$,
waaruit dus het overige van zelve volgt.

CLX. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Men verlangt eene breuk te vinden, die de volgende eigenſchappen heeft: als men den teller met één vermindert, wordt deze breuk de eerſte term, als men den noemer met één vermindert wordt zij de tweede term, en als men den vierkantswortel uit de breuk trekt, verkrijgt men den derden term van eene rekenkunstige reeks; en indien men het product van de eerſte en derde termen dezer reeks, door den tweeden term deelt, komt er de gevraagde breuk?

OPGELOST *door* B. LUBBERS, A. C. BELINFANTE, E. BOAS, S. T. BOAS, Mr. G. W. DE BRUIJN KOPS, S. DIK, M. L. GOEDE, H. A. HARTOGH, D. HOOLA VAN NOOTEN, B. DE JONGH, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, C. VAN SCHAIÇK, M. G. SNOER, J. S. SPIJER *en* J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz.

OPLOSSING *van* B. LUBBERS.

De breuk voorſtellende door $\frac{x^2}{y^2}$, moeten

$$\frac{x^2-1}{y^2},\ \frac{x^2}{y^2-1},\ \frac{x}{y}$$

eene rekenkunstige reeks uitmaken, dus moeten wij hebben

$$\frac{x^2-1}{y^2}+\frac{x}{y}=\frac{2x^2}{y^2-1},$$

of, na verdrijving der noemers en overbrenging van termen,

$$(x^2-1)(y^2-1)=2x^2y^2-xy^3+xy \quad \ldots \quad (1);$$

de laatſte voorwaarde des voorſtels geeft ons de vergelijking

$$\frac{x^2-1}{y^2}\times\frac{x}{y}:\frac{x^2}{y^2-1}=\frac{x^2}{y^2},$$

of $$(x^2-1)(y^2-1)=x^3y \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Uit (1) en (2) volgt alzoo

$$2x^2y^2-xy^3+xy=x^3y,$$

of, door xy deelende en de termen verplaatſende,

$$x^2 - 2xy + y^2 = 1,$$

weshalve $x - y = \pm 1;$

om eene eigenlijke breuk te hebben, moet $x < y$ zijn, wij gebruiken dus alleen het benedenste teeken en hebben alsdan

$$x = y - 1,$$

deze waarde voor x in de vergelijking (2) overbrengende, komt er

$$(y^2 - 2y)(y^2 - 1) = (y - 1)^2 y,$$

of, na herleiding en deeling door y,

$$y^2 - 4y + 3 = 0,$$

waaruit volgt $y = 3$ of $y = 1;$

de laatste waarde van y zoude $x = 0$ maken, wij hebben dus alleen $y = 3$, derhalve $x = y - 1 = 2$, en bij gevolg is de gevraagde breuk

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{4}{9}.$$

CLXI. VOORSTEL.

Door K. SMIT.

Drie getallen te vinden, die eene rekenkunstige reeks uitmaken, zoodanig, dat hun gedurig product opgeteld wordende bij elk hunner producten twee aan twee, er telkens volkomene tweede magten komen? (*)

OPGELOST *door* K. SMIT, L. J. ULMAN, M. L. GOEDE *en* C. F. JULIUS.

I. OPLOSSING *van* K. SMIT.

Stel voor de drie getallen $x - 2y$, x en $x + 2y$, dan moeten

$$x^2 - 2xy + x^3 - 4xy^2,$$
$$x^2 + 2xy + x^3 - 4xy^2,$$
$$x^2 - 4y^2 + x^3 - 4xy^2,$$

allen volkomene vierkanten zijn; stelt men nu $x^3 - 4xy^2 = y^2$, dan worden de beide eerste uitdrukkingen vierkanten; de derde wordt hierdoor

$$x^2 - 3y^2,$$

en ons blijft niet anders over, dan ook deze uitdrukking tot een volkomen vierkant te brengen; uit de stelling $x^2 - 4xy^2 = y^2$ volgt

(*) P. HALCKEN, *Sinnen confect*, No. 325, bl. 379.

volgt $y^2 = \frac{x^3}{4x+1} = x^2 \frac{x}{4x+1}$, laat nu $\frac{x}{4x+1} = p^2$ en dus $y = px$ zijn, dan is $x = \frac{p^2}{1-4p^2}$ en $y = \frac{p^3}{1-4p^2}$, waardoor, men heeft

$$x^2 - 3y^2 = \frac{p^4}{(1-4p^2)^2} - \frac{3p^6}{(1-4p^2)^2} = \frac{p^4}{(1-4p^2)^2} \times (1-3p^2);$$

om nu deze uitdrukking tot een volkomen vierkant te maken, behoeft slechts $1-3p^2$ een vierkant te worden; stellen wij daartoe, dat $1-pq$ de wortel van dat vierkant zij, dan heeft men

$$1-3p^2 = 1-2pq+p^2q^2,$$

waaruit men vindt

$$p = \frac{2q}{q^2+3},$$

hieruit volgt dan, dat men heeft

$$x = \frac{p^2}{1-4p^2} = \frac{4q^2}{q^4-10q^2+9},$$

en $$y = px = \frac{4q^2}{q^4-10q^2+9} \times \frac{2q}{q^2+3}.$$

Indien men nu slechts q zoodanig neemt, dat $q^4+9 > 10q^2$ of $q > 3$ is, dan vindt men zoo vele antwoorden als men begeert; bij voorbeeld, $q=4$ nemende, zoo is $x = \frac{64}{105}$, $y = \frac{512}{1995}$ en de getallen zijn als dan: $\frac{64}{665}$, $\frac{64}{105}$ en $\frac{64}{57}$.

II. Oplossing *van* L. J. Ulman.

Stel voor de drie getallen x, ax en $2ax-x$, dan is aan de voorwaarde, dat dezelve eene rekenkunstige reeks moeten uitmaken, voldaan, en wij moeten de uitdrukkingen

$$2a^2x^3 - ax^3 + ax^2,$$
$$2a^2x^3 - ax^3 + 2ax^2 - x^2,$$
$$2a^2x^3 - ax^3 + 2a^2x^2 - ax^2,$$

of allen door x^2 deelende,

$$2a^2x - ax + a,$$
$$2a^2x - ax + 2a - 1,$$
$$2a^2x - ax + 2a^2 - a,$$

tot volkomen vierkanten maken; stellen wij nu

$$2a^2x - ax + a = p^2a^2,$$

dan is de eerste dezer uitdrukkingen een vierkant, en uit deze

 stel-

ſtelling volgt

$$x=\frac{p^2a^2-a}{2a^2-a}=\frac{ap^2-1}{2a-1},$$

waardoor de beide andere uitdrukkingen overgaan in

$$a^2p^2+a-1 \quad \text{en} \quad a^2p^2+2a^2-2a;$$

om dezelve tot vierkanten te maken, ſtellen wij

$$a^2p^2+a-1=\left(ap+\frac{a}{s}\right)^2,$$

en
$$a^2p^2+2a^2-2a=\left(ap+\frac{s}{t}\right)^2,$$

uit de eerſte dezer ſtellingen vindt men

$$p=\frac{as^2-s^2-a^2}{2a^2s},$$

en uit de tweede $p=\dfrac{2a^2t^2-2at^2-s^2}{2ast}$,

wij hebben dus

$$\frac{as^2-s^2-a^2}{2a^2s}=\frac{2a^2t^2-2at^2-s^2}{2ast},$$

waaruit gevonden wordt

$$s^2=\frac{a^2t(2at-2t+1)}{at+a-t};$$

nemen wij nu voor t een vierkant getal, dan zal het niet moeijelijk vallen a zoo te bepalen, dat de waarde van s rationaal worde; ſtel, bij voorbeeld, $t=4$, dan is

$$s^2=\frac{4a^2(8a-7)}{5a-4}=\frac{4a^2}{(5a-4)^2}\times(8a-7)(5a-4),$$

dus moet $(8a-7)(5a-4)=40a^2-67a+28$ een vierkant zijn, daar nu $a=1$ hieraan voldoet, ſtelle men $a=b+1$ en dus

$$40a^2-67a+28=40b^2+13b+1;$$

zij nu $1+bc$ de vierkantswortel dezer uitdrukking, en derhalve

$$40b^2+13b+1=(bc-1)^2,$$

dan vindt men hieruit

$$b=\frac{2c+13}{c^2-40};$$

nemende nu $c=7$, dan is $b=3$, $a=4$, $s=10$, $p=\dfrac{71}{80}$ en

$x=$

$x = \frac{3441}{11200}$; waardoor de getallen worden

$$\frac{3441}{11200},\ \frac{3441}{2800} \text{ en } \frac{3441}{1600}.\ (*)$$

CLXII. VOORSTEL.

Door K. SMIT.

Men vraagt een getal van acht cijfers te vinden, dat eene volkomene derde magt zij, en waarvan de eerste en zevende, de tweede en achtste, de derde en vijfde, als ook de vierde en zesde cijfers, twee aan twee aan elkander gelijk zijn?

OPGELOST *door* K. SMIT, D. HOOLA VAN NOOTEN, B. DE JONGH, C. F. JULIUS, J. S. SPEIJER *en* L. J. ULMAN.

OPLOSSING *van* K. SMIT.

Laten de cijfers van het gevraagde getal worden voorgesteld door

$$a,\ b,\ c,\ d,\ c,\ d,\ a,\ b,$$

dan zijn dezelve twee aan twee aan elkander gelijk, zoo als in het voorstel is bepaald; het getal zelve is dan

$$1000000\,(a,b) + 10000\,(c,d) + 100\,(c,d) + (a,b);$$

daar dit getal eene derde magt zijn moet, hebben wij dus

$$1000001\,(a,b) + 10100\,(c,d) = p^3;$$

de coëfficienten van het eerste lid dezer vergelijking door 101 deelbaar zijnde, hebben wij ook

$$9901\,(a,b) + 100\,(c,d) = \frac{p^3}{101};$$

dewijl 101 een ondeelbaar getal is, moet p een veelvoud van 101 zijn; wanneer men nu hierbij in aanmerking neemt, dat het kleinste derdemagtsgetal van acht cijfers 10077696 en het grootste 99897344 is, waarvan de wortels respectivelijk 216 en 464 zijn, dan blijkt hieruit, dat $p > 216$ en $p < 464$ moet wezen; dewijl nu tusschen 216 en 464 geene andere veelvouden van 101 liggen, dan 303 of 404, moet een dezer twee laatste getallen de wortel van het begeerde getal zijn; dezelve alzoo tot de derde magt verheffende, bevindt men dat

$(303)^3$

(*) Deze getallen zijn dezelfde als door P. HALCKEN, ter aangehaalde plaats, zonder oplossing zijn opgegeven.

$$(303)^3 = 27818127$$

indedaad aan de vereischten des voorstels voldoet.

CLXIII. VOORSTEL.

Door K. SMIT.

Het derdemagtsgetal 13824 *heeft de eigenschap, dat deszelfs wortel gelijk is aan het getal* (24) *door de twee laatste cijfers uitgedrukt; men vraagt hoe vele soortgelijke derdemagts getallen er nog kunnen gevonden worden?*

OPGELOST *door* C. F. JULIUS, L. J. ULMAN, K. SMIT, M L. GOEDE, D. HOOLA VAN NOOTEN, B. DE JONGH, D. VAN LANGEREN MATTHES *en* J. S. SPEIJER.

OPLOSSING *van* C. F. JULIUS.

Wanneer wij het derdemagts-getal door $100x+y$ voorstellen, dan moet volgens de voorwaarde des voorstels

$$100x+y=y^3,$$

of

$$(y+1)y(y-1)=100x$$

zijn; merken wij nu op dat $y+1$, y, $y-1$, drie op elkander volgende getallen zijn, wier product door 100 deelbaar moet wezen, dan volgt daaruit:

ten eersten, dat een dezer factoren door 25 deelbaar moet zijn; en

ten tweeden, dat er onder deze factoren een moet wezen, die door 4 deelbaar is, of twee, die elk door 2 deelbaar zijn.

In het oog houdende dat y een positief getal kleiner dan 100 moet zijn, kunnen wij dus, volgens de eerste dezer aanmerkingen, voor die factoren hebben:

$y+1=1$, $y=0$, $y-1=-1$;
$y+1=2$, $y=1$, $y-1=0$;
$y+1=25$, $y=24$, $y-1=23$;
$y+1=26$, $y=25$, $y-1=24$;
$y+1=27$, $y=26$, $y-1=25$; (*)
$y+1=50$, $y=49$, $y-1=48$;
$y+1=51$, $y=50$, $y-1=49$; (*)
$y+1=52$, $y=51$, $y-1=50$;
$y+1=75$, $y=74$, $y-1=73$; (*)
$y+1=76$, $y=75$, $y-1=74$;
$y+1=77$, $y=76$, $y-1=75$;
$y+1=100$, $y=99$, $y-1=98$.

Vol-

Volgens de tweede aanmerking echter, vervallen de waarden die met (*) aangeduid zijn; en wij hebben dus:

$y=00$, waaruit volgt $y^3=00$;
$y=01$, „ „ $y^3=01$;
$y=24$, „ „ $y^3=13824$;
$y=25$, „ „ $y^3=15625$;
$y=49$, „ „ $y^3=117649$;
$y=51$, „ „ $y^3=132651$;
$y=75$, „ „ $y^3=421875$;
$y=76$, „ „ $y^3=438976$;
$y=99$, „ „ $y^3=970299$.

zoodat er, indien men de wortels, die geene getallen van twee cijfers zijn, verwerpt, behalve het opgegevene getal 13824, nog zes dergelijke derdemagtsgetallen bestaan.

Aanmerking *van* L. J Ulman. De wortels der gevondene derdemagts-getallen hebben de merkwaardige eigenschap, dat zij twee aan twee bij elkander opgeteld, $(1+99)$, $(24+76)$, $(25+75)$, $(49+51)$ juist 100 uitmaken. Dit volgt daaruit, dat in het algemeen, wanneer q^n-q door p deelbaar is, ook $(p-q)^n-(p-q)$ door p zal kunnen gedeeld worden, waarvan men zich gemakkelijk overtuigt door in de laatste uitdrukking $(p-q)^n$ te ontwikkelen; zij nu a een der gevondene wortels, dan zal a^3-a door 100 deelbaar wezen, derhalve zal ook $(100-a)^3-(100-a)$ door 100 deelbaar en bij gevolg $100-a$ insgelijks een wortel zijn, die aan het gevraagde voldoet.

CLXIV. Voorstel.

Door K. Smit.

Gegeven zijnde

$$y^2+x=x^3-3yx^2+3y^2x-y^3,$$

en

$$x^2+x-2y^2-2y=0,$$

verlangt men de waarde van x en y, door eerste-magtsvergelijkingen te vinden?

Opgelost *door* K. Smit, Mr. G. W. de Bruijn Kops, D. Hoola van Nooten, B. de Jongh, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, J. S. Speijer *en* L. J. Ulman.

Op-

OPLOSSING *van* K. SMIT. (*)

Door optelling der beide vergelijkingen, heeft men

$$x^2+2x-y^2-2y=x^3-3yx^2+3y^2x-y^3,$$

deze vergelijking door $x-y$ deelende, komt er

$$x+y+2=x^2-2xy+y^2,$$

of $$x^2-2xy-x=-y^2+y+2;$$

maar volgens de tweede der gegevene vergelijkingen is

$$x^2+x=2y^2+2y,$$

hiervan de laatst gevondene vergelijking aftrekkende, vindt men

$$2xy+2x=3y^2+y-2;$$

deze vergelijking door $2y+2$ deelende, verkrijgt men

$$x=1\tfrac{1}{2}y-1$$

of $$x+1=1\tfrac{1}{2}y;$$

de tweede der gegevene vergelijkingen, in den vorm

$$x(x+1)=2y^2+2y$$

geschreven, gaat hierdoor over in

$$(1\tfrac{1}{2}y-1)\times 1\tfrac{1}{2}y=2y^2+2y,$$

dus is $$2\tfrac{1}{4}y^2-1\tfrac{1}{2}y=2y^2+2y,$$

of $$\tfrac{1}{4}y^2=3\tfrac{1}{2}y,$$

waaruit volgt $$y=14,$$

en $$x=1\tfrac{1}{2}y-1=20.$$

CLXV. VOORSTEL.

Door J. BADON GHIJBEN.

De som te vinden van een bepaald of oneindig aantal termen der reeks

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+ \textit{enz.?}$$

OPGELOST *door* C. F. JULIUS, F. J. STAMKART, L. J. ULMAN, M. L. GOEDE, B. LUBBERS, S. DIK *en* D. HOOLA VAN NOOTEN.

OPLOSSING *van* C. F. JULIUS.

Omdat in het algemeen $\frac{1}{a(a+1)}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}$ is, zullen wij de gegevene reeks in twee reeksen, de eene positief de andere negatief, kunnen ontleden, als:

1 +

(*) Van dit Voorstel vindt men eene andere oplossing in het Wisk. Mengelw. des Gen. Deel I, No. 113.

$$\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+ \text{enz.}$$

en $$-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6}- \text{enz.}$$

de termen der tweede reeks die der eerste reeks vernietigende, behalve de eerste term der eerste en de laatste term der tweede, zoo is het hieruit klaar, dat de som van n termen zijn zal

$$S=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1};$$

om de som van een oneindig aantal termen der reeks te vinden, behoeft men hierin slechts $n=\infty$ te nemen, als wanneer men verkrijgt

$$S=1.$$

CLXVI. VOORSTEL.

Door J. BADON GHIJBEN.

Men vraagt x, y en z op te lossen uit de vergelijkingen

$$a\sqrt{(x-y+z)(x+y-z)}=x\sqrt{yz},$$
$$b\sqrt{(x+y-z)(-x+y+z)}=y\sqrt{xz},$$
$$c\sqrt{(-x+y+z)(x-y+z)}=z\sqrt{xy}?$$

OPGELOST *door* C. F. JULIUS, F. J. STAMKART, L. J. ULMAN, Mr. G. W. DE BRUIJN KOPS, M. L. GOEDE, D. HOOLA VAN NOOTEN, B. DE JONGH *en* D. VAN LANKEREN MATTHES.

OPLOSSING *van* C. F. JULIUS.

Wanneer wij de vergelijkingen twee aan twee met elkander vermenigvuldigen en het product door de derde vergelijking deelen, verkrijgen wij de drie nieuwe vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned}\frac{ab}{c}(x+y-z)&=xy,\\ \frac{bc}{a}(-x+y+z)&=yz,\\ \frac{ac}{b}(x-y+z)&=xz;\end{aligned}\right\}\text{ of }\left\{\begin{aligned}x+y-z&=\frac{c}{ab}xy,\\ -x+y+z&=\frac{a}{bc}yz,\\ x-y+z&=\frac{b}{ac}xz;\end{aligned}\right.$$

tellen wij nu deze laatste vergelijkingen twee aan twee bij elkander op, dan verkrijgen wij wederom drie nieuwe vergelijkingen, te weten:

$$\left.\begin{array}{l} 2y = \dfrac{(c^2x+a^2z)y}{abc}, \\ 2x = \dfrac{(c^2y+b^2z)x}{abc}, \\ 2z = \dfrac{(a^2y+b^2x)z}{abc}; \end{array}\right\} \text{ of } \left\{\begin{array}{l} c^2x+a^2z = 2abc, \\ c^2y+b^2z = 2abc, \\ a^2y+b^2x = 2abc; \end{array}\right.$$

de drie laatste vergelijkingen van den eersten graad zijnde, vindt men daaruit gemakkelijk

$$x = \frac{a}{bc}(-a^2+b^2+c^2),$$

$$y = \frac{b}{ac}(a^2-b^2+c^2),$$

$$z = \frac{c}{ab}(a^2+b^2-c^2).$$

AANMERKING *van* F. J. STAMKART. Behalve de gevondene waarden van x, y en z, zullen ook nog aan de opgegevene vergelijkingen voldoen:

1°. $x=0$, $y=0$ en $z=0$;

2°. $x=0$ en $y=z$;

3°. $y=0$ en $x=z$;

en 4°. $z=0$ en $x=y$.

CLXVII. VOORSTEL.

Door S. DIK, CORNZ.

Een regt cilindervormig vat, waarvan de middellijn gelijk a en de hoogte gelijk b is, kan geheel gevuld zijnde p kannen water bevatten; dit vat is, terwijl deszelfs as vertikaal staat, tot eene hoogte c met water gevuld; men vraagt hoe hoog hetzelve aan de eene zijde zal moeten opgeligt worden, opdat er q kannen water uitgestort worden?

OPGELOST *door* F. J. STAMKART, S. DIK, CORNZ. *en* M. L. GOEDE.

OPLOSSING *van* F. J. STAMKART.

Bij de oplossing van dit voorstel, dienen twee gevallen te worden onderscheiden, naar gelang al of niet, na de uitstorting des waters, een gedeelte van den bodem ontbloot wordt; in het eerste geval is de oplossing aan geene zwarigheden onderhevig en loopt

loopt gemakkelijk af, terwijl in het tweede geval de vraag voor geene regtstreeksche oplossing vatbaar is.

Beginnen wij met het *eerste geval*, wanneer namelijk in den schuinen stand van het vat ABCD (*Fig.* 61) het water AECD, dat na de uitstorting in het vat overblijft, den bodem AD volkomen bedekt.

In dit geval deelen wij de overgeblevene hoeveelheid water in twee deelen, door een vlak EF evenwijdig aan den bodem, dan is het klaar, dat deze hoeveelheid een aantal kannen zal bedragen, gelijk aan het aantal cubieke palmen, dat in den cilinder AEFD begrepen is, opgeteld bij de helft van het aantal cubieke palmen in den cilinder EBCF vervat; want het oppervlak des waters deelt dezen laatsten cilinder in twee volkomen gelijke deelen.

Noemen wij nu D den hoek ADG, dan is de hoogte, tot welke het vat aan eene zijde moet opgeligt worden, dat is, AG $=$ AD $\times$ *Sin.* D $= a$ *Sin.* D; en, alzoo *hoek* ECB $=$ *hoek* ADG is, BE $=$ BC $\times$ *Tang.* D $= a$ *Tang.* D; derhalve is AE $=$ AB $-$ EB $= b - a$ *Tang.* D; hieruit volgt

$$Cil.\ AEFD = \tfrac{1}{4}a^2\pi \times AE = \tfrac{1}{4}a^2\pi\,(b - a\ Tang.\ D),$$

$$\tfrac{1}{2}\ Cil.\ EBCF = \tfrac{1}{4}a^2\pi \times EB = \tfrac{1}{4}a^2\pi \times \tfrac{1}{2}a\ Tang.\ D,$$

waaruit door optelling volgt

$$Inh.\ AECD = \tfrac{1}{4}a^2\pi\,(b - \tfrac{1}{2}a\ Tang.\ D);$$

en, indien wij de gegevens a, b, c beschouwen als in palmen te zijn uitgedrukt, stelt deze formule tevens het aantal kannen voor, in den *inhoud* AECD begrepen.

Voorts wordt dan de inhoud van het geheele vat, of het aantal kannen daarin begrepen, uitgedrukt door $\tfrac{1}{4}a^2b\pi = p$, de hoeveelheid water, die het vat in zijnen vertikalen stand bevatte, door $\tfrac{1}{4}a^2c\pi = \frac{c}{b}p$ en het aantal kannen water, dat na de uitstorting van q kannen in het vat overgebleven is, door $\frac{c}{b}p - q = \frac{cp - bq}{b}$; wij hebben alzoo de vergelijking

$$\tfrac{1}{4}a^2\pi\,(b - \tfrac{1}{2}a\ Tang\ D) = \frac{cp - bq}{b},$$

waaruit men vindt

$$Tang.\, D = 2\frac{b}{a} - 8\frac{cp - bq}{a^2 b \pi},$$

of, indien wij gemakshalve voor p zijne waarde $\frac{1}{4}a^2 b\pi$ schrijven en $q = \frac{1}{4}a^2 d\pi$ stellen, als wanneer d de hoogte van het uit te storten water, in den vertikalen stand des cilinders, beteekent,

$$Tang.\, D = 2\frac{b - c + d}{a} \quad \ldots\ldots\ (1),$$

deze formule, waaruit nu $AG = a\, Sin.\, D$ terstond kan berekend worden, kan dienen, zoo lang $BE < BA$, dat is, zoo lang $a\, Tang.\, D < b$ is, hetwelk vereischt, dat $2b - 2c + 2d < b$ en gevolgelijk $d < c - \frac{1}{2}b$ is; waaruit blijkt, dat deze eerste oplossing alleen kan gebruikt worden, ingeval het vat regt staande meer dan half gevuld is, en het tevens na de uitstorting meer dan half gevuld blijft.

Indien het uit te storten water het vat meer dan half ledigt, dan zal in den schuinen stand des cilinders, het water den bodem van het vat voor een gedeelte onbedekt laten, en derhalve het *tweede geval* plaats hebben.

In dit geval is nog wel (*Fig.* 62) de hoeveelheid water $HDC = \frac{cp - bq}{b}$, maar deze hoeveelheid wordt niet meer uitgedrukt, door de formule $\frac{1}{4}a^2\pi(b - \frac{1}{2}a\, Tang.\, D)$, zoo als wij zullen aantoonen. Laat AMLDA den halven bodem van het vat voorstellen, welke, als om de middellijn AD rond bewogen en op het verlengde van het vlak ABCD neergeslagen, is afgeteekend, dan wordt deze halve bodem door het water bedekt, tot aan de lijn HM, uit H loodregt op AD opgerigt; zij verder KI een vlak evenwijdig aan de as en regthoekig op de middellijn AD, dan snijdt dit vlak den bodem, volgens de lijn KL mede loodregt op AD getrokken, en de doorsnede, van dit vlak met den inhoud HDC, is een regthoek, KI en 2 KL tot zijden hebbende; het product van dezen regthoek met $Kk = \partial.\, DK$ kan als de differentiaal van den inhoud HDC beschouwd worden, en wij hebben dus

$$\partial.\, Inh.\, HDC = 2.\, KI \times KL \times \partial.\, DK;$$

stellen wij nu $boog\, DL = \frac{1}{2}a\phi$, dan is $KL = \frac{1}{2}a\, Sin.\, \phi$. $DK = \frac{1}{2}a(1 - Cos.\, \phi)$, $\partial.\, DK = \frac{1}{2}a\, Sin.\, \phi\, \partial\phi$; en trekkende uit I de

lijn

lijn IN loodregt op CD, heeft men

$$KI = DC - NC = DC - IN \times Tang.\, CIN,$$

of, omdat *hoek* CIN = *hoek* ADG = D, DC = b en IN = DK = $\frac{1}{2}a(1 - Cos.\,\phi)$ is,

$$KI = b - \tfrac{1}{2}a(1 - Cos.\,\phi)\, Tang.\, D;$$

bij gevolg is

$$\delta.Inh.HDC = 2(b - \tfrac{1}{2}a(1 - Cos.\,\phi)Tang.D) \times \tfrac{1}{2}a Sin.\,\phi \times \tfrac{1}{2}a Sin\,\phi\delta\phi,$$

of $\delta.Inh.HDC = \frac{1}{2}a^2(b - \frac{1}{2}aTang.D)\, Sin^2.\,\phi\delta\phi + \frac{1}{4}a^3\, Tang.\, D\, Sin^2.\,\phi$

$$Cos.\,\phi\delta\phi,$$

waaruit men door integrering vindt

$$Inh.HDC = \tfrac{1}{4}a^2(b - \tfrac{1}{2}aTang.D)(\phi - Sin.\phi Cos.\phi) + \tfrac{1}{12}a^3 Tang.D Sin^3\,\phi,$$

bij welke integraal geen standvastige behoeft gevoegd te worden, omdat dezelve voor $\phi = 0$ moet verdwijnen, en waarin als nu ϕ de boog DM beteekent.

Stellen wij in deze formule $\phi = \pi$, dan moeten wij terug komen, tot het geval dat de geheele bodem met water bedekt blijft, en wij vinden dan ook voor $\phi = \pi$

$$Inh. = \tfrac{1}{4}a^2\pi(b - \tfrac{1}{2}aTang.\,D),$$

even als wij bij het eerste geval reeds gevonden hadden.

Voor dit tweede geval, hebben wij dus ten eerste de vergelijking

$$\tfrac{1}{4}a^2(b - \tfrac{1}{2}aTang.D)(\phi - Sin.\phi Cos.\phi) + \tfrac{1}{12}a^3.Tang.D Sin^3.\phi = \frac{cp - bq}{b},$$

en daar, voor $\phi =$ *boog* DM, KI = o moet worden, is ten tweede

$$b - \tfrac{1}{2}a(1 - Cos.\,\phi)\,Tang.\,D = 0,$$

welke beide vergelijkingen de waarde van *Tang.* D bepalen, maar niet regtstreeks doen kennen. Trekkende uit de laatste dier beide vergelijkingen

$$Tang.\,D = 2.\frac{b}{a}.\frac{1}{1 - Cos.\,\phi} = \frac{b}{a\, Sin^2.\,\frac{1}{2}\phi} \quad . \; . \; (2),$$

en brengende deze waarde van *Tang.* D, gelijk mede $p = \frac{1}{4}a^2 b\pi$, $q = \frac{1}{4}a^2 d\pi$, in de eerste derzelve over, dan vindt men, na behoorlijke herleidingen.

$$\frac{Sin.\,3\phi + 9\,Sin.\,\phi - 12\,\phi Cos.\,\phi}{24\,Sin^2.\,\frac{1}{2}\phi} = \frac{c - d}{b} \times \pi \quad . \; (3),$$

hieruit kan de waarde van ϕ benaderd en daarna *Tang.* D berekend worden.

Wanneer een cilindervormig vat schuin staat, of regt staande eenen hellenden vlakken bodem heeft, kunnen de gevondene vergelijkingen dienen, om regtstreeks de hoeveelheid daarin zijnde vocht te berekenen, in het geval, dat de bodem niet geheel bedekt wordt. Zij *Fig.* 63 zulk een vat, dan is DE $= b$ en BC $= a$; zij verder AB $= m$ en CD $= n$, dan is *Tang.* D $=$ *Tang.* DAF $=$ $\frac{DF}{AF} = \frac{n-m}{a}$, gevolgelijk, uit (2), $Sin^2.\frac{1}{2}\phi = \frac{b}{a\,Tang.\,D} = \frac{b}{n-m}$. Hierdoor wordt ϕ bekend, dus ook, door (3), de waarde van $\frac{c-d}{b}x$, waarna de hoeveelheid vocht gevonden wordt, door deze waarde met $\frac{1}{4}a^2b$ te vermenigvuldigen.

CLXVIII. VOORSTEL.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

De zijden van eenen driehoek te berekenen, als gegeven zijn de hoogte des driehoeks en de stralen der in- en omgeschrevene cirkels?

Opgelost *door* W. J. C. Rammelman Elsevier, C. F. Julius, L. J. Ulman, J. S. Speijer, B. de Jongh *en* A. C. Belinfanth.

I. Oplossing *van* W. J. C. Rammelman Elsevier.

Zij ABC (*Fig.* 64) de bedoelde driehoek, waarvan de hoogte BE $= h$ gegeven is; zij O het middelpunt des ingeschreven cirkels, uit hetwelk de straal OD $= r$ en de lijnen OA en OC getrokken zijn; stellen wij voorts de straal des omgeschreven cirkels gelijk R, *hoek* BAC $= \phi + \psi$, *hoek* BCA $= \phi - \psi$, en dus *hoek* ABC $= 180° - 2\phi$, dan hebben wij, omdat de lijnen OA en OC de hoeken BAC en BCA midden door deelen,

$$AD = OD\,Cot.\,OAD = r\,Cot.\,\tfrac{1}{2}(\phi+\psi),$$
$$DC = OD\,Cot.\,OCD = r\,Cot.\,\tfrac{1}{2}(\phi-\psi),$$

hieruit volgt door optelling

$$AC = r(Cot.\,\tfrac{1}{2}(\phi+\psi) + Cot.\,\tfrac{1}{2}(\phi-\psi)),$$

of, dewijl in het algemeen

$$Cot.\,a + Cot.\,b = \frac{Sin.\,(a+b)}{Sin.\,a\,Sin.\,b} = \frac{2\,Sin.\,(a+b)}{Cos.\,(a-b) - Cos.\,(a+b)}$$

is,

AC

$$, AC = \frac{2r\,Sin.\phi}{Cos.\psi - Cos.\phi},$$

maar nu is ook

$$AC = 2R\,Sin.ABC = 2R\,Sin.(180° - 2\phi) = 2R\,Sin.2\phi = 4R\,Sin.\phi\,Cos.\phi,$$

derhalve

$$\frac{2r\,Sin.\phi}{Cos.\psi - Cos.\phi} = 4R\,Sin.\phi\,Cos.\phi,$$

of $$r = 2R\,Cos.\phi\,(Cos.\psi - Cos.\phi) \quad . \; . \; . \quad (1);$$

verder is $$AB = \frac{BE}{Sin.BAC} = \frac{h}{Sin\,(\phi+\psi)},$$

en ook $$AB = 2R\,Sin.BCA = 2R\,Sin.(\phi - \psi),$$

derhalve $$\frac{h}{Sin.(\phi+\psi)} = 2R\,Sin.(\phi - \psi),$$

of $$h = 2R\,Sin.(\phi+\psi)\,Sin.(\phi-\psi) = 2R(Cos^2.\psi - Cos^2.\phi) \quad . \; (2);$$

deelende nu de vergelijkingen (1) en (2) in elkander, komt er

$$\frac{h}{r} = \frac{Cos.\psi + Cos.\phi}{Cos.\phi},$$

waaruit men vindt

$$Cos.\phi = \frac{r}{h-r}\,Cos.\psi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3);$$

deze waarde van $Cos.\phi$ in de vergelijking (1) overgebragt, geeft

$$r = 2R \times \frac{r}{h-r}\,Cos.\psi\,\left(Cos.\psi - \frac{r}{h-r}\,Cos.\psi\right),$$

of $$(h-r)^2 = 2R\,(h-2r)\,Cos^2.\psi,$$

waaruit volgt

$$Cos.\psi = \pm\frac{h-r}{\sqrt{2R(h-2r)}};$$

verder vindt men, door (3),

$$Cos.\phi = \pm\frac{r}{\sqrt{2R(h-2r)}}.$$

Hierdoor ϕ en ψ gevonden zijnde, worden de hoeken des driehoeks bekend en men kan de zijden alsdan berekenen door de vergelijkingen

$$AB = 2R\,Sin.(\phi - \psi),$$
$$BC = 2R\,Sin.(\phi + \psi)$$

en $$AC = 2R\,Sin.2\phi.$$

 II.

II. Oplossing van C. F. Julius.

Stellende AC $=x$, AB $=y$, BC $=z$, *Inh. drieh.* ABC $=i$, en gebruikende voor de gegevens dezelfde letters als in de vorige oploſſing, heeft men volgens bekende formulen

$$2i=hx,$$

$$R=\frac{xyz}{4i}=\frac{xyz}{2hx} \text{ of } yz=2hR \quad \ldots \quad (1),$$

$$r=\frac{2i}{x+y+z}=\frac{hx}{x+y+z} \text{ of } x+y+z=\frac{hx}{r} \quad . \quad (2),$$

en $(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)=16i^2=4h^2x^2$ (3);
deelende (3) door (2), verkrijgt men

$$(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)=4hrx \quad (4),$$

voorts de vergelijking (2) ſchrijvende in den vorm

$$-x+y+z=\frac{(h-2r)x}{r} \quad \ldots\ldots \quad (5),$$

en deze vergelijking (5) nogmaals in (4) deelende, komt er

$$(x+y-z)(x-y+z)=\frac{4hr^2}{h-2r},$$

of

$$x^2-(y-z)^2=\frac{4hr^2}{h-2r} \quad \ldots\ldots \quad (6);$$

ſchrijven wij nu (2) wederom in den vorm

$$y+z=\frac{(h-r)\,x}{r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7),$$

dan is

$$(y+z)^2=\frac{(h-r)^2x^2}{r^2};$$

hiervan het viervoud der vergelijking (1) aftrekkende, komt er

$$(y-z)^2=\frac{(h-r)^2x^2}{r^2}-8hR \quad \ldots\ldots \quad (8);$$

ſubſtitueren wij nu (8) in (6), dan vinden wij na eenige herleiding

$$x^2=\frac{4r^2}{(h-2r)^2}\left(2R(h-2r)-r^2\right),$$

of

$$x=\frac{2r}{h-2r}\sqrt{\left\{2R(h-2r)-r^2\right\}};$$

en door nu deze waarde van x in (7) en (8) te ſtellen, worden ook y en z gevonden, waardoor het voorſtel is opgelost.

CLXIX. VOORSTEL.

Door Mr. G. W. DE BRUIJN KOPS.

Een ondeelbaar getal van twee cijfers te vinden, de eigenschap hebbende, dat men de cijfers omzettende een ander ondeelbaar getal verkrijgt, dat één minder is dan het dubbeld van het gevraagde getal?

OPGELOST *door* Mr. G. W. DE BRUIJN KOPS, D. HOOLA VAN NOOTEN, B. DE JONGH, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, A. C. BELINFANTE, E. BOAS, S. DIK, CORNZ., B. LUBBERS, M. G. SNOER, J. S. SPEIJER, J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz., L. J. ULMAN, S. T. BOAS *en* M. L. GOEDE.

OPLOSSING *van* Mr. G. W. DE BRUIJN KOPS.

Laat het cijfer der tientallen door x, dat der eenheden door y voorgesteld worden, dan is het begeerde getal $10x+y$ en het omgekeerde daarvan $10y+x$; het voorstel geeft dus de vergelijking

$$2(10x+y)-1=10y+x,$$

waaruit men vindt

$$y=2x+\frac{3x-1}{8};$$

stel nu $$3x-1=8a,$$

dan is $$x=2a+\frac{2a+1}{3};$$

stel verder $$2a+1=3b,$$

dan is $$a=b+\frac{b-1}{2};$$

en stellende eindelijk $$b-1=2c,$$

heeft men $$b=2c+1,$$

$$a=3c+1,$$

$$x=8c+3$$

en $$y=19c+7;$$

welke getallen men nu ook voor c neemt, zal men altijd voor x en y geheele getallen verkrijgen, die aan de opgegevene vergelijking voldoen; doch om aan het voorstel te beantwoorden moeten x en y kleiner dan 10 zijn, bij gevolg kan slechts $c=0$ zijn, en dit geeft $x=3$ en $y=7$; het begeerde getal is dus 37 en men heeft naar behooren $73=2\times37-1$.

AANMERKING *van* C. F. JULIUS. Uit de oplossing blijkt, dat de voorwaarden, dat het getal en deszelfs omgekeerde ondeelbaar moeten zijn, overtollig is.

CLXX. VOORSTEL.

Door P. T. GRINWIS.

Uit de drie hoeken A, B *en* C *van eenen bekenden driehoek, heeft men gemeten de hoeken* DAE, DBE *en* DCE, *die gevormd worden door de gezigtslijnen, gaande uit elk der punten* A, B *en* C *naar de spits* E *en naar den voet* D *van eenen toren; men weet bovendien, dat de punten* A, B, C *en* D *in een zelfde horizontaal vlak liggen, en vraagt uit deze gegevens de afstanden* AD, BD *en* CD, *benevens de hoogte* DE *van den toren te vinden?*

OPGELOST *door* P. T. GRINWIS, J. BADON GHIJBEN, L. J. ULMAN *en* C. F. JULIUS.

I. OPLOSSING *van* P. T. GRINWIS.

Alvorens tot eene oplossing des voorstels door berekening over te gaan, zullen wij eene eenvoudige meetkunstige constructie aanwijzen, om het voetpunt van den toren te bepalen; indien namelijk ABC (*Fig.* 65) den bekenden driehoek, D het voetpunt en E de spits van den toren voorstelt, en wij de gemetene hoeken $DAE = \alpha$, $DBE = \beta$ en $DCE = \gamma$ stellen, heeft men

$$AD = DE \times Cot.\alpha,\ BD = DE \times Cot.\beta,\ CD = DE \times Cot.\gamma,$$

en dus $$AD : BD : CD = Cot.\alpha : Cot.\beta : Cot.\gamma;$$

hierdoor is de vraag terug gebragt, tot het vinden van een punt D, welks afstanden van de punten A, B en C in gegevene reden zijn; men beschrijve dus (volgens J. DE GELDER, *Beg. der Meetk.* 3de druk, § 432) den cirkel ND'D (*Fig.* 66) die de meetkunstige plaats is van al de punten, welker afstanden van de punten A en B in de gegevene reden van $Cot.\alpha$ tot $Cot.\beta$ zijn, even zoo beschrijve men den cirkel MD'D, die de meetkunstige plaats is van al de punten, welker afstanden van A en C in de gegevene reden van $Cot.\alpha$ tot $Cot.\gamma$ zijn, dan zullen de punten D en D', waarin deze cirkels elkander snijden, beide aan de laatstgenoemde vraag voldoen; en dus, elk in het bijzonder, voor het gezochte voetpunt des torens kunnen genomen worden; hieruit wordt dan de hoogte des torens van zelve gevonden, als zijnde de eene regthoekszijde eens regthoekigen driehoeks, waarvan

van de door bovengenoemde constructie bepaalde lijn AD de andere regthoekszijde en α de aan AD liggende scherpe hoek is.

Om uit deze constructie eene oplossing door berekening te vinden, hebben wij (volgens § 130 van genoemde *Beg. der Meetk.*) dat het middelpunt R des cirkels ND′D in het verlengde van AB ligt, dat $AN : BN = Cot.\,\alpha : Cot.\,\beta$ en dat NR midden evenredig tusschen AR en BR is; men heeft dus

$$NR^2 = AR \times BR = (NR - AN)(NR + BN),$$

waaruit men vindt

$$NR = \frac{AN \times BN}{BN - AN};$$

terwijl uit $AN : BN = Cot.\,\alpha : Cot.\,\beta$

volgt $AN + BN : Cot.\,\alpha + Cot.\,\beta = AN : Cot.\,\alpha = BN : Cot.\,\beta$,

of $$AN = \frac{AB\,Cot.\,\alpha}{Cot.\,\alpha + Cot.\,\beta} = \frac{AB\,Cos.\,\alpha\;Sin.\,\beta}{Sin.\,(\alpha+\beta)} \quad \ldots \quad (1),$$

en $$BN = \frac{AB\,Cot.\,\beta}{Cot.\,\alpha + Cot.\,\beta} = \frac{AB\,Cos.\,\beta\;Sin.\,\alpha}{Sin.\,(\alpha+\beta)} \quad \ldots \quad (2);$$

even zoo ligt het middelpunt P des cirkels MD′D in het verlengde van AC en heeft men

$$MP = \frac{AM \times CM}{CM - AM},$$

$$AM = \frac{AC\,Cot\,\alpha}{Cot.\,\alpha + Cot.\,\gamma} = \frac{AC\,Cos.\,\alpha\,Sin.\,\gamma}{Sin.\,(\alpha+\gamma)} \quad \ldots \quad (3),$$

$$CM = \frac{AC\,Cot\,\gamma}{Cot.\,\alpha + Cot.\,\gamma} = \frac{AC\,Cos.\,\gamma\,Sin.\,\alpha}{Sin.\,(\alpha+\gamma)} \quad \ldots \quad (4);$$

laten wij nu uit D loodlijnen DG en DK op AC en AB vallen en trekken wij AD, dan is

$$AD^2 = AK^2 + DK^2 = AG^2 + DG^2;$$

stellen wij voorts de door (1), (2), (3) en (4) bekend geworden lijnen $BN = a$, $AN = b$, $CM = c$, $AM = d$, en de onbekende $AK = x$, $AG = y$, dan wordt hierdoor

$$NR = \frac{ab}{a-b}, \quad MP = \frac{cd}{c-d},$$

$$DK^2 = NK \times (2\,NR - NK) = (x+b)\left\{\frac{2ab}{a-b} - (x+b)\right\}$$

$$= -x^2 + \frac{b^2(a+b) + 2b^2x}{a-b},$$

 DG²

$$DG^2 = MG \times (2MP - MG) = (y+d)\left\{\frac{2cd}{c-d} - (y+d)\right\}$$
$$= -y^2 + \frac{d^2(c+d) + 2d^2y}{c-d};$$

indien men deze waarden in de vergelijking $AK^2 + DK^2 = AG^2 + DG^2$ overbrengt, komt er

$$\frac{b^2(a+b) + 2b^2x}{a-b} = \frac{d^2(c+d) + 2d^2y}{c-d};$$

stellende

$$\frac{b^2(a+b)}{a-b} = p \quad . \; . \; (5), \quad \frac{2b^2}{a-b} = q \quad . \; . \; (6),$$
$$\frac{d^2(c+d)}{c-d} = r \quad . \; . \; (7), \quad \frac{2d^2}{c-d} = s \quad . \; . \; (8),$$

gaat deze vergelijking over in

$$p + qx = r + sy,$$

waaruit volgt
$$y = \frac{p - r + qx}{s};$$

of stellende wederom

$$\frac{p-r}{s} = m \quad . \; . \; (9), \quad \frac{q}{s} = n \quad . \; . \; (10),$$

wordt dit eenvoudiglijk

$$y = m + nx.$$

Laat verder de hoek BAC door ϑ voorgesteld worden, dan kan deze hoek, indien slechts de zijden des driehoeks ABC gegeven waren, berekend worden door de formule

$$Cos. \vartheta = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 AB \times AC} \quad . \; . \; . \; (11);$$

uit K eene loodlijn KS op DG getrokken hebbende, en *hoek* KDS $=$ *hoek* KAT $= \vartheta$ zijnde, is $TG = KS = DK\, Sin. \vartheta$, ook is $AT = AK\, Cos. \vartheta = x\, Cos. \vartheta$, en bij gevolg

$$y = AG = AT - TG = x\, Cos. \vartheta - DK\, Sin. \vartheta;$$

de vroeger gevondene uitdrukking voor DK^2, gaat door (5) en (6) over in

$$DK^2 = -x^2 + p + qx,$$

wij hebben derhalve ook

$$y = x\, Cos. \vartheta - Sin. \vartheta . \sqrt{(-x^2 + p + qx)},$$

of,

of, voor y de vroeger gevondene waarde $m+nx$ substitnerende en de termen verplaatsende,

$$Sin.\vartheta.\sqrt{(-x^2+p+qx)}=x\,Cos.\vartheta-nx-m,$$

deze vergelijking in het vierkant gebragt wordende, geeft na herleiding

$$x^2(n^2+1-2n\,Cos.\vartheta)-x(q\,Sin^2.\vartheta+2m\,Cos.\vartheta-2mn)=p\,Sin^2.\alpha-m^2;$$

stellende nu

$$n^2+1-2n\,Cos.\vartheta=A \quad \ldots\ldots \quad (12),$$

$$q\,Sin^2.\vartheta+2m\,Cos.\vartheta-2mn=B \quad \ldots \quad (13),$$

$$p\,Sin^2.\vartheta-m^2=C \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14),$$

dan is $$Ax^2-Bx=C$$

en $$x=\frac{B\pm\sqrt{(B^2+4AC)}}{2A} \quad \ldots\ldots \quad (15);$$

hierdoor x bekend geworden zijnde, kan men AD ligtelijk vinden, want

$$AD^2=AK^2+DK^2=x^2+DK^2$$

zijnde, behoeft men hierin slechts de waarde van $DK^2=-x^2+p+qx$ over te brengen, om terstond te vinden

$$AD=\sqrt{(p+qx)} \quad \ldots\ldots \quad (16);$$

kunnende dan ook de hoogte des torens onmiddelijk berekend worden, door de formule

$$DE=AD\,Tang.\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17);$$

waarna eindelijk BD en CD, door de formulen

$$BD=DE\,Cot.\beta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18),$$

en $$CD=DE\,Cot.\gamma \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19),$$

bekend worden.

Deze formulen toepassende op het bijzonder geval, behandeld in het 153ste Voorstel van het 1ste Deel der *Kunstoeffeningen* des Genootschaps, waar gegeven was

BC = 300 voet, *hoek* DAE = 15°,
AC = 360 „ , *hoek* DBE = 12° 30′,
AB = 330 „ , *hoek* DCE = 14°.

zoo verkrijgt men

$$x=1256,5 \quad \text{of} \quad x=142,7;$$

voor de eerste waarde van x is

AD = 1426,1; BD = 1723,9; CD = 1532,9; DE = 382,13;

en voor de tweede waarde van x,

AD

$AD' = 178{,}6$; $BD' = 215{,}9$; $CD' = 192$; $D'E' = 47{,}85$.

II. OPLOSSING *van* J. BADON GHIJBEN.

Stellen wij de zijden des driehoeks (*Fig.* 65) $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, de gemetene hoeken $DAE = \alpha$, $DBE = \beta$, $DCE = \gamma$ en de onbekende hoogte des torens $DE = x$, dan is $AD = x\,Cot.\,\alpha$, $BD = x\,Cot.\,\beta$, $CD = x\,Cot.\,\gamma$; stellen wij voorts kortheidshalve $Cot.\,\alpha = p$, $Cot.\,\beta = q$, $Cot.\,\gamma = r$, en dus $AD = px$, $BD = qx$, $CD = rx$; zij verder *hoek* $ACB = C$, *hoek* $BCD = C'$, *hoek* $ACD = C''$, dan is

uit *drieh.* ABC, $Cos.\,C = \dfrac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2BC \times AC} = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$,

uit *drieh.* BCD, $Cos.\,C' = \dfrac{BC^2 + CD^2 - BD^2}{2BC \times CD} = \dfrac{a^2 + r^2x^2 - q^2x^2}{2arx}$,

en uit *drieh.* ACD, $Cos.\,C'' = \dfrac{AC^2 + CD^2 - AD^2}{2AC \times CD} = \dfrac{b^2 + r^2x^2 - p^2x^2}{2brx}$;

nu is $C = C' - C''$,

en dus $Cos.\,C = Cos.\,C'\,Cos.\,C'' + Sin\,C'\,Sin.\,C''$,

of ook $Sin.\,C'\,Sin.\,C'' = Cos.\,C - Cos\,C'\,Cos.\,C''$;

brengen wij deze vergelijking in het vierkant, dan komt er

$$Sin^2.C'\,Sin^2.C'' = Cos^2.C - 2\,Cos.C\,Cos.C'\,Cos.C'' + Cos^2.C'\,Cos^2C'',$$

dat is, na $1 - Cos^2.$ in plaats van $Sin^2.$ geschreven, het eerste lid ontwikkeld, en de gelijke termen weggelaten te hebben,

$$1 - Cos^2.C' - Cos^2.C'' = Cos^2.C - 2\,Cos.C\,Cos.C'\,Cos.C'',$$

of $Cos^2.C + Cos^2.C' + Cos^2.C'' = 1 + 2\,Cos.C\,Cos.C'\,Cos\,C''$;

hierin de boven gevondene uitdrukkingen voor de Cosinussen substitueerende, komt er

$$\frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2b^2} + \frac{(a^2+r^2x^2-q^2x^2)^2}{4a^2r^2x^2} + \frac{(b^2+r^2x^2-p^2x^2)^2}{4b^2r^2x^2} =$$

$$= 1 + \frac{(a^2+b^2-c^2)(a^2+r^2x^2-q^2x^2)(b^2+r^2x^2-p^2x^2)}{4a^4b^2r^2x^2};$$

indien wij nu deze vergelijking met $4a^2b^2r^2x^2$ vermenigvuldigen, alles ontwikkelen en herleiden, verkrijgen wij de vergelijking

$$\{a^2(p^2-r^2)(p^2-q^2)+b^2(q^2-r^2)(q^2-p^2)+c^2(r^2-p^2)(r^2-q^2)\}\,x^4 -$$
$$\{(a^2+b^2-c^2)c^2r^2 + (a^2+c^2-b^2)b^2q^2 + (b^2+c^2-a^2)a^2p^2\}\,x^2 +$$
$$a^2b^2c^2 = 0;$$

stel-

stellen wij vervolgens

$$L = a^2(p^2-r^2)(p^2-q^2)+b^2(q^2-r^2)(q^2-p^2)+c^2(r^2-p^2)(r^2-q^2) \quad (1),$$

$$M = \tfrac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)c^2r^2+\tfrac{1}{2}(a^2+c^2-b^2)b^2q^2+\tfrac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)a^2p^2 \quad (2),$$

$$N = a^2 b^2 c^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

zoo verandert onze vergelijking in

$$Lx^4 - 2Mx^2 + N = 0,$$

waaruit men vindt

$$x^2 = \frac{M \pm \sqrt{(M^2 - LN)}}{L},$$

of

$$x = \pm \sqrt{\frac{M \pm \sqrt{(M^2 - LN)}}{L}} \quad \ldots\ldots \quad (4);$$

de waarden van x, door de vergelijkingen (1), (2), (3) en (4), berekend hebbende, behoeft men dezelve slechts met *Cot.* α, *Cot.* β en *Cot* γ te vermenigvuldigen, om AD, BD en CD te vinden.

Passen wij deze oplossing op het genoemde voorbeeld in getallen toe, zoo hebben wij,

$$a = 300, \quad b = 360, \quad c = 330,$$

$$a^2 = 90000, \quad b^2 = 129600, \quad c^2 = 108900,$$

$$a^2+b^2-c^2 = 110700, \quad a^2+c^2-b^2 = 69300, \quad b^2+c^2-a^2 = 148500,$$

$$p = Cot.\,15^\circ = 3{,}7320508, \quad q = Cot.\,12^\circ 30' = 4{,}5107085,$$

$$r = Cot.\,14^\circ = 4{,}0107809,$$

$$q+p = 8{,}2427593, \quad r+p = 7{,}7428317, \quad q+r = 8{,}5214894,$$

$$q-p = 0{,}7786577, \quad r-p = 0{,}2787301, \quad q-r = 0{,}4999276;$$

hieruit vindt men, door behulp der logarithmen, gemakkelijk

$$a^2(p^2-r^2)(p^2-q^2) = 1246651,$$

$$b^2(q^2-r^2)(q^2-p^2) = 3543618,$$

$$c^2(r^2-p^2)(r^2-q^2) = -1001232,$$

opt.

$$L = 3789037;$$

$$\tfrac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)c^2r^2 = 96962400000,$$

$$\tfrac{1}{2}(a^2+c^2-b^2)b^2r^2 = 91368800000,$$

$$\tfrac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)a^2p^2 = 93075200000,$$

opt.

$$M = 281406400000;$$

voorts

$$Log.\,N = 15{,}1038754;$$

$$\sqrt{(M^2 - LN)} = 272721000000;$$

en

en eindelijk $x = \pm 382,42$ of $x = \pm 47,87$.

Daar onze eindvergelijking alleen de tweede magten van de *Cotangenten* der gemetene hoeken bevat, is het klaar, dat de oplossing even zeer toepasselijk zou zijn, indien de gemetene hoeken negatief waren, hiermede stemmen de negatieve waarden van x overeen; overigens behoort de eerste waarde van x klaarblijkelijk tot het geval, dat de toren buiten, de tweede tot het geval, dat de toren binnen den driehoek ligt.

Aanmerking. De uitdrukking $\sqrt{(M^2 - LN)}$ kan men eene herleiding doen ondergaan, die opmerking verdient; hoezeer dezelve de berekening niet vereenvoudigt, omdat men toch de waarde van M en L afzonderlijk moet berekenen. Men stelle namelijk

$$\tfrac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)=c', \quad \tfrac{1}{2}(a^2+c^2-b^2)=b', \quad \tfrac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)=a',$$

dan vindt men door deze vergelijkingen twee aan twee op te tellen

$$a^2 = b'+c', \quad b^2 = a'+c', \quad c^2 = a'+b';$$

hierdoor wordt

$$M = c'(a'+b')r^2 + b'(a'+c')q^2 + a'(b'+c')p^2,$$

$$\text{en } M^2 = \begin{cases} p^4 a'^2 (b'+c')^2 + 2q^2 r^2 b' c' (a'+b')(a'+c') + \\ q^4 b'^2 (a'+c')^2 + 2p^2 r^2 a' c' (a'+b')(b'+c') + \\ r^4 c'^2 (a'+b')^2 + 2p^2 q^2 a' b' (a'+c')(b'+c'); \end{cases}$$

door dezelfde substitutie wordt

$$L = \begin{cases} (b'+c')(p^2-r^2)(p^2-q^2) + \\ (a'+c')(q^2-r^2)(q^2-p^2) + \\ (a'+b')(r^2-p^2)(r^2-q^2), \end{cases}$$

of na ontwikkeling en herleiding

$$L = \begin{cases} p^4(b'+c') - 2q^2 r^2 a' + \\ q^4(a'+c') - 2p^2 r^2 b' + \\ r^4(a'+b') - 2p^2 q^2 c'; \end{cases}$$

verder wordt

$$N = (a'+b')(a'+c')(b'+c');$$

men vindt dus door vermenigvuldiging

$$LN = \begin{cases} p^4(a'+b')(a'+c')(b'+c')^2 - 2q^2 r^2 a'(a'+b')(a'+c')(b'+c') + \\ q^4(a'+b')(a'+c')^2(b'+c') - 2p^2 r^2 b'(a'+b')(a'+c')(b'+c') + \\ r^4(a'+b')^2(a'+c')(b'+c') - 2p^2 q^2 c'(a'+b')(a'+c')(b'+c'); \end{cases}$$

trekt men nu deze waarde van LN af, van de voor M^2 gevonde-

de-

dene, dan verkrijgt men

$$M^2 - LN = \begin{cases} p^4(b'+c')^2(a'^2-(a'+b')(a'+c'))+ \\ q^4(a'+c')^2(b'^2-(a'+b')(b'+c'))+ \\ r^4(a'+b')^2(c'^2-(b'+c')(a'+c'))+ \\ 2q^2r^2(a'+c')(a'+b')(b'c'+a'(b'+c'))+ \\ 2p^2r^2(a'+b')(b'+c')(a'c'+b'(a'+c'))+ \\ 2p^2q^2(b'+c')(a'+c')(a'b'+c'(a'+b')), \end{cases}$$

of, daar de laatste factoren van elk dezer termen dezelfde zijn, namelijk $\pm(a'b'+a'c'+b'c')$,

$$M^2-LN=(a'b'+a'c'+b'c')\left\{\begin{matrix} -p^4(b'+c')^2+2q^2r^2(a'+c')(a'+b') \\ -q^4(a'+c')^2+2p^2r^2(a'+b')(b'+c') \\ -r^4(a'+b')^2+2p^2q^2(b'+c')(a'+c') \end{matrix}\right\};$$

substitueren wij nu in den tweeden factor dezer uitdrukking $b'+c'=a^2$, $a'+c'=b^2$, $a'+b'=c^2$, dan wordt dezelve

$$-p^4a^4-q^4b^4-r^4c^4+2q^2r^2b^2c^2+2p^2r^2a^2c^2+2p^2q^2a^2b^2;$$

substitueren wij in den eersten factor $a'=\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)$, $b'=\frac{1}{2}(a^2+c^2-b^2)$, $c'=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)$, dan wordt dezelve

$$\tfrac{1}{4}(-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2);$$

noemen wij I den inhoud des driehoeks, welks zijden a, b en c zijn, dan is, zoo als men weet,

$$16I^2=-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2;$$

noemen wij voorts I' den inhoud eens driehoeks, welks zijden pa, qb en rc zijn, dan is even zoo

$$16I'^2=-p^4a^4-q^4b^4-r^4c^4+2q^2r^2b^2c^2+2p^2r^2a^2c^2+2p^2q^2a^2b^2;$$

de eerste der bovengenoemde factoren is dus gelijk aan $4I^2$ en de tweede gelijk aan $16I'^2$, weshalve wij hebben

$$M^2-LN=64I^2I'^2,$$

of

$$\sqrt{(M^2-LN)}=8II';$$

en bij gevolg

$$x=\pm\sqrt{\frac{M\pm 8II'}{L}}.$$

CLXXI. VOORSTEL.

Door M. H. GODEFROI.

Indien men de termen van zekere rekenkunstige reeks, met de getallen 4, 6, 12 en 27 vermenigvuldigt, komt er eene meetkunstige reeks; men vraagt deze beide reeksen te vinden?

Op-

OPGELOST *door* D. HOOLA VAN NOOTEN, A. C. BELINFANTE, B. DE JONGH, H. A. HARTOGH, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, L. J. ULMAN, E. BOAS, S. T. BOAS, Mr. G. W. DE BRUIJN KOPS, S. DIK, CORNZ., M. H. GODEFROI, M. L. GOEDE, G. GRAAFLAND, B. LUBBERS, M. G. SNOEK, J. S. SPEIJER, J. TEIXEIRA DE MATTOS, BZ. *en* C. VAN SCHAICK.

OPLOSSING *van* D. HOOLA VAN NOOTEN.

Stellen wij voor de termen der rekenkunstige reeks

$$x-3y,\ x-y,\ x+y \text{ en } x+3y,$$

dan moet, volgens het voorstel,

$$4(x-3y),\ 6(x-y),\ 12(x+y) \text{ en } 27(x+3y),$$

eene meetkunstige reeks zijn; derhalve is

$$48(x-3y)(x+y)=36(x-y)^2,$$

of $$4(x^2-2xy-3y^2)=3(x^2-2xy+y^2),$$

en $$x^2-2xy=15y^2;$$

beide leden dezer vergelijking met y^2 vermeerderende, en er den wortel uit trekkende, vindt men

$$x-y=\pm 4y,$$

en dus $$x=5y \text{ of } x=-3y;$$

de laatste waarde van x is onbruikbaar, omdat dan in elk der reeksen een term zoude verdwijnen; wij nemen dus alleen $x=5y$, waardoor wij hebben

voor de rekenkunstige reeks $2y$, $4y$, $6y$, $8y$,
en voor de meetkunstige „ $8y$, $24y$, $72y$, $216y$;

waarin men aan y eene willekeurige waarde kan geven.

Men merke wel op, dat de vierde term der meetkunstige reeks niet gebruikt is, tot het vormen eener tweede vergelijking; deze toch zou onvoldoende zijn, om de waarde van y te bepalen, want dezelve is

$$6\times 27(x-y)(x+3y)=144(x+y)^2,$$

en wordt door de gevondene waarde $x=5y$ identiek; de gegevene voorwaarde, dat de vierde term der rekenkunstige reeks met 27 vermenigvuldigd moet worden, is dus overtollig.

CLXXII. VOORSTEL.

Door M. H. GODEFROI.

Eene rekenkunstige reeks van vijf termen te vinden, zoo dat het vierkant van den eersten term gelijk is aan den tweeden, en dat de

de som der vierkanten van de derde en vierde termen gelijk is aan het vierkant van den vijfden?

Opgelost *door* M. H. Godefroi, E. Boas, S. T. Boas, G. Graafland, D. Hoola van Nooten, C. F. Julius, B. Lubbers, J. S. Speijer, L. J Ulman, A. C. Belinfante, Mr. G. W. de Bruijn Kops, S. Dik, Cornz., H. A. Hartogh, B. de Jongh, D. van Lankeren Matthes, C. van Schaick, M. G. Snoer *en* J. Teixeira de Mattos, Bz.

Oplossing *van* M. H. Godefroi.

Stellen wij voor de reeks

$$x,\ x+y,\ x+2y,\ x+3y \text{ en } x+4y,$$

zoo geeft het voorstel de vergelijkingen

$$x^2 = x+y \text{ en } (x+2y)^2+(x+3y)^2=(x+4y)^2;$$

de laatste dezer vergelijkingen herleidt men terstond tot

$$x^2+2xy=3y^2,$$

uit de eerste trekt men terstond $y=x^2-x$, en door substitutie van deze waarde voor y, gaat de laatste vergelijking over in

$$x^2+2x^3-2x^2=3x^4-6x^3+3x^2,$$

of

$$3x^4-8x^3=-4x^2;$$

daar x niet gelijk nul zijn kan, kunnen wij deze vergelijking door $3x^2$ deelen, hetgeen geeft

$$x^2-\tfrac{8}{3}x=-\tfrac{4}{3},$$

waaruit volgt $x=2$ of $x=\frac{2}{3}$;

voor $x=2$, is ook $y=2$ en dus de reeks

$$2,\ 4,\ 6,\ 8 \text{ en } 10;$$

de waarde $x=\frac{2}{3}$ is onbruikbaar, want dezelve zoude $y=-\frac{2}{9}$ geven en dus den vierden term der reeks doen verdwijnen.

CLXXIII. Voorstel.

Door M. de Leon.

Indien het verschil van een m en m—1 hoekig getal, van denzelfden wortel, een n voud van dien wortel is, dan moet de wortel oneven zijn en op eene bepaalde wijze van n afhangen. Men vraagt zulks te bewijzen?

Opgelost *door* M. de Leon, L. J. Ulman, A. C. Belinfante, S. T. Boas, S. Dik, Cornz., M. L. Goede, D. Hoola van Nooten, B. de Jongh, C. F. Julius, D. van Lankeren

Matthes, B. Lubbers, M. G. Snoer en J. Teixeira de Mattos, Bz.

Oplossing van M. de Leon.

Stel dat x de veelhoekige wortel der getallen zij, dan is

$\frac{1}{2}x\{(m-2)x-(m-4)\}$ het $m$hoekige getal,

en $\frac{1}{2}x\{(m-3)x-(m-5)\}$ het $m-1$ hoekige;

derzelver verschil is $\frac{1}{2}x(x-1)$, en dit verschil moet een n voud van den wortel x zijn, wij hebben dus de vergelijking

$$\tfrac{1}{2}x(x-1)=nx,$$

waaruit men terstond vindt

$$x=2n+1;$$

de wortel x is dus oneven en hangt van n op eene bepaalde wijze af.

Aanmerking van L. J. Ulman. Trekken wij het $m$hoekig getal van het $m+1$ hoekig getal van denzelfden wortel af, dan zal het verschil insgelijks $\frac{1}{2}x(x-1)$ zijn. Wij zien dus, dat de verschillen der achtervolgende veelhoekige getallen, van denzelfden wortel, aan elkander gelijk zijn; of met andere woorden:, *dat de achtervolgende veelhoekige getallen, die denzelfden wortel hebben, eene rekenkunstige reeks uitmaken, waarvan het verschil een driehoekig getal is, welks wortel een minder is dan de wortel der veelhoekige getallen.*

CLXXIV. Voorstel.

Door M. de Leon.

Een pronik en een zevenhoekig getal van denzelfden wortel te vinden, zoodat hun product een zestienhoekig getal is, waarvan de wortel gelijk is aan het verschil der gevraagde getallen?

Opgelost *door* M. de Leon, L. J. Ulman, D. Hoola van Nooten, A. C. Belinfante, E. Boas, S. T. Boas, S. Dijk, Cornz., M. H. Godefroi, M. L. Goede, G. Graafland, B. de Jongh, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, B. Lubbers, M. G. Snoer *en* J. Teixeira de Mattos, Bz.

Oplossing van M. de Leon.

Stel den wortel der gevraagde getallen door x voor, dan is het pronik getal x^2+x en het zevenhoekig getal $\frac{1}{2}(5x^2-3x)$; het verschil dezer getallen is dus $\frac{1}{2}(3x^2-5x)$; daar nu de zestien-

tienhoekige getallen begrepen zijn in den vorm $7y^2-6y$, waarin y derzelver wortel beteekent, geeft het voorstel de vergelijking

$$\tfrac{1}{2}(5x^2-3x)(x^2+x)=7(\tfrac{1}{2}(3x^2-5x))^2-6(\tfrac{1}{2}(3x^2-5x)),$$

of $$\frac{5x^4+2x^3-3x^2}{2}=\tfrac{7}{4}(9x^4-30x^3+15x^2)-(9x^2-15x),$$

hetgeen men dadelijk herleidt tot

$$53x^4-214x^3+145x^2+60x=0;$$

daar x uit den aard der zaak niet gelijk nul kan zijn, hebben wij

$$53x^3-214x^2+145x+60=0;$$

de eenige meetbare wortel dezer vergelijking is $x=3$, waardoor men voor de begeerde getallen 12 en 18 vindt.

CLXXV. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Van eenen regthoekigen driehoek is het product der drie zijden 780 en de omtrek 30; men vraagt hieruit elke zijde te vinden?

OPGELOST *door* G. BRANDSTEDER, E. BOAS, S. T. BOAS, Mr. G. W. DE BRUIJN KOPS, M. H. GODEFROI, G. GRAAFLAND, H. A. HARTOGH, D. HOOLA VAN NOOTEN, B. DE JONGH, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, C. VAN SCHAICK, M. G. SMOER, J. S. SPEIJER, L. J. ULMAN, A. C. BELINFANTE, M. L. GOEDE, J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz., S. DIK, CORNZ. *en* B. LUBBERS.

OPLOSSING VAN G. BRANDSTEDER.

Stellen wij de regthoekszijden door x en y voor, dan is de hypothenusa $30-(x+y)$, en wij hebben dus

$$x^2+y^2=(30-(x+y))^2,$$

en $$xy(30-(x+y)=780;$$

uit de eerste dezer vergelijkingen vindt men, na ontwikkeling en herleiding,

$$xy=30(x+y)-450,$$

deze waarde voor xy in de tweede vergelijking overbrengende, komt er, na deeling door 30,

$$(x+y-15)(30-(x+y))=26,$$

hetwelk ontwikkeld zijnde de vierkantsvergelijking

$$(x+y)^2-45(x+y)+476=0$$

verschaft, waaruit men vindt

$$x+y=17 \text{ of } x+y=28;$$

fubftitueert men deze waarden in de vergelijking $xy(30-(x+y))=780$, zoo vindt men

$$xy=60 \text{ of } xy=390;$$

en de gevondene waarden voor $x+y$ met de overeenkomftige waarden van xy verbinderde, verkrijgt men

$$x-y=7 \text{ of } x-y=\sqrt{-776};$$

de laatfte waarde van $x-y$ onbeftaanbaar zijnde, kunnen alleen $x+y=17$ en $x-y=7$ in aanmerking komen, en daaruit volgt terftond $x=12$ en $y=5$, waardoor wij voor de hypothenufa vinden $\sqrt{(x^2+y^2)}=13$; de zijden des driehoeks zijn dus 5, 12 en 13.

CLXXVI. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Van eene vlakke gelijkzijdige figuur het aantal lengte eenheden in elke zijde begrepen, als ook het aantal graden van elken hoek gelijk zijnde aan het aantal diagonalen, dat men in eenen achttienhoek trekken kan, zoo vraagt men den inhoud dezer figuur te vinden?

OPGELOST *door* L. J. ULMAN, A. C. BELINFANTE, S. T. BOAS, G. BRANDSTEDER, M. L. GOEDE, C. F. JULIUS, J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz., D. HOOLA VAN NOOTEN *en* D. VAN LANKEREN MATTHES.

OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

Het getal diagonalen, dat men in eenen $n$hoek trekken kan, in het algemeen gelijk zijnde aan $\frac{1}{2}n(n-3)$, zoo kunnen in eenen achttienhoek 135 diagonalen worden getrokken. De bedoelde gelijkzijdige figuur is dus een regelmatige veelhoek, wiens polygoonshoeken 135° zijn. De middelpuntshoeken zullen dus 180° — 135° = 45° zijn en de figuur een regelmatige achthoek wezen. Wanneer wij nu den ftraal des om eenen achthoek befchrevenen cirkels gelijk aan de eenheid nemen, is de zijde des vierkants in den cirkel befchreven gelijk aan $\sqrt{2}$, of de omtrek des vierkants gelijk aan $4\sqrt{2}$; daar nu in het algemeen de inhoud van den $2n$hoek gelijk is aan het product van den omtrek des $n$hoeks met den halven ftraal van den omgefchreven cirkel, zoo is de inhoud des achthoeks gelijk aan $\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$, terwijl de zijde des achthoeks door de bekende formule voor de verdub-

dubbeling van het aantal zijden der ingeschrevene regelmatige veelhoeken, gelijk gevonden wordt aan $\sqrt{(2-\sqrt{2})}$. Alzoo nu de zijde des begeerden achthoeks 135 is, en alle gelijkvormige figuren tot elkander in reden staan als de vierkanten hunner gelijkstandige zijden, zoo hebben wij, den gezochten inhoud I noemende,

$$I : 2\sqrt{2} = 135^2 : 2-\sqrt{2},$$

waaruit men terstond vindt

$$I = \frac{135^2 \times 2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = 87998, \text{ zeer nabij.}$$

CLXXVII. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Eenen driehoek te berekenen, als gegeven zijn de loodlijnen uit deszelfs zwaartepunt op elk der zijden vallende?

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, L. J. ULMAN, C. F. JULIUS, D. HOOLA VAN NOOTEN, S. T. BOAS, A. C. BELINFANTE *en* J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz.

OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Laat ABC (*Fig.* 67) de driehoek zijn, uit welks zwaartepunt Z de loodlijnen ZD, ZE en ZF op de zijden zijn getrokken; stellen wij deze gegevens $ZD = \frac{1}{3}a$, $ZE = \frac{1}{3}b$, $ZF = \frac{1}{3}c$, trekken wij uit de hoekpunten des driehoeks de loodlijnen AG, BH en CI op de overstaande zijden, zoo mede door A en Z eene lijn AZP, die de zijde BC in P zal midden door deelen, dan is, gelijk men weet, $AP = 3\,ZP$; maar de driehoeken ZPD en APG gelijkvormig zijnde, is $AP : ZP = AG : ZD$, en bij gevolg ook

$$AG = 3\,ZD = a,$$

even zoo is $$BH = 3\,ZE = b$$

en $$CI = 3\,ZF = c;$$

het voorstel is dus herleid tot de vraag, om eenen driehoek te berekenen, indien de loodlijnen uit de hoekpunten op de overstaande zijden vallende gegeven zijn, van welk vraagstuk men de oplossing vindt in het LXXXI Voorstel van het IV Deel dezer Verzameling.

CLXXVIII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Twee getallen te vinden, zoodanig dat de som der derde magten ge-

gelijk is aan het verschil der vierkanten, en dat de som der vierkanten een volkomen vierkant zij?

OPGELOST *door* J. S. SPEIJER, J. BASSAN, A. C. BELINFANTE, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, B. LUBBERS, J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz. *en* L. J. ULMAN.

OPLOSSING *van* J. S. SPEIJER.

Men stelle voor de getallen $3x$ en $4x$, dan is aan de laatste voorwaarde voldaan en men heeft nog slechts dat

$$(3x)^3+(4x)^3=(4x)^2-(3x)^2$$

zijn moet; deze vergelijking wordt terstond herleid tot

$$91x^3=7x^2,$$

waaruit men vindt

$$x=\tfrac{1}{13};$$

de getallen zijn dus

$3x=$ [illegible] en $4x=\tfrac{4}{13}$.

Door, in plaats van de coëfficienten 3 en 4, andere getallen te nemen, zoodanig dat de som hunner vierkanten weder een vierkant uitmaakt, zal men zoo vele andere antwoorden kunnen vinden als men begeert.

CLXXIX. VOORSTEL.

Door A. C. BELINFANTE.

Eenen driehoek te berekenen, als gegeven zijn de omtrek, de hoogte en de tophoek?

OPGELOST *door* L. J. ULMAN, J. S. SPEIJER, S. T. BOAS, B. DE JONGH, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, A. C. BELINFANTE, M. L. GOEDE *en* J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz.

OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

Laat de gegeven omtrek door p, de hoogte door h en de tophoek door 2α worden voorgesteld; dan stelle men de bazis gelijk x en de onbekende hoeken $90^\circ-\alpha+\phi$ en $90^\circ-\alpha-\phi$; de opstaande zijden worden dus uitgedrukt door

$$\frac{Sin.(90^\circ-\alpha+\phi)}{Sin.2\alpha}x=\frac{Cos.(\alpha-\phi)}{Sin.2\alpha}x$$

en

$$\frac{Sin.(90^\circ-\alpha-\phi)}{Sin.2\alpha}x=\frac{Cos.(\alpha+\phi)}{Sin.2\alpha}x;$$

de omtrek is diensvolgens

$x+$

$$x + \frac{Cos.(\alpha - \phi)}{Sin. 2\alpha} x + \frac{Cos.(\alpha + \phi)}{Sin. 2\alpha} x = p,$$

welke vergelijking men achtervolgens herleidt tot

$$\frac{Sin. 2\alpha + Cos. (\alpha - \phi) + Cos. (\alpha + \phi)}{Sin. 2\alpha} x = p,$$

$$\frac{2 Sin. \alpha Cos. \alpha + 2 Cos. \phi Cos. \alpha}{2 Sin. \alpha Cos. \alpha} x = p,$$

en

$$\frac{Sin. \alpha + Cos. \phi}{Sin. \alpha} x = p \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (A);$$

De inhoud des driehoeks is vooreerst gelijk aan het halve product van de bazis en hoogte; ten andere is die inhoud gelijk aan het halve product der opstaande zijden, vermenigvuldigd met de sinus van den tophoek, dit geeft ons nog de vergelijking

$$\frac{1}{2} . \frac{Cos. (\alpha - \phi)}{Sin. 2\alpha} x \times \frac{Cos (\alpha + \phi)}{Sin. 2\alpha} x \times Sin. 2\alpha = \frac{1}{2} h x,$$

dewelke men achtervolgens herleidt tot

$$\frac{Cos. (\alpha - \phi) Cos. (\alpha + \phi)}{Sin. 2\alpha} x = h,$$

$$\frac{Cos^2. \phi - Sin^2. \alpha}{2 Sin. \alpha Cos \alpha} x = h,$$

en

$$\frac{(Cos. \phi - Sin. \alpha)(Cos. \phi + Sin. \alpha)}{Sin. \alpha Cos. \alpha} x = 2h \quad . \quad (B);$$

deelen wij nu (B) door (A), dan komt er

$$\frac{Cos. \phi - Sin. \alpha}{Cos. \alpha} = \frac{2h}{p},$$

waaruit men vindt

$$Cos. \phi = \frac{2h}{p} Cos. \alpha + Sin. \alpha;$$

deze waarde van $Cos. \phi$ in (A) overbrengende, vinden wij daaruit

$$x = \frac{p^2 Sin. \alpha}{2 (p Sin. \alpha + h Cos. \alpha)} = \frac{1}{2} . \frac{p^2}{p + h Cot. \alpha},$$

waardoor nu de geheele driehoek bekend is.

CLXXX. VOORSTEL.

Door J. TEIXEIRA DE MATTOS Bz.

Eenen driehoek te berekenen, a's gegeven zijn de middellijn des ingeschreven cirkels, benevens twee der zijden?

OPGELOST *door* S. T. BOAS, B. DE JONGH, C. F. JULIUS, D. VAN

van Lankeren Matthes, L. J Ulman, A. C, Belinfante, M, L. Goede en J, Teixeira de Mattos, Bz.

Oplossing van S. T. Boas.

Stellen wij de middellijn des ingeschreven cirkels $2r$, de twee gegevene zijden a en b en de derde zijde x; stellen wij verder de som der zijden door $2s$ voor, dan is de inhoud des driehoeks gelijk aan rs, maar deze inhoud kan, naar eene overbekende formule, ook door $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-x)}$ worden uitgedrukt, wij hebben dan de vergelijking

$$rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-x)};$$

deze vergelijking in het vierkant brengende en daarna door s deelende, komt er

$$r^2 s = (s-a)(s-b)(s-x),$$

maar $2s = a+b+x$ zijnde, is $x = 2s-(a+b)$ en bij gevolg $s-x = a+b-s$, onze vergelijking verandert hierdoor in

$$r^2 s = (s-a)(s-b)(a+b-s),$$

hetwelk na ontwikkeling en herleiding overgaat in

$$s^3 - 2(a+b)s^2 + (r^2+(a+b)^2+ab)s - ab(a+b) = 0,$$

door welke derdemagtsvergelijking s, en dus ook $x = 2s - (a+b)$, bekend wordt.

CLXXXI. Voorstel.

Door F. van Heukelom, Jr.

Men vraagt naar een getal, hetwelk door drie getallen, waarvan het tweede 17 meer dan het eerste, en het derde 11 meer dan het tweede is, zonder overschot kan gedeeld worden; onder die bepaling echter, dat het eerste quotient 102 meer zij dan het tweede en 112 meer dan het derde?

Opgelost door F. van Heukelom, Jr., A. C. Belinfante, S T. Boas, C. J. Bolten, Mr. G. W. de Bruijn Kops, C. Brunings, S. Dik, Cornz., M. H. Godefroi, M. L. Goede, G. Graafland, H. A. Hartogh, D. Hoola van Nooten, C. F. Julius, B. Lubbers, D. van Lankeren Matthes, A. de Mol van Otterloo, C. van Schaick, M. G. Snoer, J. S. Speijer, L. J. Ulman, I. Warnsinck en D. S. Waterman.

Oplossing van F. van Heukelom, Jr.

Stel het getal door x voor en laat y de eerste deeler zijn, dan is

is $y+17$ de tweede en $y+28$ de derde deeler; en men heeft volgens het voorstel

$$\frac{x}{y}=\frac{x}{y+17}+102 \quad \text{en} \quad \frac{x}{y}=\frac{x}{y+28}+112,$$

de breuken verdrijvende, veranderen deze vergelijkingen in

$$xy+17x=xy+102(y^2+17y) \text{ en } xy+28x=xy+112(y^2+28y),$$

de gelijke termen xy weglatende en de vergelijkingen daarna respectievelijk door 17 en 28 deelende, komt er

$$x=6(y^2+17y) \quad \text{en} \quad x=4(y^2+28y);$$

men heeft dus

$$6(y^2+17y)=4(y^2+28y),$$

dat is $$6y^2+102y=4y^2+112y,$$

of $$2y^2=10y,$$

waaruit volgt $$y=5$$

en $$x=6(y^2+17y)=660;$$

derhalve is het begeerde getal 660, terwijl de in het voorstel bedoelde deelers 5, 22 en 33 zijn.

CLXXXII. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Men vraagt twee getallen, die de eigenschap hebben, dat de derde magt van het eerste bij het tweede opgeteld eene som opleveren gelijk aan de som van het eerste en de derde magt van het tweede?

OPGELOST *door* B LUBBERS, A. C. BELINFANTE, S. T. BOAS, C. BRUNINGS, S. DIK, CORNZ., M. H. GODEFROI, H. A. HARTOGH, D. HOOLA VAN NOOTEN, C. F. JULIUS, M. G. SNOEK, J. S. SPEIJER, L. J. ULMAN, I. WARNSINCK, C. J. BOLTEN, Mr. G. W. DE BRUIJN KOPS, M. L. GORDE *en* D. VAN LANKEREN MATTHES.

OPLOSSING *van* B. LUBBERS.

Men neme voor de getallen $x-y$ en $x+y$, dan moet

$$(x-y)^3+(x+y)=(x+y)^3+(x-y)$$

zijn, uit deze vergelijking vindt men gemakkelijk

$$y^2=1-3x^2;$$

hieruit volgt dat $1-3x^2$ een vierkant moet wezen; stellen wij dat $1-nx$ de wortel daarvan zij, dan heeft men

$$1-3x^2=1-2nx+n^2x^2,$$

 waar-

waaruit men vindt $x = \frac{2n}{n^2 + 3}$;

nu kan n naar goedvinden worden genomen; nemende bijv. $n = 2$, zoo vindt men $x = \frac{4}{7}$ en $y = \frac{1}{7}$; bij gevolg, zijn dan de getallen $x - y = \frac{3}{7}$ en $x + y = \frac{5}{7}$.

CLXXXIII. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Er zijn drie zevenhoekige getallen, die de volgende kenmerken hebben: 1°. hun product is een driehoekig getal, waarvan de wortel gelijk is aan het grootste der drie zevenhoekige getallen; 2°. de som van het grootste zevenhoekige getal en deszelfs wortel is een vierkant, welks wortel gelijk is aan de som van het middelste zevenhoekige getal en deszelfs wortel; en 3°. het grootste zevenhoekige getal min deszelfs wortel is gelijk aan het middelste zevenhoekige getal min zijn wortel. Men vraagt naar deze getallen?

OPGELOST *door* B. LUBBERS, C. J. BOLTEN, MR. G. W. DE BRUIJN KOPS, S. DIK, CORNZ., M. L. GOEDE, C. F. JULIUS, A. DE MOL VAN OTTERLOO, M. G. SNOER, J. S. SPEIJER *en* L. J. ULMAN.

OPLOSSING *van* B. LUBBERS.

Laat x de wortel van het middelste zevenhoekige getal en $x + y$ die van het grootste zijn, dan zijn de zevenhoekige getallen zelve

$$\frac{5x^2 - 3x}{2} \text{ en } \frac{5x^2 + 10xy + 5y^2 - 3x - 3y}{2};$$

van elk derzelve hunne wortels aftrekkende, en volgens de laatste voorwaarde des voorstels de resten aan elkander gelijk stellende, verkrijgen wij de vergelijking

$$\frac{5x^2 - 5x}{2} = \frac{5x^2 + 10xy + 5y^2 - 5x - 5y}{2},$$

of, met 2 vermenigvuldigende en de gelijke termen weglatende,

$$0 = 10xy + 5y^2 - 5y;$$

daar nu, uit den aard der vraag, niet $y = 0$ zijn kan, kunnen wij deze vergelijking door $5y$ deelen, hetgeen, na verplaatsing der termen, geeft

$$y = 1 - 2x$$

en dus $$x + y = 1 - x;$$

der-

derhalve is $1-x$ de wortel van het grootste zevenhoekige getal, en bij gevolg is dat getal zelve $\frac{5x^2-7x+2}{2}$, volgens de tweede voorwaarde moet dus

$$\frac{5x^2-7x+2}{2}+x+1=\left(\frac{5x^2-3x}{2}+x\right)^2$$

zijn; deze vergelijking herleidt men gemakkelijk tot

$$25x^4-10x^3-9x^2+18x-8=0,$$

waaruit volgt $x=-1$, en $x+y=1-x=2$; de wortels van het middelste en grootste zevenhoekige getal zijn dus -1 en 2, waaruit volgt, dat die getallen zelve 4 en 7 zijn, en nu kan het kleinste der drie getallen gemakkelijk door de eerste voorwaarde gevonden worden; het product namelijk, der drie zevenhoekige getallen, moet een driehoekig getal, waarvan 7 de wortel is, en alzoo 28 zijn, daar nu het product der beide reeds gevondene mede 28 is, moet het derde 1 zijn. Wij hebben derhalve voor de gevraagde getallen

1, 4 en 7;

terwijl hunne zevenhoekige wortels zijn

1, -1 en 2.

CLXXXIV. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Men vraagt naar een getal van vier cijfers, die onderling de volgende kenteekenen hebben: 1°. de dubbelde som der duizend- en tientallen is gelijk aan de honderdtallen; 2°. de vierkantswortel uit de som der duizend- en tientallen is gelijk aan den derdemagtswortel uit de honderdtallen; 3°. de som der duizend- en honderdtallen is een vierkant, dat de som der eenheden en tientallen tot wortel heeft; en 4°. het product der duizend- honderd- en tientallen is gelijk aan de som van de eenheden en het drievoud der honderdtallen?

OPGELOST door B. LUBBERS, M. G. SNOER, L. J. ULMAN, A. C. BELINFANTE, S. T. BOAS, C. J. BOLTEN, Mr. G. W. DE BRUIJN KOPS, C. BRUNINGS, S. DIK, CORNZ., M. H. GODEFROI, M. L. GOEDE, H. A. HARTOGH, D. HOOLA VAN NOOTEN, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, A. DE MOL VAN OTTERLOO, C. VAN SCHAICK, J. S. SPEIJER, I. WARNSINCK en D. S. WATERMAN.

I.

I. Oplossing van B. Lubbers.

Stel het cijfer der duizendtallen $= v$,
dat der honderdtallen $= x$,
dat der tientallen $= y$
en dat der eenheden $= z$,
dan geven de voorwaarden des voorstels de volgende vergelijkingen:

$$2(v+y) = x \quad \ldots \quad (1),$$

$$\sqrt{(v+y)} = \sqrt[3]{x} \quad \ldots \quad (2),$$

$$\sqrt{(v+x)} = y+z \quad \ldots \quad (3)$$

en

$$vxy = 3x+z \quad \ldots \quad (4);$$

uit (2) trekt men $2(v+y) = 2\sqrt[3]{x^2}$, en dit met (1) in verband brengende, komt er

$$x = 2\sqrt[3]{x^2},$$

waaruit men vindt

$$x = 8 \quad \ldots \quad (5);$$

hierdoor heeft men volgens (1) $v+y=4$, en bij gevolg

$$v = 4-y \quad \ldots \quad (6);$$

door substitutie der waarden in (5) en (6) gevonden, gaan de vergelijkingen (3) en (4) over in

$$\sqrt{(12-y)} = y+z \quad \ldots \quad (7)$$

en

$$(4-y)8y = 24+z \quad \ldots \quad (8);$$

trekt men deze laatste vergelijkingen van elkander af, dan komt er

$$8y(4-y) - \sqrt{(12-y)} = 24 - y,$$

deze vergelijking ontwikkelende, verkrijgt men eene vierdemagtsvergelijking, waarvan de eenige bruikbare wortel is

$$y = 3,$$

dus is door (6) $v = 1$
en door (7) of (8) $z = 0$;
het begeerde getal is derhalve 183.

II. Oplossing van M. G. Snopr.

Volgens (1) moet x even, volgens (2) moet x eene derde magt zijn, dus kan men voor x geen andere waarde hebben dan $x = 8$, derhalve is volgens (1) $v+y=4$, zoodat v niet grooter dan 4 kan zijn. Volgens (3) moet $v+x$ een vierkant zijn; daar $x=8$ is, kan dit vierkant niet kleiner dan 9 zijn, en omdat tevens v niet grooter dan 4 mag wezen, kan dit vierkant ook

niet

niet grooter dan 9 zijn, alzoo moet $v+x=9$ en dus $v=1$ zijn; hieruit volgt, daar $v+y=4$ gevonden is, $y=3$. Daar nu v, x en y bekend zijn, heeft men uit (3) $z=0$, en uit de alzoo gevondene waarden, die tevens aan de vergelijking (4) voldoen, blijkt dat 1830 het gevraagde getal is.

CLXXXV. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Er zijn n personen, die elk eenige guldens bezitten: men vraagt hoe veel elk op het minst kan hebben, indien er bepaald is, dat allen een gelijk getal guldens zullen bekomen hebben, wanneer, van den eersten af tot den laatsten toe, elk eenmaal aan ieder der overigen zoo veel afgeeft, als ieder voor die afgifte bezit?

OPGELOST *door* C. F. JULIUS, L. J. ULMAN, B. LUBBERS, A. C. BELINFANTE, C. J. BOLTEN, D. HOOLA VAN NOOTEN, I. WARNSINCK, M. G. SNOER, S. DIK, CORNZ., C. BRUNINGS *en* A. DE MOL VAN OTTERLOO.

I. OPLOSSING *van* C. F. JULIUS.

Noemen wij de personen zelve, van den eersten af tot den n^{den} toe,

$$A,\ B,\ C,\ \textit{enz.}\ \ldots\ P,\ Q,\ R,$$

laat

$$a,\ b,\ c,\ \textit{enz.}\ \ldots\ p,\ q,\ r,$$

zijn, hetgeen zij aanvankelijk ieder in het bijzonder bezitten, en laat s hunne gezamenlijke bezitting voorstellen, dan is

$$a+b+c+\textit{enz.}\ \ldots\ +p+q+r=s;$$

indien nu A begint, met de bezitting der overigen te verdubbelen, geeft hij $b+c+\textit{enz.}\ \ldots +p+q+r=s-a$ af, na de afgifte van A wordt dus de bezitting van elk

$$A,\ B,\ C,\ \ldots\ P,\ Q,\ R,$$
$$2a-s,\ 2b,\ 2c,\ \ldots\ 2p,\ 2q,\ 2r,$$

op gelijke wijze zullen wij voor elks bezitting vinden, na de tweede afgifte door B gedaan,

$$A,\ B,\ C,\ \ldots\ P,\ Q,\ R,$$
$$2^2a-2s,\ 2^2b-s,\ 2^2c,\ \ldots\ 2^2p,\ 2^2q,\ 2^2r,$$

na de derde afgifte door C gedaan,

$$A,\ B,\ C,\ \ldots\ P,\ Q,\ R,$$
$$2^3a-2^2s,\ 2^3b-2s,\ 2^3c-s,\ \ldots\ 2^3p,\ 2^3q,\ 2^3r,$$

na de $(n-2)^{de}$ afgifte door P gedaan,

A,

A, B, C, . P, Q, R,

$2^{n-2}a-2^{n-3}s$, $2^{n-2}b-2^{n-4}s$, $2^{n-2}c-2^{n-5}s$, . $2^{n-2}p-s$, $2^{n-2}q$, $2^{n-2}r$,

na de $(n-1)^{de}$ afgifte door Q gedaan,

A, B, C, P, Q, R,

$2^{n-1}a-2^{n-2}s$, $2^{n-1}b-2^{n-3}s$, $2^{n-1}c-2^{n-4}s$, $2^{n-1}p-2s$, $2^{n-1}q-s$, $2^{n-1}r$,

na de n^{de} afgifte door R gedaan,

A, B, C, . P, Q, R,

$2^{n}a-2^{n-1}s$, $2^{n}b-2^{n-2}s$, $2^{n}c-2^{n-3}s$. $2^{n}p-2^{2}s$, $2^{n}q-2s$, $2^{n}r-s$;

omdat nu na de laatste afgifte allen even veel, en dus een n^{de} gedeelte van hunne gezamenlijke bezitting moeten hebben verkregen, hebben wij

$$2^{n}a-2^{n-1}s=\frac{s}{n}, \text{ waaruit men vindt } a=s\left\{\frac{1+2^{n-1}n}{2^{n}.n}\right\},$$

$$2^{n}b-2^{n-2}s=\frac{s}{n}, \quad " \quad " \quad " \quad b=s\left\{\frac{1+2^{n-2}.n}{2^{n}.n}\right\},$$

$$2^{n}c-2^{n-3}s=\frac{s}{n}, \quad " \quad " \quad " \quad c=s\left\{\frac{1+2^{n-3}.n}{2^{n}.n}\right\},$$

. . . .

$$2^{n}p-2^{2}s=\frac{s}{n}, \quad " \quad " \quad " \quad p=s\left\{\frac{1+2^{2}.n}{2^{n}.n}\right\},$$

$$2^{n}q-2s=\frac{s}{n}, \quad " \quad " \quad " \quad q=s\left\{\frac{1+2^{1}.n}{2^{n}.n}\right\},$$

$$2^{n}r-s=\frac{s}{n}, \quad " \quad " \quad " \quad r=s\left\{\frac{1+2^{0}.n}{2^{n}.n}\right\},$$

zullen nu a, b, c, . . . p, q, r geheele getallen zijn, dan moet s door $2^{n}.n$ deelbaar wezen, en om deze getallen zoo klein mogelijk te verkrijgen moet $s=2^{n}n$ zijn; wij hebben dus voor de getallen guldens, die de n personen op zijn minst kunnen hebben, door in bovenstaande waarden $s=2^{n}.n$ te substitueren,

A, B, C, . . P Q

$a=1+2^{n-1}n$, $b=1+2^{n-2}n$, $c=1+2^{n-3}n$, . . $p=1+2^{2}n$, $q=1+2^{1}n$,

R,

$r=1+2^{0}n$

nemen wij ten voorbeelde $n=5$, zoo vinden wij voor de getallen guldens, die de vijf personen aanvankelijk moeten bezitten,

81, 41, 21, 11 en 6.

. II. OPLOSSING van L. J. UDMAN.

Stel dat na de n^{de} of laatste afgifte elk persoon x guldens heeft, dan moet ieder hunner op één na vóór de n^{de} afgifte gehad hebben $\frac{1}{2}x$, terwijl de n^{de} persoon zoo veel meer had als de anderen te zamen bij die afgifte verkregen; de n^{de} persoon bezat dus $x+(n-1)\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}nx+\frac{1}{2}x$.

Voor de $(n-1)^{de}$ afgifte was de beziting van $n-2$ personen $\frac{1}{4}x$ elk; doch de n^{de} persoon had $\frac{1}{4}nx+\frac{1}{4}x$; terwijl de $(n-1)^{de}$ persoon, die toen aan al de anderen afgeven moest $\frac{1}{2}nx+\frac{1}{4}x$ moest bezitten.

Aldus terug gaande vinden wij, dat, vóór de $(n-(n-1))^{de}$ afgifte of geheel in den beginne, elks beziting moet zijn als volgt:

$$\frac{1}{2}nx+\frac{1}{2^n}x,\ \frac{1}{2^2}nx+\frac{1}{2^n}x,\ enz. \ \ldots \ \text{tot}\ \frac{1}{2^n}nx+\frac{1}{2^n}x.$$

welke waarden wij ook aldus kunnen schrijven

$$\frac{x}{2^n}(2^{n-1}n+1),\ \frac{x}{2^n}(2^{n-2}n+1),\ enz. \ \ldots \ \text{tot}\ \frac{x}{2^n}(n+1);$$

daar nu slechts naar de kleinste geheele getallen gevraagd wordt, zoo stellen wij den algemeenen factor $\frac{x}{2^n}=1$ en vinden dan, voor de aanvankelijke bezittingen der n personen,

$$2^{n-1}n+1,\ 2^{n-2}n+1,\ enz. \ \ldots \ \text{tot}\ (n+1);$$

de som dezer reeks is blijkbaar $2^n.n-n+n\times1=2^n.n$, zoodat, na de laatste afgifte, ieder 2^n zal moeten hebben, hetwelk met het stellen van $\frac{x}{2^n}=1$ overeenstemt.

CLXXXVI. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Er zijn in het alphabet vier letters, die ik 1, 2, 3 en 4 noeme; van deze letters kan men twee woorden, beide zeer bekende eigen namen, maken; het eene in de opgegevene orde 1, 2, 3, 4; het andere in de orde 3, 4, 2, 1; de getallen, die de plaatsen dezer letters in het alphabet aanwijzen, zijn alle vijfhoekig en derzelver wortels hebben de volgende eigenschappen: de 1ste, 3de en 4de gelijk mede de 2de, 1ste en 4de vormen twee rekenkunstige reeksen; tweemaal de som der tweede reeks is gelijk aan de som der eer-

eerste reeks, en de som van alle vier de wortels is gelijk aan het getal, dat tot de 3de letter behoort. Men vraagt naar de beide woorden?

Opgelost *door* B. Lubbers, S. T. Boas, C. J. Bolten, Mr. G. W. de Bruijn Kops, C. Brunings, S. Dik, Cornz., M. L. Goede, D Hoola van Nooten, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, A. de Mol van Otterloo, M. G. Snoer, J. S. Speijer, L. J. Ulman, I. Warnsinck *en* D. S. Waterman.

Oplossing *van* B. Lubbers.

Stellen wij voor de eerste der genoemde reeksen x, $x+y$ en $x+2y$, dan zijn x en $x+2y$ de laatste termen der tweede reeks, weshalve derzelver eerste term $x-2y$ moet zijn; wij hebben alzoo, voor de vier wortels der vijfhoekige getallen in volgorde,

$$x,\ x-2y,\ x+y \text{ en } x+2y;$$

het derde vijfhoekige getal, dat nu door $\frac{3(x+y)^2-(x+y)}{2}$ wordt voorgesteld, gelijk moetende zijn aan de som der vier genoemde wortels, welke som $4x+y$ is, zoo hebben wij

$$\frac{3(x+y)^2-(x+y)}{2}=4x+y,$$

$$3(x+y)^2-(x+y)=8x+2y,$$

$$3(x+y)^2=9x+3y,$$

$$(x+y)^2=3x+y$$

en dus $$x+y=\frac{3x+y}{x+y};$$

deze laatste breuk moet een geheel getal zijn, omdat $x+y$ een geheel getal is; de teller is in den noemer klaarblijkelijk meer dan *één* en minder dan *drie* malen begrepen, de waarde dier breuk is alzoo

$$x+y=2,$$

hieruit volgt $$3x+y=(x+y)^2=4,$$

en nu vindt men terstond $x=1$ en $y=1$, weshalve de wortels zijn $1,\ -1,\ 2$ en 3,

de getallen zelve zijn dus

$$1,\ 2,\ 5 \text{ en } 12,$$

waar-

waardoor de letters A, B, E en L
worden aangewezen; de gevraagde woorden zijn alzoo ABEL en ELBA.

Aanmerking. De voorwaarde, dat de som der eerste reeks het tweevoud van die der tweede reeks moet zijn, is bij deze oplossing ongebruikt gebleven; dezelve zou ons de vergelijking

$$3x+3y=6x$$

verschaft hebben, waaruit dadelijk $x=y$ gevonden wordt; die met de vergelijking

$$(x+y)^2=3x+y$$

in verband gebragt, zou ons mede terstond $x=y=1$ hebben doen vinden.

CLXXXVII. VOORSTEL.

Door J. Schotborgh, Hz.

Men vraagt naar eene rekenkunstige reeks, waarvan het verschil der uiterste termen 55, de som van de vierkanten der uiterste termen 4177 en de som der termen 219 is?

Opgelost *door* J. Schotborgh, Hz., A. C. Belinfante, S. T. Boas, C. J. Bolten, Mr. G. W. de Bruijn Kops, C. Brünings, S. Dik, Cornz., M. H. Godefroi, M. L. Gorde, G. Graafland, H. A. Hartogh, D. Hoola van Nooten, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, B. Lubbers, A. de Mol van Otterloo, C. van Schaick, M. G. Snoer, J. S. Speijer, L. J. Ulman *en* I. Warnsinck.

Oplossing *van* J. Schotborgh, Hz.

Stellende de gevraagde reeks voor door

$$x,\ x+y,\ x+2y,\ enz.\ \ldots\ tot\ x+(n-1)y,$$

als wanneer n het aantal van derzelver termen beteekent, dan heeft men volgens de opgave

$$(n-1)y=55,$$

$$2x^2+2(n-1)xy+(n-1)^2y^2=4177,$$

en $$\tfrac{1}{2}n(2x+(n-1)y)=219;$$

in de twee laatste vergelijkingen $(n-1)y=55$ overbrengende, bekomt men

$$2x^2+110x+3025=4177,$$

en $$\tfrac{1}{2}n(2x+55)=219;$$

de vóórlaatste vergelijking wordt, na herleiding

$$x^2+55x=576,$$

waaruit men vindt $x=9$;

deze waarde van x in $\frac{1}{2}n(2x+55)=219$ substituerende, vindt men terstond

$$n=6;$$

en deze waarde van n in $(n-1)y=55$ stellende, verkrijgt men

$$y=11;$$

mitshalve de gevraagde reeks is

9, 20, 31, 42, 53 en 64.

CLXXXVIII. VOORSTEL.

Door J. SCHOTBORGH, Hz.

De naam van zekeren Fransshen Natuurkundige bestaat uit vier letters; de getallen die de plaatsen dezer letters in het alphabet aanwijzen, vormen eene rekenkunstige reeks van de tweede orde, waarvan de gelijke verschillen negatief en gelijk zijn aan de helft van den eersten term; de laatste term is een pronik, die het dubbeld van den eersten tot wortel heeft; en de vierkantswortel uit den tweeden term is ééne eenheid meer dan de eerste term. Men vraagt naar den naam van dezen geleerden?

OPGELOST *door* J. SCHOTBORGH, Hz., C. F. JULIUS, A. C. BELINFANTE, S. T. BOAS, C. J. BOLTEN, Mr. G. W. DE BRUIJN KOPS, C. BRUNINGS, S. DIK, CORNZ., M. H. GODEFROI, M. L. GOEDE, H. A. HARTOGH, D. HOOGA VAN NOOTEN, B. DE JONGH, D. VAN LANKEREN MATTHES, B. LUBBERS, A. DE MOL VAN OITERLOO, M. G. SNOER, J. S. SPEIJER, L. J. ULMAN, I. WARNSINCK *en* D. S. WATERMAN.

I. OPLOSSING *van* J. SCHOTBORGH, Hz.

Laten de termen van de bedoelde reeks der tweede orde zijn

$$x,\ y^2,\ z \text{ en } v,$$

dan zijn de eerste verschillen

$$x-y^2,\ y^2-z \text{ en } z-v,$$

en de tweede verschillen

$$x-2y^2+z \text{ en } y^2-2z+v;$$

het voorstel verschaft ons dus de vergelijkingen

$$x-2y^2+z=-\tfrac{1}{2}x \text{ of } 2z=4y^2-3x,$$

$$y^2-2z+v=-\tfrac{1}{2}x \text{ of } 4z=2y^2+2v+x,$$

$$v=2x(2x+1)=4x^2+2x,$$

en

en $$y = x + 1;$$

brengende nu de waarden van v en y, uit de beide laatste vergelijkingen in de beide eerste vergelijkingen over, dan komt er

$$2z = 4x^2 + 5x + 4,$$

en $$4z = 10x^2 + 9x + 2;$$

de laatste vergelijking met het dubbeld der laatstvorige verminderende, komt er

$$2x^2 - x - 6 = 0,$$

waaruit men vindt $$x = 2;$$

alzoo is $$y = x + 1 = 3 \text{ of } y^2 = 9,$$

$$z = \tfrac{1}{2}(4x^2 + 5x + 4) = 15$$

en $$v = 4x^2 + 2x = 20;$$

de bedoelde reeks bestaat dus uit de getallen

2, 9, 15 en 20,

die de letters B, I, O, T

aanwijzende, den gevraagden naam doen kennen.

II. Oplossing *van* C. F. Julius.

Alzoo de gelijke verschillen geheele getallen moeten zijn, kan de eerste term der reeks niet anders dan van den vorm $2x$ wezen; daar nu de laatste term een prorik is, die niet grooter mag wezen dan 26, en deszelfs wortel bovendien van den vorm $4x$ moet zijn, zoo is het klaar, dat men slechts $x = 1$ kan hebben; hierdoor vindt men, dat de eerste term 2 is, waaruit nu al het overige terstond kan afgeleid worden.

CLXXXIX. Voorstel.

Door J. Schotborgh, Hz.

Indien men op de hypothenusa AC (*Fig.* 68) *van den regthoekigen driehoek* ABC *het vierkant* ADEC *beschrijft en bepaalt, dat de afstand van het punt* D *tot de regthoekszijde* BC, *dat is de lijn* DG, 14 *meters lang is, en dat de inhoud van het trapezium* ABGD 60 *vierkante meters is, vraagt men de zijden van dien regthoekigen driehoek te berekenen?*

Opgelost *door* J. Schotborgh, Hz., J. Bassan, A. C. Belinfante, S. T. Boas, C. J. Bolten, Mr G. W. de Bruijn Kops, C. Brunings, S. Dik, Cornz., D. Hoola van Nooten, B. de Jongh, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, B. Lub.

Lubbers, M. G. Snoer, L. J. Ulman, G. de Waal, I. Warmsinck, D. S. Waterman *en* M. L. Goede.

Oplossing *van* J. Schotborgh, Hz.

Stellen wij $AB = x$ meters en $BC = y$ meters, en trekken wij uit A eene loodlijn AH op DG, dan zijn de driehoeken AHD en ABC gelijk en gelijkvormig, en derhalve

$$DG = DH + HG = BC + AB = x + y,$$

waaruit volgt de vergelijking

$$x + y = 14;$$

voorts is

Inh. trap. $ABGD = \frac{1}{2} AH(AB + DG) = \frac{1}{2} AB(AB + DG) = \frac{1}{2} x(2x + y)$,

en dus ook $\frac{1}{2} x(2x + y) = 60$,

of $x(2x + y) = 120$;

uit de eerste vergelijking $y = 14 - x$ trekkende, en dit in de tweede overbrengende, komt er

$$x(x + 14) = 120,$$

of $x^2 + 14x = 120$,

waaruit volgt $x = 6$; of $x = -20$;

de laatste waarde van x niet in den eigenlijken zin aan de vraag beantwoordende, hebben wij alleen $x = 6$, derhalve $y = 8$ en de zijden des driehoeks zijn bij gevolg 6, 8 en 10 meters lang.

Aanmerking *van* J. Badon Ghijben. Om de negatieve waarde, voor x gevonden, te verklaren, zoude men (*Fig.* 69) AB aan de andere zijde van het punt B moeten plaatsen, terwijl het vierkant ACED aan denzelfden kant van AC moet blijven; de tweede waarde van x is dus toepasselijk, wanneer het vierkant op de hypothenusa binnen- in plaats van buitenwaarts beschreven is; alsdan bestaat er echter geen eigenlijk *Trapezium* ABGD, maar hier moet men, even als in het oorspronkelijke geval, door dat trapezium verstaan, het verschil der beide driehoeken ABI en DGI. Neemt men dan ook in *Fig* 69 als gegeven aan

$DG = 14$ meters en *drieh* ABI — *drieh.* DGI = 60 vierk. meters, zoo zal men vinden

$$AB = 20, \text{ of } AB = -6 \text{ meters.}$$

CXC. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

Wanneer van eenen driehoek bekend is het verlengde van elk der lood-

loodlijnen, uit de hoekpunten op de overstaande zijden neder gelaten, genomen van deze zijden tot aan de snijding met de halve cirkels, uitwendig op de zijden des driehoeks beschreven, vraagt men hieruit de zijden des driehoeks te berekenen?

OPGELOST *door* C. J. BOLTEN, D. HOOLA VAN NOOTEN, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. BASSAN, B. DE JONGH, C. F. JULIUS, L. J. ULMAN *en* I. WARNSINCK.

OPLOSSING *van* C. J. BOLTEN.

Zij ABC de bedoelde driehoek, laten gegeven zijn

$$DG = a, \quad EH = b, \quad FI = c,$$

en stellen wij $BC = 2x$, $AC = 2y$, $AB = 2z$,
dan is, volgens eene bekende eigenschap der driehoeken in het algemeen,

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2\,AC \times CE,$$

dat is:

$$4z^2 = 4x^2 + 4y^2 - 4y \times CE,$$

waaruit men vindt $CE = \dfrac{x^2 + y^2 - z^2}{y}$;

even zoo vindt men $AE = \dfrac{y^2 + z^2 - x^2}{y}$,

$$AF = \frac{y^2 + z^2 - x^2}{z},$$

$$BF = \frac{x^2 + z^2 - y^2}{z},$$

$$BD = \frac{x^2 + z^2 - y^2}{x}$$

en $CD = \dfrac{x^2 + y^2 - z^2}{x}$;

voorts is volgens de eigenschap des cirkels

$$BD \times CD = a^2, \quad AE \times CE = b^2, \quad AF \times BF = c^2,$$

en hierin de bovenstaande waarden voor BD, CD, *enz.* substituerende, verkrijgen wij de drie volgende vergelijkingen:

$$\frac{(x^2 + y^2 - z^2)(x^2 - y^2 + z^2)}{x^2} = a^2,$$

$$\frac{(-x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 - z^2)}{y^2} = b^2$$

en $\dfrac{(x^2 - y^2 + z^2)(-x^2 + y^2 + z^2)}{z^2} = c^2$;

 in-

indien wij nu deze drie vergelijkingen te zamen vermenigvuldigen en uit het product den vierkantswortel trekken, komt er

$$(x^2+y^2-z^2)(x^2-y^2+z^2)(-x^2+y^2+z^2)=abcxyz,$$

en hierin ieder der drie vergelijkingen deelende, verkrijgen wij

$$-x^2+y^2+z^2=\frac{bcyz}{ax},$$

$$x^2-y^2+z^2=\frac{acxz}{by}$$

en

$$x^2+y^2-z^2=\frac{abxy}{cz};$$

tellende nu deze laatste vergelijkingen twee aan twee bij elkander op, vinden wij

$$2z^2=\frac{bcyz}{ax}+\frac{acxz}{by},$$

$$2y^2=\frac{abxy}{cz}+\frac{bcyz}{ax}$$

en

$$2x^2=\frac{acxz}{by}+\frac{abxy}{cz};$$

of na herleiding

$$2abcxyz=c^2(b^2y^2+a^2x^2) \quad \ldots\ldots (A),$$

$$2abcxyz=b^2(a^2x^2+c^2z^2) \quad \ldots\ldots (B)$$

en

$$2abcxyz=a^2(c^2z^2+b^2y^2) \quad \ldots\ldots (C);$$

derhalve is $a^2(c^2z^2+b^2y^2)=b^2(a^2x^2+c^2z^2)$,

waaruit volgt $x^2=\frac{a^2b^2y^2+(a^2-b^2)c^2z^2}{a^2b^2} \quad \ldots\ldots (D);$

en ook is $b^2(a^2x^2+c^2z^2)=c^2(b^2y^2+a^2x^2)$,

waaruit volgt $x^2=\frac{b^2c^2(y^2-z^2)}{(b^2-c^2)a^2} \quad \ldots\ldots (E);$

deze beide waarden van x^2 verschaffen ons de vergelijking

$$\frac{a^2b^2y^2+(a^2-b^2)c^2z^2}{a^2b^2}=\frac{b^2c^2(y^2-z^2)}{(b^2-c^2)a^2},$$

of $a^2b^2(b^2-c^2)y^4+(a^2-b^2)(b^2-c^2)c^2z^2=b^4c^2y^2-b^4c^2z^2$,

waaruit gevonden wordt

$$y^2=\frac{(a^2-b^2)(b^2-c^2)c^2+b^4c^2}{b^4c^2-a^2b^2(b^2-c^2)}z^2=\frac{c^2(a^2b^2-a^2c^2+b^2c^2)}{b^2(-a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}z^2$$

of

$$y=z\frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2b^2-a^2c^2+b^2c^2}{-a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}} \quad \ldots\ldots (F);$$

de-

deze waarde van y in (D) of (E) overbrengende, vindt men

$$x = z \cdot \frac{c}{a} \sqrt{\frac{a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2}{-a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}} \quad \ldots \quad (G);$$

en eindelijk de beide gevondene waarden voor x en y in eene der vergelijkingen (A), (B) of (C) stellende, vinden wij voor z

$$z = \frac{a^2b^2c}{\sqrt{(a^4b^4 - c^4(a^2-b^2)^2)}},$$

terwijl nu uit (F) en (G) gevonden wordt

$$y = \frac{a^2c^2b}{\sqrt{(a^4c^4 - b^4(a^2-c^2)^2)}},$$

en

$$x = \frac{b^2c^2a}{\sqrt{(b^4c^4 - a^4(b^2-c^2)^2)}},$$

zoodat wij nu de zijden des driehoeks in de gegevens hebben uitgedrukt.

Aanmerkingen. Stelt men in de voorenstaande formules $a=b=c$, dan vindt men $x=y=z=a$; de driehoek wordt alsdan gelijkzijdig en men vindt dus de halve zijden gelijk aan het verlengde der loodlijnen.

Stelt men $a=b$, dan wordt

$$z = c \quad \text{en} \quad x = y = \frac{c^2}{\sqrt{(2c^2 - a^2)}};$$

de driehoek is alsdan gelijkbeenig en men heeft de halve derde zijde, zoo als behoort, gelijk gevonden aan het verlengde der loodlijn op die zijde vallende.

Is $a=0$ en $b=0$, dan is de driehoek regthoekig in B en men vindt, door deze waarden in de formulen te stellen,

$$x = \frac{0}{0},\ y = \frac{0}{0},\ z = \frac{0}{0};$$

dat is, er kunnen alsdan oneindig vele regthoekige driehoeken bestaan, waarbij het verlengde der loodlijn, uit den regten hoek op de hypothenusa vallende, gelijk aan c is.

Zullen de waarden van x, y en z bestaanbaar blijven, dan moet

$$a^4b^4 > c^4(a^2-b^2)^2,\ a^4c^4 > b^4(a^2-c^2)^2,\ b^4c^4 > a^4(b^2-c^2)^2$$

zijn, doch, indien men slechts aan eene dezer drie voorwaarden voldoet, wordt tevens van zelve aan de beide andere voldaan; stellen wij om dit aan te toonen, dat

$$a^4b^4 > c^4(a^2-b^2)^2$$

 is,

is, dan is ook $a^2b^2 > \pm c^2(a^2 - b^2)$,
dat is: $a^2b^2 > a^2c^2 - b^2c^2$ en $a^2b^2 > b^2c^2 - a^2c^2$,
hieruit volgt nu terstond

$$b^2c^2 > a^2c^2 - a^2b^2 \text{ en } a^2c^2 > b^2c^2 - a^2b^2,$$

$$b^4c^4 > a^4(c^2 - b^2)^2 \text{ en } a^4c^4 > b^4(c^2 - a^2)^2,$$

of, wat hetzelfde is,

$$b^4c^4 > a^4(b^2 - c^2)^2 \text{ en } a^4c^4 > b^4(a^2 - c^2)^2.$$

Eindelijk merken wij nog aan, dat, indien de waarden van a, b en c aan deze voorwaarden voldoen, de driehoek altijd scherphoekig zal zijn, zoo als ook uit de beschouwing der figuur kan blijken; als mede, dat de constructie der waarden van x, y en z meer omslagtig dan moeijelijk zijnde, door ons met stilzwijgen wordt voorbij gegaan.

CXCI. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Wanneer van eenen driehoek de lijnen, uit de hoekpunten naar het midden der overstaande zijden getrokken, zijn $3a$, $3b$ *en* $3c$ *en wanneer verder* $a+b+c=2s$ *is, zal de inhoud van den driehoek worden uitgedrukt door* $12\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$; *men vraagt zulks te bewijzen?*

OPGELOST *door* C. F. JULIUS, C. J. BOLTEN, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. BASSAN, M. L. GOEDE, D. HOOLA VAN NOOTEN, B. DE JONGH, D. VAN LANKEREN MATTHES, L. J. ULMAN *en* I. WARNSINCK.

OPLOSSING *van* C. F. JULIUS.

Laat in den driehoek ABC (*Fig.* 71), waarvan de zijden in E, G en K midden door gedeeld zijn, AE $=3a$, BG $=3b$ en CK $=3c$ gegeven zijn, dan zullen, zoo als bekend is, deze drie lijnen elkander in een punt D binnen den driehoek, zoodanig snijden, dat DE $=a$, DG $=b$, DK $=c$, AD $=2a$, BD $=2b$ en CD $=2c$ is; deelen wij verder AD, BD en CD midden door in H, L en F, dan zullen wij, na het trekken van EF, FG, GH, HK, KL en LE, den oorspronkelijken driehoek ABC in 12 andere driehoeken verdeeld hebben.

Uit de verschillende middendoordeelingen der lijnen in onze figuur voorkomende volgt, dat GF en KL met AE, EF en HK met BG, GH en EL met CK evenwijdig zijn; hieruit blijkt ten

klaar-

klaarste, dat de genoemde 12 driehoeken alle gelijk van inhoud zijn, dat bovendien 6 derzelve, die aan het punt D zamen komen, gelijkvormig zijn en dat de zijden van deze 6 laatste door a, b en c worden uitgedrukt. Daar nu de inhoud van een dezer driehoeken, zoo als bekend is, uitgedrukt wordt door $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, zoo is de inhoud des geheelen driehoeks klaarblijkelijk gelijk aan $12\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, hetgeen bewezen moest worden.

Aanmerking *van* C. J. Bolten. Daar $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ den inhoud van den driehoek voorstelt, met de drie lijnen DE, DG en DK beschreven, en deze driehoek gelijkvormig zal zijn met de driehoeken, uit AD, BD en CD en uit AE, BG en CK zamengesteld, zoo staan hunne inhouden in reden als de getallen 1, 4 en 9, en derhalve is

$$\begin{aligned} \textit{drieh.}\,\mathrm{ABC} &= 12\ \textit{drieh.}(\mathrm{DE},\ \mathrm{DG},\ \mathrm{DK}) \\ &= 3\ \textit{drieh.}(\mathrm{AD},\ \mathrm{BD},\ \mathrm{CD}) \\ &= \tfrac{4}{3}\ \textit{drieh.}(\mathrm{AE},\ \mathrm{BG},\ \mathrm{CK}). \end{aligned}$$

CXCII. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

Van eenen bolvormigen driehoek is gegeven de tophoek $=\alpha$, *de som der hoeken aan de bazis* $=\beta$ *en de loodregte boog, die uit den top op de bazis valt* $=\gamma$; *men vraagt de hoeken aan de bazis en de zijden te berekenen?*

Opgelost *door* W. J. C. Rammelman Elsevier, L. J. Ulman, D. Hoola van Nooten, I. Warnsinck *en* A. C. Belinfante.

I. Oplossing *van* W. J. C. Rammelman Elsevier.

Zij ABC (*Fig.* 72) de bolvormige driehoek, waarin de loodregte boog $AD=\gamma$, *hoek* $BAC=\alpha$ en *hoek* B $+$ *hoek* $C=\beta$ gegeven is, stellen wij dan

$$\textit{hoek}\,\mathrm{BAD}=\tfrac{1}{2}\alpha+\phi,\ \textit{hoek}\,\mathrm{CAD}=\tfrac{1}{2}\alpha-\phi,$$
$$\textit{hoek}\ \mathrm{B}=\tfrac{1}{2}\beta+\psi,\ \textit{hoek}\ \mathrm{C}=\tfrac{1}{2}\beta-\psi,$$

dan verkrijgen wij, door deze gestelde waarden in de bekende formulen

$$\mathit{Cos}.\,\mathrm{B}=\mathit{Cos}.\,\mathrm{AD}\times\mathit{Sin}.\,\mathrm{BAD},$$
en
$$\mathit{Cos}.\,\mathrm{C}=\mathit{Cos}.\,\mathrm{AD}\times\mathit{Sin}.\,\mathrm{CAD},$$

over te brengen, de vergelijkingen

$$Cos.(\tfrac{1}{2}\beta+\psi)=Cos.\gamma\,Sin.(\tfrac{1}{2}\alpha+\phi),$$

en
$$Cos.(\tfrac{1}{2}\beta-\psi)=Cos.\gamma\,Sin.(\tfrac{1}{2}\alpha-\phi),$$

waarvan de fom en het verfchil geeft

$$Cos.(\tfrac{1}{2}\beta+\psi)+Cos.(\tfrac{1}{2}\beta-\psi)=Cos\,\gamma\left\{Sin.(\tfrac{1}{2}\alpha+\phi)+Sin.(\tfrac{1}{2}\alpha-\phi)\right\}$$

en

$$Cos.(\tfrac{1}{2}\beta+\psi)-Cos.(\tfrac{1}{2}\beta-\psi)=Cos.\psi\left\{Sin.(\tfrac{1}{2}\alpha+\phi)-Sin.(\tfrac{1}{2}\alpha-\phi)\right\},$$

of na herleiding

$$Cos.\tfrac{1}{2}\beta\,Cos.\psi=Cos.\gamma\,Sin.\tfrac{1}{2}\alpha\,Cos\,\phi,$$

$$-Sin.\tfrac{1}{2}\beta\,Sin.\psi=Cos.\gamma\,Cos.\tfrac{1}{2}\alpha\,Sin.\phi,$$

welke vergelijkingen in elkander gedeeld zijnde, geven

$$Tang.\psi=-Cot.\tfrac{1}{2}\alpha\,Cot.\tfrac{1}{2}\beta\,Tang.\phi;$$

men kan de beide voorgaande vergelijkingen ook fchrijven in den vorm

$$\frac{Cos.\psi}{Cos.\phi}=\frac{Cos.\gamma\,Sin.\tfrac{1}{2}\alpha}{Cos\,\tfrac{1}{2}\beta}\quad\text{en}\quad\frac{Sin.\psi}{Sin.\phi}=-\frac{Cos.\gamma\,Cos\,\tfrac{1}{2}\alpha}{Sin.\tfrac{1}{2}\beta},$$

waaruit volgt

$$\frac{Cos^2\,\psi}{Cos^2.\phi}=\frac{Cos^2.\psi\,Sin^2.\tfrac{1}{2}\alpha}{Cos^2.\tfrac{1}{2}\beta}\quad\text{en}\quad\frac{Sin^2.\psi}{Sin^2\,\phi}=\frac{Cos^2.\gamma\,Cos^2.\tfrac{1}{2}\alpha}{Sin^2.\tfrac{1}{2}\beta};$$

vermindert men de beide leden der eerfte vergelijking met 1 en trekt men die der laatfte van 1 af, dan komt er

$$\frac{Cos^2.\psi-Cos^2.\phi}{Cos^2.\phi}=\frac{Cos^2.\gamma\,Sin^2\,\tfrac{1}{2}\alpha-Cos^2.\tfrac{1}{2}\beta}{Cos^2\,\tfrac{1}{2}\beta},$$

en
$$\frac{Sin^2.\phi-Sin^2.\psi}{Sin^2\,\phi}=\frac{Sin^2.\tfrac{1}{2}\beta-Cos^2.\gamma\,Cos^2.\tfrac{1}{2}\alpha}{Sin^2.\tfrac{1}{2}\beta},$$

en deelt men nu deze vergelijkingen in elkander, in het oog houdende dat $Cos^2.\psi-Cos^2.\phi=Sin^2.\phi-Sin^2.\psi$ is, zoo verkrijgt men

$$Tang^2.\phi=Tang^2.\tfrac{1}{2}\beta\times\frac{Cos^2.\gamma\,Sin^2.\tfrac{1}{2}\alpha-Cos^2.\tfrac{1}{2}\beta}{Sin^2.\tfrac{1}{2}\beta-Cos^2.\gamma\,Cos^2.\tfrac{1}{2}\alpha},$$

of
$$Tang.\phi=Tang.\tfrac{1}{2}\beta\times\sqrt{\frac{Cos^2\,\gamma\,Sin^2.\tfrac{1}{2}\alpha-Cos^2\,\tfrac{1}{2}\beta}{Sin^2.\tfrac{1}{2}\beta-Cos^2.\gamma\,Cos^2\,\tfrac{1}{2}\alpha}};$$

brengt men deze waarde van $Tang.\phi$ in de vroeger gevondene voor $Tang.\psi$ over, dan vindt men

$$Tang.\psi=-Cot.\tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{\frac{Cos^2\,\gamma\,Sin^2.\tfrac{1}{2}\alpha-Cos^2.\tfrac{1}{2}\beta}{Sin^2.\tfrac{1}{2}\beta-Cos^2.\gamma\,Cos^2.\tfrac{1}{2}\alpha}},$$

of, den factor $Cot.\tfrac{1}{2}\alpha$ onder het wortelteeken brengende,

$$Tang.\,\psi = -\sqrt{\frac{Cos^2\,\gamma\,Cos^2.\tfrac{1}{2}\alpha - Cos^2.\tfrac{1}{2}\beta\,Cot^2.\tfrac{1}{2}\alpha}{Sin^2.\tfrac{1}{2}\beta - Cos^2.\gamma\,Cos^2.\tfrac{1}{2}\alpha}}.$$

Door deze formules ϕ en ψ gevonden zijnde, zijn ook de hoeken B en C bekend, en de drie zijden kunnen dus verder volgens de gewone regels uit de drie hoeken worden berekend.

II. OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

Wij weten (zie J. DE GELDER, *Beg. der Meetk.* 1 druk, §. 1276) dat, wanneer de halve som der hoeken van eenen bolvormigen driehoek ABC door S wordt voorgesteld, de Sinus van den loodregten boog, uit de hoek A op de zijde BC vallende, zal uitgedrukt worden door

$$Sin.\,loodr.\,boog. = \frac{2\sqrt{\{-Cos.S\,Cos\,(S-A)\,Cos.(S-B)\,Cos.(S-C)\}}}{Sin.\,A};$$

in ons geval is deze *loodregte boog* $= \gamma$ gegeven, $A = \alpha$, $B + C = \beta$, dus $S = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)$; stellen wij nu $B - C = \phi$, dan is $B = \tfrac{1}{2}(\beta + \phi)$, $C = \tfrac{1}{2}(\beta - \phi)$, en brengen wij alle deze waarden in de bovenstaande vergelijking, dan komt er, na dezelve tot de tweede magt verheven en den noemer verdreven te hebben,

$$Sin^2\,\gamma\,Sin^2.\alpha = -4.Cos.\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,Cos.\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)\,Cos.\tfrac{1}{2}(\alpha-\phi)\,Cos.\tfrac{1}{2}(\alpha+\phi),$$

of, omdat men in het algemeen heeft

$$2\,Cos.\tfrac{1}{2}(p+q)\,Cos.\tfrac{1}{2}(p-q) = Cos.\,p + Cos.\,q,$$

$$Sin^2.\gamma\,Sin^2.\alpha = -(Cos.\alpha + Cos.\beta)(Cos.\alpha + Cos.\phi),$$

hieruit vindt men terstond

$$Cos\,\alpha + Cos.\phi = -\frac{Sin^2\,\gamma\,Sin^2.\alpha}{Cos.\alpha + Cos.\beta},$$

en

$$Cos.\phi = -\frac{Sin^2.\gamma\,Sin^2.\alpha}{Cos.\alpha + Cos.\beta} - Cos.\alpha;$$

hierdoor worden nu de hoeken B en C bekend en dus kunnen ook de zijden op de gewone wijze berekend worden.

AANMERKING *van* J. BADON GHIJBEN. De uitkomst der eerste oplossing laat zich gemakkelijk tot die der tweede herleiden; in de eerste oplossing namelijk was $B - C = 2\psi$ gesteld; nu is in het algemeen

$$Cos.\,2\psi = \frac{1 - Tang^2.\psi}{1 + Tang^2.\psi},$$

en

en brengt men hierin de gevondene waarde voor $Tang.\,\psi$ over, dan vindt men achtervolgens

$$Cos.\,2\psi = \frac{1 - \dfrac{Cos^2\gamma\,Cos^2.\tfrac{1}{2}\alpha - Cos^2.\tfrac{1}{2}\beta\,Cot^2.\tfrac{1}{2}\alpha}{Sin^2.\tfrac{1}{2}\beta - Cos^2\gamma\,Cos^2.\tfrac{1}{2}\alpha}}{1 + \dfrac{Cos^2.\gamma\,Cos^2\tfrac{1}{2}\alpha - Cos^2.\tfrac{1}{2}\beta\,Cot^2.\tfrac{1}{2}\alpha}{Sin^2\tfrac{1}{2}\beta - Cos^2.\gamma\,Cos^2\tfrac{1}{2}\alpha}},$$

$$Cos.\,2\psi = \frac{Sin^2.\tfrac{1}{2}\beta - 2\,Cos^2\gamma\,Cos^2.\tfrac{1}{2}\alpha + Cos^2.\tfrac{1}{2}\beta\,Cot^2\tfrac{1}{2}\alpha}{Sin^2.\tfrac{1}{2}\beta - Cos^2.\tfrac{1}{2}\beta\,Cot^2.\tfrac{1}{2}\alpha},$$

teller en noemer met $4\,Sin^2.\tfrac{1}{2}\alpha$ vermenigvuldigende, verkrijgt men

$$Cos.\,2\psi = \frac{4Sin^2\tfrac{1}{2}\beta Sin^2\tfrac{1}{2}\alpha - 8Cos^2.\gamma Sin^2.\tfrac{1}{2}\alpha Cos^2.\tfrac{1}{2}\alpha + 4Cos^2.\tfrac{1}{2}\beta Cos^2\tfrac{1}{2}\alpha}{4Sin^2.\tfrac{1}{2}\beta\,Sin^2.\tfrac{1}{2}\alpha - 4Cos^2.\tfrac{1}{2}\beta Cos^2.\tfrac{1}{2}\alpha},$$

hierin nu substitueerende: $2\,Sin^2.\tfrac{1}{2}\alpha = 1 - Cos.\alpha$, $2\,Sin^2.\tfrac{1}{2}\beta = 1 - Cos.\beta$, $2\,Cos^2.\tfrac{1}{2}\alpha = 1 + Cos.\alpha$, $2\,Cos^2.\tfrac{1}{2}\beta = 1 + Cos.\beta$ en $2\,Sin.\tfrac{1}{2}\alpha\,Cos.\tfrac{1}{2}\alpha = Sin.\alpha$, komt er

$$Cos.2\psi = \frac{(1-Cos.\alpha)(1-Cos.\beta) - 2Cos^2.\gamma Sin^2.\alpha + (1+Cos.\alpha)(1+Cos.\beta)}{(1-Cos.\alpha)(1-Cos\,\beta) - (1+Cos.\alpha)(1+Cos\,\beta)},$$

$$Cos.\,2\psi = \frac{2 + 2\,Cos.\alpha\,Cos\,\beta - 2\,Cos^2\gamma\,Sin^2.\alpha}{-\,2\,Cos.\alpha - 2\,Cos.\beta},$$

$$Cos.\,2\psi = -\frac{1 + Cos.\alpha\,Cos.\beta - Cos^2.\gamma\,Sin^2.\alpha}{Cos.\alpha + Cos.\beta},$$

hierin nu $1 = Sin^2.\alpha + Cos^2.\alpha$ en $Cos^2.\gamma = 1 - Sin^2.\gamma$ substitueerende, vindt men

$$Cos.\,2\psi = -\frac{Cos^2.\alpha + Cos.\alpha\,Cos.\beta + Sin^2.\gamma\,Sin^2.\alpha}{Cos.\alpha + Cos.\beta},$$

of $$Cos.\,2\psi = -\frac{Sin^2.\gamma\,Sin^2.\alpha}{Cos.\alpha + Cos\,\beta} - Cos.\alpha;$$

even gelijk zulks in de tweede oplossing voor de Cosinus van B — C was gevonden.

CXCIII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Van eenen driehoek is bekend de bazis, de tophoek en de som van de twee verschillen van elke der opstaande zijden met de loodlijn, die uit den tophoek op de bazis valt. Men begeert dien driehoek te bepalen?

OPGELOST *door* J. BASSAN, L. J. ULMAN, C. F. JULIUS, B. DE JONGH, I. WARNSINCK, A. C. BELINFANTE *en* D. HOOLA VAN NOOTEN.

Op-

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Zij ABC (*Fig.* 73) de bedoelde driehoek, B de tophoek, BD de loodlijn en laat op de opstaande zijden BE = BF = BD genomen zijn, dan zijn de gegevens *hoek* ABC $=2\alpha$, AC $=a$ en AE + FC $=b$; stellen wij nu BD = BE = BF $=x$, *hoek* ABD $=\alpha+\varphi$ en *hoek* CBD $=\alpha-\varphi$, dan is

$$AD=x\,Tang.(\alpha+\varphi),\quad DC=x\,Tang.(\alpha-\varphi),\quad AB=x\,Sec.(\alpha+\varphi),$$
$$BC=x\,Sec\,(\alpha-\varphi);$$

wij hebben dus, omdat AD + DC = AC is,

$$x\{Tang.(\alpha+\varphi)+Tang.(\alpha-\varphi)\}=a,$$

en, omdat AB + BC = BE + BF + AE + FC is,

$$x\{Sec.(\alpha+\varphi)+Sec.(\alpha-\varphi)\}=2x+b;$$

trekt men uit ieder dezer vergelijkingen de waarde van x, dan verkrijgt men

$$\frac{a}{Tang.(\alpha+\varphi)+Tang.(\alpha-\varphi)}=\frac{b}{Sec.(\alpha+\varphi)+Sec.(\alpha-\varphi)-2},$$

maar nu is

$$Tang.(\alpha+\varphi)+Tang.(\alpha-\varphi)=\frac{Tang.\alpha+Tang.\varphi}{1-Tang.\alpha\,Tang.\varphi}+\frac{Tang.\alpha-Tang.\varphi}{1+Tang.\alpha\,Tang.\varphi}=$$
$$=\frac{2Tang.\alpha+2Tang.\alpha Tang^2.\varphi}{1-Tang^2.\alpha Tang^2.\varphi}=\frac{2\,Tang.\alpha\,Sec^2\,\varphi}{1-Tang^2.\alpha\,Tang^2.\varphi}=$$
$$=\frac{2\,Tang.\alpha}{Cos^2\,\varphi-Tang^2\,\alpha\,Sin^2.\varphi}=\frac{2\,Tang.\alpha}{Cos^2.\varphi-Tang^2.\alpha+Tang^2.\alpha Cos^2.\varphi}=$$
$$=\frac{2\,Tang\,\alpha}{Cos^2.\varphi\,Sec^2.\alpha-Tang^2.\alpha}=\frac{2\,Sin.\alpha\,Cos.\alpha}{Cos^2.\varphi-Sin^2.\alpha},$$

ook is

$$Sec.(\alpha+\varphi)+Sec.(\alpha-\varphi)-2=\frac{1}{Cos.(\alpha+\varphi)}+\frac{1}{Cos.(\alpha-\varphi)}-2=$$
$$=\frac{Cos.(\alpha-\varphi)+Cos.(\alpha+\varphi)}{Cos.(\alpha+\varphi)\,Cos.(\alpha-\varphi)}-2=\frac{2\,Cos.\alpha\,Cos.\varphi}{Cos^2.\varphi-Sin^2.\alpha}-2=$$
$$=\frac{2\,(Cos.\alpha\,Cos.\varphi-Cos^2.\varphi+Sin^2.\alpha)}{Cos^2.\varphi-Sin^2.\alpha},$$

hierdoor gaat de uitgebragte vergelijking over in

$$\frac{a\,(Cos^2.\varphi-Sin^2.\alpha)}{2\,Sin.\alpha\,Cos\,\alpha}=\frac{b\,(Cos^2\,\varphi-Sin^2.\alpha)}{2\,(Cos.\alpha\,Cos.\varphi-Cos^2.\varphi+Sin^2.\alpha)},$$

of, door $\frac{1}{2}(Cos^2.\varphi-Sin^2.\alpha)$ deelende, hetgeen veilig geschie-

den kan, omdat deze factor niet gelijk nul zijn kan, zonder tevens de loodlijn $x = 0$ te maken,

$$\frac{a}{\text{Sin. } \alpha \text{ Cos. } \alpha} = \frac{b}{\text{Cos. } \alpha \text{ Cos. } \phi - \text{Cos}^2. \phi + \text{Sin}^2. \alpha};$$

door herleiding vindt men hieruit

$$a \text{ Cos}^2 \phi - a \text{ Cos. } \alpha \text{ Cos. } \phi = a \text{ Sin}^2. \alpha - b \text{ Sin. } \alpha \text{ Cos. } \alpha,$$

of

$$\text{Cos}^2. \phi - \text{Cos. } \alpha \text{ Cos. } \phi = \text{Sin}^2. \alpha - \frac{b}{a} \text{ Sin. } \alpha \text{ Cos. } \alpha,$$

waaruit men vindt

$$\text{Cos. } \phi = \tfrac{1}{2} \text{ Cos. } \alpha \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4} \text{ Cos}^2. \alpha + \text{Sin}^2. \alpha - \frac{b}{a} \text{ Sin. } \alpha \text{ Cos. } \alpha)};$$

hierdoor ϕ gevonden zijnde, worden ook x en dus de opstaande zijden des driehoeks bekend, waardoor de geheele driehoek bepaald is.

AANMERKING. Indien $a = b$ gegeven ware, zou onze vierkants-vergelijking overgaan in

$$\text{Cos}^2. \phi - \text{Cos. } \alpha \text{ Cos. } \phi = \text{Sin}^2. \alpha - \text{Sin. } \alpha \text{ Cos. } \alpha,$$

of

$$\text{Cos}^2. \phi - \text{Sin}^2 \alpha = \text{Cos. } \alpha \text{ Cos. } \phi - \text{Sin. } \alpha \text{ Cos. } \alpha,$$

dat is $(\text{Cos. } \phi + \text{Sin. } \alpha)(\text{Cos. } \phi - \text{Sin. } \alpha) = \text{Cos. } \alpha (\text{Cos. } \phi - \text{Sin. } \alpha)$;
nu kan men hier wederom door $\text{Cos. } \phi - \text{Sin. } \alpha$ deelen, dus is in dit geval

$$\text{Cos. } \phi + \text{Sin. } \alpha = \text{Cos. } \alpha,$$

en derhalve

$$\text{Cos. } \phi = \text{Cos. } \alpha - \text{Sin. } \alpha.$$

CXCIV. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Men vraagt ϕ en ψ te vinden, uit de vergelijkingen

$$\text{Sin. } \phi - \text{Cos. } \phi = \text{Cos. } (\phi + \psi) - \text{Sin. } (\phi + \psi),$$

en

$$\text{Sin. } \phi + \text{Sin. } \psi + \text{Sin. } (\phi + \psi) = 2?$$

OPGELOST *door* L. J. ULMAN, J. BASSAN, C. J. BOLTEN, D. HOOLA VAN NOOTEN, C. F. JULIUS *en* I. WARNSINCK.

OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

De eerste vergelijking, aldus geschreven

$$\text{Sin. } \phi + \text{Sin. } (\phi + \psi) = \text{Cos. } \phi + \text{Cos. } (\phi + \psi),$$

gaat, door de bekende herleidings-formulen voor $\text{Sin. } p + \text{Sin. } q$ en $\text{Cos. } p + \text{Cos. } q$, terstond over in

$$2 \text{ Sin. } \tfrac{1}{2} (2 \phi + \psi) \text{ Cos. } \tfrac{1}{2} \psi = 2 \text{ Cos. } \tfrac{1}{2} (2 \phi + \psi) \text{ Cos. } \tfrac{1}{2} \psi;$$

dewijl $\text{Cos. } \tfrac{1}{2} \psi$ niet gelijk nul kan zijn, omdat alsdan $\psi = 180°$

en

en dus de tweede der opgegevene vergelijkingen onbestaanbaar zou worden, kan men door $Cos. \frac{1}{2} \psi$ deelen; hierdoor verkrijgt men

$$Sin. \tfrac{1}{2}(2\phi + \psi) = Cos. \tfrac{1}{2}(2\phi + \psi),$$

waaruit volgt $2\phi + \psi = 90°$ en $\psi = 90° - 2\phi$;

deze waarde voor ψ in de tweede opgegevene vergelijking overbrengende, verandert dezelve in

$$Sin. \phi + Cos. 2\phi + Cos. \phi = 2,$$

dus is $\quad Cos\, \phi = 2 - Cos. 2\phi - Sin. \phi,$

of, daar $Cos. 2\phi = 1 - 2\,Sin^2. \phi$ is,

ook $\quad Cos. \phi = 2\,Sin^2. \phi - Sin. \phi + 1,$

en, door verheffing tot de tweede magt,

$$Cos^2. \phi = 4\,Sin^4. \phi - 4\,Sin^3. \phi + 5\,Sin^2. \phi - 2\,Sin. \phi + 1;$$

hiervan $\quad Cos^2. \phi = 1 - Sin^2. \phi$

aftrekkende, komt er na deeling door 2,

$$2\,Sin^4. \phi - 2\,Sin^3. \phi + 3\,Sin^2. \phi - Sin. \phi = 0.$$

Hieraan voldoet vooreerst $Sin\, \phi = 0$, en derhalve $\phi = 0$, waaruit volgt $\psi = 90°$; welke waarden ook werkelijk aan de vraag beantwoorden.

Deelen wij echter de vierde magtsvergelijking door $Sin. \phi = 0$, dan verkrijgen wij

$$2\,Sin^3. \phi - 2\,Sin^2. \phi + 3\,Sin. \phi - 1 = 0;$$

hieruit vinden wij, bij eene oppervlakkige beproeving, $Sin. \phi = 0,4$ ten naasten bij; stellen wij nu $Sin. \phi = 0,4 + x$, zoo vinden wij reeds bij eene eerste benadering, $x = -0,0033474$; alzoo is

$$Sin\, \phi = 0{,}3966526 \text{ en } \phi = 23° 22' 8'',9,$$

dus $\quad Sin. \psi = Cos. 2\phi = 0,6853319$ „ $\psi = 43° 15' 42'',2,$

en $Sin. (\phi + \psi) = Cos\, \phi = 0,9179604,$

waarvan de som $= 1,9999529$ zijnde, al zeer weinig met 2 verschilt; wij hebben dus, behalve de reeds gevondene waarden

$$\phi = 0 \quad \text{en } \psi = 90°,$$

ook nog $\quad \phi = 23° 22' 9''$ „ $\psi = 43° 15' 42''.$

CXCV. VOORSTEL.

Door J. Bassan.

Uit een der hoeken A (Fig. 74) van de basis eens driehoeks ABC

ABC zijn twee lijnen tot de overstaande zijde BC *getrokken, die dezelve in* G *en* H *snijden en den hoek* A *in drie gelijke deelen verdeelen; zoo nu de loodlijnen* BD, GE *en* HF, *welke op de basis* AC *neder komen, gegeven zijn, begeert men dezen driehoek te bepalen?*

OPGELOST *door* L. J. ULMAN, J. BASSAN, C. F. JULIUS, D. HOOLA VAN NOOTEN *en* I. WARNSINCK.

OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

Zij gegeven $BD = a$, $GE = b$, $HF = c$; stel *hoek* $C = \psi$, *hoek* HAC $=$ *hoek* GAH $=$ *hoek* $BAG = \phi$, dus *hoek* $GAC = 2\phi$ en *hoek* $BAC = 3\phi$; dan is:

in *drieh.* ABC, $AD = a\,Cot.\,3\phi$ en $DC = a\,Cot.\,\psi$,
in *drieh.* AGC, $AE = b\,Cot.\,2\phi$ en $EC = b\,Cot.\,\psi$,
in *drieh.* AHC, $AF = c\,Cot.\,\phi$ en $FC = c\,Cot.\,\psi$,

en dus $AC = a\,Cot.\,3\phi + a\,Cot.\,\psi = b\,Cot.\,2\phi + b\,Cot.\,\psi = c\,Cot.\,\phi + c\,Cot.\,\psi$; hieruit volgt terstond

$(a-c)\,Cot.\,\psi = c\,Cot.\,\phi - a\,Cot.\,3\phi$ en $(b-c)\,Cot.\,\psi = c\,Cot.\,\phi - b\,Cot.\,2\phi$,

uit deze vergelijkingen de waarden van $Cot.\,\psi$ trekkende en aan elkander gelijk stellende, komt er

$$\frac{c\,Cot.\,\phi - a\,Cot.\,3\phi}{a-c} = \frac{c\,Cot.\,\phi - b\,Cot.\,2\phi}{b-c};$$

maar nu is

$$Cot.\,2\phi = \frac{Cot^2.\,\phi - 1}{2\,Cot.\,\phi} \text{ en } Cot.\,3\phi = \frac{Cot^3.\,\phi - 3\,Cot.\,\phi}{3\,Cot^2.\,\phi - 1},$$

en derhalve

$$\frac{c\,Cot.\,\phi - \dfrac{a\,Cot^3.\,\phi - 3\,a\,Cot.\,\phi}{3\,Cot^2.\,\phi - 1}}{a-c} = \frac{c\,Cot.\,\phi - \dfrac{b\,Cot^2.\,\phi - b}{2\,Cot.\,\phi}}{b-c},$$

welke vergelijking door behoorlijke herleiding verandert in

$$(4ac-3bc-ab)\,Cot^4.\,\phi + 2\,(2ac-bc-ab)\,Cot^2.\,\phi + bc - ab = 0,$$

of

$$Cot^4.\,\phi + 2\,.\,\frac{2ac-bc-ab}{4ac-3bc-ab}\,Cot^2.\,\phi + \frac{bc-ab}{4ac-3bc-ab} = 0,$$

hieruit vindt men

$$Cot^2.\,\phi = \frac{-(2ac-bc-ab) \pm (2ac-2bc)}{4ac-3bc-ab};$$

daar nu het positieve teeken vóór $(2ac-2bc)$ gesteld, eene

waarde voor *Cot* ϕ oplevert, onafhankelijk van a, b en c, namelijk $Cot^2.\phi = 1$ en dus ϕ standvastig 45°, zoo blijkt, dat hier het negatieve teeken moet genomen worden; men heeft dus

$$Cot^2.\phi = \frac{bc-ab}{4ac-3bc-ab},$$

of $$Tang^2.\phi = \frac{4ac-3bc-ab}{bc-ab} = 1 - \frac{4c(a-b)}{b(a-c)},$$

en eindelijk $$Tang.\phi = \sqrt{\left\{1 - \frac{4c(a-b)}{b(a-c)}\right\}},$$

waaruit nu verder alles bekend wordt

CXCVI. VOORSTEL.

Door H. VAN BLANKEN.

De meetkunstige plaats te vinden der punten, die zoodanig ten opzigte van drie in stelling gegevene punten A, B *en* C *gelegen zijn, dat de vierkanten der afstanden van deze punten tot* A, B *en* C *in reden zijn als drie onveranderlijke grootheden* p, q *en* r?

OPGELOST *door* H. VAN BLANKEN, L. J. ULMAN *en* I. WARNSINCK.

OPLOSSING *van* H. VAN BLANKEN.

Veronderstellen wij dat q de kleinste der drie gegevene grootheden zij, en laat de stelling der gegevene punten A, B en C (*Fig.* 75) bepaald zijn, door de gegevens, *hoek* ABC $=\beta$, BC $= a$ en AB $= c$; nemen wij dan in AB een punt D, zoodanig dat men heeft AD : BD $= \sqrt{p} : \sqrt{q}$, dan vinden wij, omdat AD + BD $= c$ is,

$$AD = \frac{c\sqrt{p}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} \text{ en } BD = \frac{c\sqrt{q}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} \quad . \quad . \quad (A);$$

nemen wij verder in het verlengde van AB, naar den kant van B, een punt E, zoodanig dat AE : BE $= \sqrt{p} : \sqrt{q}$ is, dan hebben wij, daar AE − BE $= c$ is,

$$AE = \frac{c\sqrt{p}}{\sqrt{p}-\sqrt{q}} \text{ en } BE = \frac{c\sqrt{q}}{\sqrt{p}-\sqrt{q}} \quad . \quad . \quad (B);$$

hieruit volgt

$$DE = BD + BE = \frac{c\sqrt{q}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} + \frac{c\sqrt{q}}{\sqrt{p}-\sqrt{q}} = \frac{2c\sqrt{pq}}{p-q};$$

deelt men verder DE midden door in O, dan heeft men

$$\left.\begin{aligned} DO &= EO = \tfrac{1}{2}DE = \frac{c\sqrt{pq}}{p-q}, \\ BO &= DO - BD = \frac{c\sqrt{pq}}{p-q} - \frac{c\sqrt{q}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} = \frac{cq}{p-q} \\ \text{en } AO &= AB + BO = c + \frac{cq}{p-q} = \frac{cp}{p-q}, \end{aligned}\right\} \ldots (C);$$

men befchrijve nu op DE als middellijn eenen bol en trekke uit A, B en O, naar eenig punt P van het oppervlak van dien bol, de lijnen AP, BP en OP, dan is

$$AP^2 = AO^2 + OP^2 - 2\,AO \times OP \times Cos.\,AOP,$$

en $$BP^2 = BO^2 + OP^2 - 2\,BO \times OP \times Cos.\,AOP;$$

of, indien wij in deze vergelijkingen voor AO, BO en OP = DO = EO de gevondene waarden ftellen,

$$AP^2 = p \times \frac{c^2p + c^2q - 2c^2\sqrt{pq} \times Cos.\,AOP}{(p-q)^2}$$

en $$BP^2 = q \times \frac{c^2p + c^2q - 2c^2\sqrt{pq} \times Cos.\,AOP}{(p-q)^2},$$

waaruit terftond volgt, dat voor alle punten P, in het oppervlak genomen van den bol die DE tot middellijn heeft, in het algemeen is

$$AP^2 : BP^2 = p : q.$$

Nu is het ook niet moeijelijk te bewijzen, dat, wanneer men naar eenig punt Q, binnen of buiten den bol, lijnen AQ en BQ trekt, de vierkanten van AQ en BQ *niet* tot elkander kunnen ftaan als p tot q; want de lijn BQ, of haar verlengde, fnijdt het oppervlak ergens in P en dan hebben wij, uit de driehoeken ABP en ABQ,

$$AP^2 : BP^2 = Sin^2.\,ABP : Sin^2.\,BAP;$$

en $$AQ^2 : BQ^2 = Sin^2.\,ABP : Sin^2.\,BAQ;$$

daar nu *Sin.* BAP grooter of kleiner dan *Sin.* BAQ is, naar gelang het punt Q binnen of buiten den bol ligt, zoo is $AP^2 : BP^2$ *niet* gelijk $AQ^2 : BQ^2$, maar $AP^2 : BP^2 = p : q$, derhalve $AQ^2 : BQ^2$ *niet* gelijk $p : q$.

Het oppervlak van den bol, op DE als middellijn befchreven, is dus de meetkunstige plaats der punten, welker vierkante afftanden tot A en B in reden zijn als p tot q.

Me-

Nemen wij nu ook op de lijn BO (*Fig.* 76) en haar verlengde naar den kant van B, de punten D′ en E′ zoodanig, dat

$$CD' : BD' = \sqrt{r} : \sqrt{q} \text{ en } CE' : BE' = \sqrt{r} : \sqrt{q}$$

is, dan blijkt uit het voorgaande klaar, dat het oppervlak van den bol, die D′E′ tot middellijn en O′ tot middelpunt heeft, de meetkunstige plaats is van de punten, welker vierkante afstanden tot C en B in reden zijn als $r : q$; en dat men in de vergelijkingen (A), (B) en (C) slechts c in a en p in r behoeft te veranderen, om te vinden

$$CD' = \frac{a\sqrt{r}}{\sqrt{r}+\sqrt{q}},\ BD' = \frac{a\sqrt{q}}{\sqrt{r}+\sqrt{q}} \quad \ldots \quad (A');$$

$$CE' = \frac{a\sqrt{r}}{\sqrt{r}-\sqrt{q}},\ BE' = \frac{a\sqrt{q}}{\sqrt{r}-\sqrt{q}} \quad \ldots \quad (B');$$

$$D'O' = E'O' = \frac{a\sqrt{rq}}{r-q},\ BO' = \frac{aq}{r-q} \text{ en } CO' = \frac{ar}{r-q} \quad . \quad (C')$$

De gemeene doorsnede van de oppervlakken der bollen, die DE en D′E′ tot middellijnen hebben, bevat nu klaarblijkelijk al de punten, welke zoodanig ten opzigte der punten A, B en C gelegen zijn, dat de vierkanten der afstanden van deze punten tot A, B en C tot elkander staan als de grootheden p, q en r; deze doorsnede, de gevraagde meetkunstige plaats, is dus een cirkel, die loodregt staat op het vlak, waarin de punten A, B en C gelegen zijn, en, indien men in het vlak ABC, uit de punten O en O′ met DO en D′O′ als stralen, cirkels beschrijft, die elkander in de punten F en G snijden, zal de gemeenschappelijke koorde FG, die in H loodregt door OO′ gaat, de middellijn van dezen cirkel zijn.

Deze middellijn FG kan men ook gemakkelijk door berekening vinden, want wij hebben door de vergelijkingen (C) en (C′)

$$BO = \frac{cq}{p-q},\ BO' = \frac{aq}{r-q},\ OF = \frac{c\sqrt{pq}}{p-q},\ O'F = \frac{a\sqrt{rq}}{r-q};$$

stellende nu $OF = R$, $O'F = R'$ en $OO' = D$, dan is $BO = R\sqrt{\frac{q}{p}}$, $BO' = R'\sqrt{\frac{q}{r}}$, en dus hebben wij, uit den driehoek OO′B,

$$D = OO' = \sqrt{\left(\frac{q}{p}R^2 + \frac{q}{r}R'^2 - 2\frac{q}{\sqrt{pr}}RR' \, Cos.\,\beta\right)};$$

voorts is, uit den driehoek OO'F,

$$Sin.\,OO'F = \frac{\sqrt{(R+R'+D)(R+R'-D)(R+D-R')(R'+D-R)}}{2RD}$$

en dus is, omdat FG = 2 HF = 2 OF *Sin.* OO'F is,

$$\left.\begin{array}{l} FG = \frac{1}{D}\sqrt{(R+R'+D)(R+R'-D)(R+D-R')(R'+D-R)} \\ \text{en hierin is nu} \\ D = \sqrt{\left(\frac{q}{p}R^2 + \frac{q}{r}R'^2 - 2\frac{q}{\sqrt{pr}}RR'\,Cos.\,\beta\right)}, \\ R = \frac{c\sqrt{pq}}{p-q} \text{ en } R' = \frac{a\sqrt{rq}}{r-q}. \end{array}\right\} (D).$$

AANMERKINGEN. 1°. Door in de lijn AC en haar verlengde punten te nemen, wier afstanden tot A en C in reden zijn als $\sqrt{p}$ tot $\sqrt{r}$; zoude men de middellijn van eenen derden bol verkrijgen, waarvan het oppervlak de meetkunstige plaats is der punten, wier vierkante afstanden tot A en C in reden staan als p tot r. Deze derde bol moet met de beide eersten denzelfden cirkel tot gemeene doorsnede hebben, en de middelpunten dier drie bollen liggen alzoo in eene zelfde regte lijn.

2°. Zal de gevondene meetkunstige plaats indedaad bestaan, dan moeten de gegevens zoodanig zijn, dat die bollen elkander snijden of ten minste raken kunnen; snijden of raken de bollen elkander niet, dan moet de waarde van FG onbestaanbaar worden, doordien dan de grootheden R, R', D, niet voldoen aan de voorwaarde, dat de som van elke twee derzelve grooter is dan de derde. Raken de bollen elkander slechts, dan bestaat er geen ander dan alleen het raakpunt dat aan de vraag voldoet; in dit geval moet FG en dus ook een der factoren, van de waarde voor FG gevonden, gelijk nul worden.

3°. Indien er onder de drie grootheden p, q en r twee aan elkander gelijk zijn, gaat het oppervlak van een der drie bollen in een plat vlak over; de gezochte meetkunstige plaats blijft alsdan altijd een cirkel. Maar zijn de drie grootheden p, q en r alle aan elkander gelijk, dan gaat het oppervlak van elk der bollen in een plat vlak over en de gezochte meetkunstige plaats wordt in dat geval eene regte lijn.

4°. In *Fig.* 75 hadden wij

$AD : BD = \sqrt{p} : \sqrt{q}$ en $AE : BE = \sqrt{p} : \sqrt{q}$, hieruit volgt $AD : BD = AE : BE$, of $AD \times BE = AE \times BD$, weshalve de lijn AE in de punten B en D harmonisch gesneden is.

5°. Trekt men in *Fig. 75*, naar eenig punt P van het oppervlak van den bol, die ED tot middellijn heeft, de lijnen AP, BP en DP, dan is $AP : BP = AD : BD$; de lijn PD deelt dus den hoek APB midden door; de meetkunstige plaats van de punten, uit welke men de lijnen AD en BD onder gelijke hoeken ziet, is dus het oppervlak van den bol, die DE tot middellijn heeft.

6°. Laten A en B (*Fig. 75*) de middelpunten van twee massieve bollen zijn, die p en q tot massa's hebben; en laat het vermogen, waarmede eenig punt P door den bol A wordt aangetrokken, gelijk k gesteld worden; dan vinden wij (omdat het vermogen van aantrekking werkt in de regte reden van de aantrekkende massa's en in de omgekeerde reden van de vierkanten der afstanden, die het aangetrokken punt van de middelpunten der aantrekkende massa's verwijderd is) voor het vermogen, waarmede het punt P door den bol B wordt aangetrokken $\frac{q}{p} \times \frac{AP^2}{BP^2} \times k$. Door nu deze aantrekkende vermogens aan elkander gelijk te stellen, heeft men

$$k = \frac{q}{p} \times \frac{AP^2}{BP^2} \times k,$$

waaruit volgt $AP^2 : BP^2 = p : q$;

de vierkanten der afstanden van de middelpunten der aantrekkende bollen tot de punten, welke door deze bollen met een gelijk vermogen worden aangetrokken, staan dus tot elkander als de aantrekkende massa's; en uit de oplossing van ons vraagstuk volgt dan: *dat de meetkunstige plaats van de punten, die door twee bollen met gelijk vermogen worden aangetrokken, het oppervlak van eenen bol is.*

7°. Zijn dus A, B en C (*Fig. 76*) de middelpunten van drie bollen, die respectievelijk p, q en r tot massa's hebben, dan volgt uit de voorgaande aanmerking, *dat de punten, welke door deze drie bollen met gelijk vermogen worden aangetrokken, in den*

omtrek eens cirkels liggen, die loodregt staat op het vlak, dat door de middelpunten der drie bollen gaat. De middellijn van dezen cirkel wordt gevonden, door de vergelijkingen (D) in de oplossing van ons voorstel verkregen; mogt deze middellijn, volgens de 2de Aanmerking, onbestaanbaar of gelijk nul gevonden worden, dan geeft dit alleen te kennen, dat er geen punten bestaan, of dat er slechts één enkel punt bestaat, die door de drie gegevene massieve bollen, in den gegeven onderlingen stand, met gelijk vermogen worden aangetrokken.

CXCVII. VOORSTEL.

Door A. C. BELINFANTE.

In eenen cirkel zijn twee koorden getrokken AB *en* CD, *die elkander in* E *snijden; wanneer nu gegeven is* $AE+CE=13\frac{1}{2}$, $BE+DE=12$ *en het verschil der koorden* $=\frac{1}{2}$, *dan vraagt men de deelen der koorden te berekenen?*

OPGELOST *door* A. C. BELINFANTE, S. T. BOAS, C. J. BOLTEN, Mr. G. W. DE BRUIJN KOPS, C. BRUNINGS, M. H. GODEFROI, M. L. GOEDE, G. GRAAFLAND, H. A. HARTOGH, D. HOOLA VAN NOOTEN, B. DE JONGH, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, B. LUBBERS, A. DE MOL VAN OTTERLOO, M. G. SNOEK, J. S. SPEIJER, L. J. ULMAN, G. DE WAAL, I. WARNSINCK *en* D. S. WATERMAN.

OPLOSSING *van* A. C. BELINFANTE.

Laat *Fig.* 77 den cirkel met de daarin getrokkene koorden voorstellen, stellen wij $CE=x$ en $BE=y$, dan is volgens de opgaaf $AE=13\frac{1}{2}-x$ en $DE=12-y$; daar het verschil der koorden $=\frac{1}{2}$ gegeven is, heeft men

$$(AE+BE)-(CE+DE)=\tfrac{1}{2},$$

dat is $$(13\tfrac{1}{2}-x+y)-(x+12-y)=\tfrac{1}{2},$$

waaruit volgt $$x=y+\tfrac{1}{2};$$

voorts is, door de bekende eigenschap des cirkels,

$$AE\times BE=CE\times DE,$$

of $$(13\tfrac{1}{2}-x)y=x(12-y);$$

hierin voor x de gevondene waarde $x=y+\frac{1}{2}$ overbrengende, komt er

$$(13-y)y=(y+\tfrac{1}{2})(12-y),$$

of $$13y-y^2=11\tfrac{1}{2}y+6-y^2,$$

dus

dus $1\frac{1}{2}y = 6$,

en bij gevolg $y = 4$.

Wij hebben alzoo, voor de gevraagde deelen der koorden,

$$BE = y = 4,$$
$$DE = 12 - y = 8,$$
$$CE = x = y + \tfrac{1}{2} = 4\tfrac{1}{2},$$
$$AE = 13\tfrac{1}{2} - x = 9.$$

CXCVIII. VOORSTEL.

Door E. BOAS.

Men verlangt twee getallen, zodanig dat derzelver som met de som der tweede magten te zamen genomen 4190 *zij; en dat de som van* één *maal het verschil der vierde magten,* twee *maal het verschil der derde magten en* één *maal het verschil der tweede magten gelijk zij aan het getal* 3812900?

OPGELOST *door* E. BOAS, A. C. BELINFANTE, S. T. BOAS, C. J. BOLTEN, Mr. G. W. DE BRUIJN KOPS, S. DIK, CORNEL., M. H. GODEFROI, M. L. GOEDE, G. GRAAFLAND, H. A. HARTOGH, B. HOOLA VAN NOOTEN, B. DE JONGH, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, B. LUBBERS, A. DE MOL VAN OTTERLOO, C. VAN SCHAICK, M. G. SNOEK, J. S. SPEIJER, L. J. ULMAN, L. WARNSINCK en D. S. WATERMAN.

OPLOSSING *van* E. BOAS.

Stel voor de gevraagde getallen x en y, dan is volgens de opgave

$$x^2 + y^2 + x + y = 4190,$$

en
$$x^4 - y^4 + 2x^3 - 2y^3 + x^2 - y^2 = 3812900;$$

schrijft men deze vergelijkingen in de gedaante

$$x(x+1) + y(y+1) = 4190,$$

en
$$x^2(x+1)^2 - y^2(y+1)^2 = 3812900,$$

dan ziet men terstond, dat de laatste door de eerste deelbaar is, en dat het quotient zijn zal

$$x(x+1) - y(y+1) = 910;$$

deze laatste vergelijking bij de eerste optellende en er van aftrekkende, komt er, na deeling door 2,

$$x^2 + x = 2550 \quad \text{en} \quad y^2 + y = 1640,$$

uit welke vierkantsvergelijkingen gevonden wordt

$$x = 50 \text{ of } -51 \quad \text{en} \quad y = 40 \text{ of } -41.$$

AANMERKING. Alzoo geene der beide waarden van x van eene bijzondere waarde van y afhangt en omgekeerd, zoo bestaan er, indien men de negatieve getallen niet uitsluit, vier antwoorden op het voorstel; de getallen kunnen namelijk zijn: 50 en 40, 50 en —41, —51 en 40 of —51 en —41.

CXCIX. VOORSTEL.

Door Mr. G. W. DE BRUIJN KOPS.

Twee geheele getallen te vinden, waarvan de som, het product en het quotient vierkanten zijn?

OPGELOST *door* B. LUBBERS, A. C. BELINFANTE, S. T. BOAS, C. J. BOLTEN, Mr. G. W. DE BRUIJN KOPS, C. BRUNINGS, S. DIK, CORNZ., M. H. GODEFROI, M. L. GOEDE, H. A. HARTOGH, D. HOOLA VAN NOOTEN, B. DE JONGH, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, A. DE MOL VAN OTTERLOO, C. VAN SCHAICK, M. G. SNOER, J. S. SPRIJER, L. J. ULMAN, I. WARNSINCK *en* D. S. WATERMAN.

OPLOSSING *van* B. LUBBERS.

Het product van twee getallen een vierkant zijnde, is derzelver quotient van zelve een vierkant; wij behoeven dus slechts twee der opgegevene voorwaarden te gebruiken, terwijl de derde van de tweede afhankelijk is. Om echter voor het quotient ook een geheel getal te bekomen, stelle men voor de getallen x en xy^2, dan is het product x^2y^2, als ook het quotient y^2 een vierkant; ons blijft dus alleen over de som

$$xy^2+x=x(y^2+1)$$

tot een vierkant te maken; hieraan voldoet terstond, dat men $x=y^2+1$ neme, waardoor de gestelde getallen overgaan in

$$y^2+1 \text{ en } y^4+y^2;$$

hiervan is de som $y^4+2y^2+1=(y^2+1)^2$,
het product $y^6+2y^4+y^2=(y(y^2+1))^2$,
en het quotient y^2,
welke allen, zoo als gevorderd wordt, vierkanten zijn; men heeft nu slechts voor y een willekeurig geheel getal te nemen. Nemende $y=1$, dan zijn de getallen 2 en 2; nemende $y=2$, zoo zijn de getallen 5 en 20, enz.

CC. VOORSTEL.

Door Mr. G. W. de Bruijn Kops.

Twee geheele getallen te vinden, waarvan het verschil, het product en het quotient vierkanten zijn?

Opgelost *door* B. Lubbers, A. C. Belinfante, S. T. Boas, C. J. Bolten, Mr. G. W. de Bruijn Kops, C. Brunings, S. Dik, Cornz., M. H. Godefroi, M. L. Goede, H. A. Hartogh, D. Hoola van Nooten, B. de Jongh, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, A. de Mol van Otterloo, C. van Schaick, M. G. Snoer, J. S. Speijer, L. J. Ulman, I. Warnsinck *en* D. S. Waterman.

Oplossing *van* B. Lubbers.

Voor de getallen, even als in het vorige Voorstel, x en xy^2 stellende, zijn het product en quotient bereids vierkanten, en ons blijft alleen over, het verschil

$$xy^2 - x = x(y^2 - 1)$$

tot een vierkant te maken; hieraan wordt terstond voldaan door $x = y^2 - 1$ te nemen, waardoor de gestelde getallen overgaan in

$$y^2 - 1 \quad \text{en} \quad y^4 - y^2;$$

hiervan is het verschil

$$y^4 - 2y^2 + 1 = (y^2 - 1)^2,$$

het product

$$y^6 - 2y^4 + y^2 = (y(y^2 - 1))^2,$$

en het quotient $\qquad y^2,$

welke allen naar behooren vierkanten zijn; men kan hierin voor y weder een willekeurig geheel getal, mits grooter dan de eenheid, nemen; voor $y = 2$ zijn de getallen 3 en 12.

CCI. VOORSTEL.

Door B. Lubbers.

A *en* B *hebben ieder eene gelijke hoeveelheid lands.* A *heeft slechts één stuk, zijnde een volkomen vierkant, waarvan de zijde een geheel getal Nederlandsche roeden lang is.* B *daarentegen heeft verscheidene stukken, die alle ongelijk zijn en de gedaante van regthoekige driehoeken hebben; de kortste regthoekszijden dezer driehoeken zijn respectievelijk* 3, 5, 7, 9 *enz. roeden lang, de andere zijden bevatten alle een geheel getal roeden en de inhouden dezer regthoekige driehoeken zijn de grootsten, die onder de aldus bepaalde*

de zijden kunnen zamengesteld worden. Men vraagt hoe lang de zijde van het land van A is, en hoe vele stukken B heeft?

OPGELOST door J. BADON GHIJBEN, B. LUBBERS, J. S. SPEIJER, C. F. JULIUS, M. L. GOEDE, D. HOOLA VAN NOOTEN, D. VAN LANKEREN MATTHES, L. J. ULMAN, L. WARNSINCK, S. DIK, CORNZ. en B. DE JONGH.

OPLOSSING van J. BADON GHIJBEN.

Indien de kortste zijde van eenen regthoekigen driehoek door het onevene getal a wordt voorgesteld, zal, om voor al de zijden geheele getallen te hebben en bovendien den inhoud zoo groot mogelijk te maken, de langste regthoekszijde moeten worden uitgedrukt door $\frac{1}{2}(a^2-1)$, zoo als blijkt uit de oplossing van het 95ste Voorstel; de inhoud van dien driehoek zal alsdan $\frac{1}{4}a(a^2-1)$ zijn. Wij verkrijgen dus de reeks der inhouden van de stukken land van B, door in den vorm $\frac{1}{4}a(a^4-1)$ voor a opvolgelijk 3, 5, 7, 9, *enz.* te stellen, weshalve deze reeks klaarblijkelijk eene rekenkunstige reeks van de derde orde zijn zal.

Deze reeks is	6,	30,	84,	180,	330, *enz.*
de 1ste verschillen zijn		24,	54,	96,	150, *enz.*
de 2de " "			30,	42,	54, *enz.*
de 3de " "				12,	12, *enz.*

Stellen wij nu dat x het aantal stukken land van B is, dan zal men om derzelver gezamenlijken inhoud te verkrijgen, de som van x termen dezer reeks moeten nemen; voor deze som vindt men, door de bekende formule voor het sommeren van deze soort van reeksen

$$x\times 6+\frac{x(x-1)}{1\,.\,2}\times 24+\frac{x(x-1)(x-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\times 30+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\times 12$$

of na herleiding $\frac{1}{2}x(x+2)(x+1)^2$;

dewijl deze gezamenlijke inhoud gelijk moet zijn aan den inhoud van het land van A, zoo zullen wij, de zijde van dit land door y voorstellende, moeten hebben

$$y^2=\frac{1}{2}x(x+2)(x+1)^2.$$

Het tweede lid dezer vergelijking zal dus een volkomen vierkant moeten zijn; hiertoe is vooreerst noodig, dat x even of van den vorm $2p$ is, want stelden wij x oneven, of gelijk aan $2p+1$, dan zouden wij vinden

$y^2=$

$$y^2 = 2(2p+1)(2p+3)(p+1)^2,$$

en hierin kan $2(2p+1)(2p+3)$ geen vierkant zijn, omdat, de beide laatste factoren oneven zijnde, de factor 2 er slechts eenmaal in kan voorkomen; stellen wij dus

$$x = 2p,$$

dan verkrijgen wij

$$y^2 = 2p(p+1)(2p+1)^2,$$

en ons blijft slechts over om $2p(p+1)$ en dus ook y^2 tot een volkomen vierkant te maken.

Zij te dien einde

$$2p(p+1) = q^2,$$

waarin q een geheel getal verbeeldt, dan vinden wij hieruit

$$p = \frac{-1 \pm \sqrt{(1+2q^2)}}{2},$$

waarin, omdat p een positief getal moet zijn, alleen het bovenste teeken bruikbaar is, zijnde het voorts klaar, dat $\sqrt{(1+2q^2)}$ altijd oneven en dus p een geheel getal zijn zal; wij kunnen derhalve in

$$p = \frac{-1 + \sqrt{(1+2q^2)}}{2},$$

aan q alle mogelijke getallenwaarden geven, die $\sqrt{(1+2q^2)}$ rationaal maken.

Voor $q = 2$, is $p = 1$, $x = 2$ en $y = 6$;

Voor $q = 12$, is $p = 8$, $x = 16$ en $y = 204$;

de zijde van het land van A kan dus 6 roeden lang zijn en dan heeft B 2 stukken; de zijde van het land van A kan ook 204 roeden lang zijn en dan heeft B 16 stukken; zullende men voor andere waarden van q, in geheele getallen, die $\sqrt{(1+2q^2)}$ rationaal maken, nog meerdere antwoorden in grootere getallen kunnen bekomen.

CCII. VOORSTEL.

Door C. VAN SCHAICK.

Men begeert vier geheele getallen te vinden, onder voorwaarde dat het product van het eerste en vierde gelijk zij aan 15 maal het tweede; dat het product van het tweede en vierde gelijk zij aan 26⅔ maal het eerste; en dat de som der twee eersten tot het product der twee laatsten staat als 1 tot 20?

Op-

OPGELOST *door* B. LUBBERS, A. C. BELINFANTE, S. T. BOAS, Mr. G. W. DE BRUIJN KOPS, C. BRUNINGS, S. DIK, CORNZ., M. H. GODEFROI, M. L. GOEDE, G. GRAAFLAND, D. HOOLA VAN NOOTEN, H. A. HARTOGH, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, C. VAN SCHAICK, M. G. SNOEK, J. S. SPEIJER, L. J. ULMAN *en* I. WARNSINCK.

OPLOSSING *van* B. LUBBERS.

Wanneer men voor de vier gevraagde getallen ſtelt

$$v, \quad x, \quad y \text{ en } z,$$

dan is, volgens de eerſte der opgegevene voorwaarden, $vz = 15x$ en dus $x = \frac{vz}{15}$, waardoor de vier getallen zijn

$$v, \quad \frac{vz}{15}, \quad y \text{ en } z;$$

volgens de tweede voorwaarde is alsdan $\frac{vz}{15} \times z = 26\frac{2}{3}v$, waaruit men vindt $z^2 = 400$ en $z = 20$, hierdoor verkrijgen wij voor de vier getallen

$$v, \quad 1\tfrac{1}{3}v, \quad y \text{ en } 20;$$

volgens de derde voorwaarde is nu $v + 1\frac{1}{3}v : 20y = 1 : 20$, waaruit gevonden wordt $y = 2\frac{1}{3}v$; en dus hebben wij nu voor de getallen

$$v, \quad 1\tfrac{1}{3}v, \quad 2\tfrac{1}{3}v \text{ en } 20;$$

daar er nu naar geheele getallen gevraagd wordt, kan v niet anders dan 3 of een veelvoud van 3 zijn; men kan alzoo oneindig veel antwoorden op het voorſtel leveren, waarvan dat, hetwelk de kleinſte getallen bevat, gevonden wordt door $v = 3$ te nemen, als wanneer de getallen zijn

$$3, \quad 4, \quad 7 \text{ en } 20.$$

CCIII. VOORSTEL.

Door F. VAN HEUKELOM, JR.

Twee getallen te vinden, waarvan de ſom ſtaat tot het product als 5 *tot* 12; *terwijl het verſchil ſtaat tot het verſchil der derde magten als* 1 *tot* 76?

OPGELOST *door* F. VAN HEUKELOM, JR., A. C. BELINFANTE, S. T. BOAS, C. J. BOLTEN, Mr. G. W. DE BRUIJN KOPS, C. BRUNINGS, S. DIK, CORNZ., M. L. GOEDE, M. H. GODEFROI, G.

G. Graafland, H. A. Hartogh, D. Hoola van Nooten, B. de Jongh, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, B. Lubbers, E. Olivier, Dz., C. van Schaick, M. G. Snoer, J. S. Speijer; L. J. Ulman *en* I. Warnsinck.

Oplossing *van* F. van Heukelom, Jr.

Stel voor de getallen $x+y$ en $x-y$, dan is volgens de opgave

$$2x : x^2 - y^2 = 5 : 12,$$

en $$2y : 6x^2y + 2y^3 = 1 : 76,$$

waaruit men heeft de vergelijkingen

$$5x^2 - 5y^2 = 24x,$$

en $$3x^2 + y^2 = 76;$$

het vijfvoud der laatste vergelijking bij de eerste optellende, komt er

$$20x^2 = 24x + 380,$$

of $$x^2 - \tfrac{6}{5}x = 19,$$

waaruit men vindt

$$x = \tfrac{3}{5} \pm \sqrt{(\tfrac{9}{25} + 19)} = \tfrac{3}{5} \pm \tfrac{22}{5} = 5 \text{ of } -\tfrac{19}{5};$$

gebruiken wij alleen de positieve waarde van x en stellen wij dezelve in de vergelijking $5x^2 - 5y^2 = 24x$, zoo vinden wij

$$y = 1,$$

weshalve de begeerde getallen zijn

$$x + y = 5 \quad \text{en} \quad x - y = 4.$$

CCIV. Voorstel.

Door G. Brandsteder.

Iemand koopt een huis voor 4000 *gulden, en verkoopt hetzelve na twee jaren voor* 2890 *gulden; men vraagt hoe veel ten honderd hij jaarlijks verloren heeft?*

Opgelost *door* C. J. Bolten, B. Lubbers, G. Brandsteder, A. C. Belinfante, S. T. Boas, S. Dik, Cornz., M. H. Godefroi, M. L. Goede, H. A. Hartogh, D. Hoola van Nooten, B. de Jongh, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, J. S. Speijer, L. J. Ulman, I. Warnsinck, C. Brunings, C. van Schaick *en* M. G. Snoer.

Oplossing *van* C. J. Bolten.

Stellende het gevraagde verlies jaarlijks x ten honderd, dan is het verlies op 4000 gulden, aan het einde van het eerste jaar, door de evenredigheid

$$100 : 4000 = x : 40x,$$

bekend en gelijk aan $40x$.

∴ Het verminderde kapitaal is alsdan op dat tijdstip $4000 - 40x$, en berekenende hiervan het verlies in het tweede jaar, door de evenredigheid

$$100 : 4000 - 40x = x : \frac{x(400 - 4x)}{10},$$

dan blijkt het verlies in het tweede jaar te zijn $\frac{x(200 - 2x)}{5}$.

De som der verliezen in de beide jaren moet nu gelijk zijn aan het geheele verlies of aan $4000 - 2890$ gulden; wij hebben dus de vergelijking

$$40x + \frac{2x(100 - x)}{5} = 1110,$$

of na herleiding

$$x^2 - 200x = -2775,$$

waaruit gevonden wordt

$$x = 100 \pm 85 = 185 \text{ of } 15,$$

zijnde het klaar dat alleen de laatste waarde van x in eenen eigenlijken zin aan het voorstel voldoet; het verlies is dus 15 ten honderd jaarlijks.

Aanmerking *van* B. Lubbers. Om te doen zien in welken zin de eerste waarde van x aan het voorstel beantwoordt, stellen wij dat het verlies 185 ten honderd 's jaars ware, dan vinden wij het verlies aan het einde van het eerste jaar door de evenredigheid

$$100 : 4000 = 185 : 7400;$$

na het eerste jaar is er dus verloren f 7400, of f 3400 meer dan het geheele kapitaal beliep, daarom blijft er na het eerste jaar een negatief kapitaal en wel $-f$ 3400 over; het verlies over het tweede jaar loopende wordt alsdan gevonden, door de evenredigheid

$$100 : -3400 = 185 : -6290;$$

dit verlies nu is negatief en dus eigenlijk eene winst van f 6290, zoo als ook uit den aard der zaak volgen moet, dat, verlies op een negatief kapitaal geleden eigenlijk winst is; derhalve is er

in

in het eerste jaar verloren	*f* 7400,
in het tweede jaar negatif verloren of gewonnen . . .	- 6290
en dus in de beide jaren te zamen verloren	*f* 1110,
welk verlies van het kapitaal van	- 4000
afgetrokken zijnde, juist de gegevene som van . . .	*f* 2890

tot rest overlaat.

CCV. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Men vraagt eenen driehoek te berekenen, als gegeven zijn de twee lijnen, die den tophoek in drie gelijke deelen verdeelen, gelijk mede de loodlijn, die uit een der hoekpunten aan de bazis op een der eerstgenoemde lijnen valt?

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, C. J. BOLTEN, L. J. ULMAN, C. BRUNINGS, C. F. JULIUS, J. S. SPEIJER, D. VAN LANKEREN MATTHES *en* L. WARNSINCK.

OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Laat ABC (*Fig.* 78) den driehoek voorstellen, waarin de lijnen, die den tophoek C in drie gelijke deelen verdeelen, $CD = a$ en $CE = b$ gegeven zijn, terwijl mede de loodlijn, uit het hoekpunt B op CE vallende, $BF = c$ gegeven is; stellen wij dan *hoek* $ACB = 3\phi$, en bij gevolg *hoek* $ACD =$ *hoek* $DCE =$ *hoek* $ECB = \phi$, $AC = x$ en $BC = y$, dan is

$$\textit{Inh. drieh. } ACD = \tfrac{1}{2} a x \, Sin.\, \phi,$$
$$\textit{Inh. drieh. } DCE = \tfrac{1}{2} a b \, Sin.\, \phi,$$
$$\textit{Inh. drieh. } ECB = \tfrac{1}{2} b y \, Sin.\, \phi,$$
$$\textit{Inh. drieh. } ACE = \tfrac{1}{2} b x \, Sin.\, 2\phi = b x \, Sin.\, \phi \, Cos.\, \phi,$$

en $$\textit{Inh. drieh. } DCB = \tfrac{1}{2} a y \, Sin.\, 2\phi = a y \, Sin.\, \phi \, Cos.\, \phi;$$

maar nu is

$$\textit{Inh. drieh. } ACD + \textit{Inh. drieh. } DCE = \textit{Inh. drieh. } ACE$$

en $$\textit{Inh. drieh. } DCE + \textit{Inh. drieh. } ECB = \textit{Inh. drieh. } DCB,$$

hierin de bovenstaande waarden voor de inhouden der driehoeken overbrengende, verkrijgen wij, na met 2 vermenigvuldigd en door $Sin.\, \phi$ gedeeld te hebben, de vergelijkingen

$$a x + a b = 2 b x \, Cos.\, \phi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

en $$a b + b y = 2 a y \, Cos.\, \phi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

voorts is uit den regthoekigen driehoek BFC

$y =$

$$y=\frac{c}{Sin.\phi}\;\ldots\ldots\ldots\;(3);$$

deze waarde van y, in de vergelijking (2) gesteld, geeft

$$ab+\frac{bc}{Sin.\phi}=\frac{2ac\,Cos.\phi}{Sin.\phi},$$

of $$ab\,Sin.\phi=2ac\,Cos.\phi-bc,$$

deze vergelijking in het vierkant brengende, en daarna $Sin^2.\phi=1-Cos^2.\phi$ in dezelve substitueerende, vinden wij

$$a^2b^2(1-Cos^2.\phi)=4a^2c^2\,Cos^2.\phi-4abc^2\,Cos.\phi+b^2c^2,$$

of na herleiding

$$Cos^2.\phi-\frac{4abc^2}{a^2b^2+4a^2c^2}\,Cos.\phi=\frac{a^2b^2-b^2c^2}{a^2b^2+4a^2c^2},$$

waaruit men vindt

$$Cos.\phi=\frac{2abc^2}{a^2b^2+4a^2c^2}\pm\surd\left\{\frac{4a^2b^2c^4}{(a^2b^2+4a^2c^2)^2}+\frac{a^2b^2-b^2c^2}{a^2b^2+4a^2c^2}\right\},$$

$$=\frac{2abc^2\pm\surd\{4a^2b^2c^4+(a^2b^2-b^2c^2)(a^2b^2+4a^2c^2)\}}{a^2b^2+4a^2c^2},$$

$$=\frac{2abc^2\pm\surd(4a^4b^2c^2+a^4b^4-a^2b^4c^2)}{a^2b^2+4a^2c^2},$$

$$=\frac{2bc^2\pm b\surd(4a^2c^2+a^2b^2-b^2c^2)}{ab^2+4ac^2},$$

$$=\frac{b}{a}\cdot\frac{2c^2+\surd(4a^2c^2+b^2(a^2-c^2))}{b^2+4c^2};$$

hierdoor ϕ bekend zijnde, kan men uit de vergelijking (1) de waarde van x vinden, door de vergelijking (3) kan men ook y berekenen, en daar alsdan twee zijden des driehoeks met den ingesloten hoek bekend zijn geworden, kan men door de gewone regels de zijde AB, gelijk mede de hoeken A en B berekenen.

Aanmerking *van* C. J. Bolten. Daar ter bepaling der waarden van ϕ en y alleen de vergelijkingen (2) en (3) zijn gebruikt geworden, weshalve de driehoek ACD niet anders in aanmerking is genomen dan ter bepaling van x, zoo is te gelijker tijd een ander voorstel opgelost, namelijk: *om eenen driehoek* (BCD) *te berekenen, als gegeven zijn: een der opstaande zijden* (CD), *de lijn die den tophoek midden door deelt* (CE) *en de lijn* (BF), *die uit een der hoekpunten aan de bazis loodregt op de genoemde deellijn wordt getrokken.*

CCVI.

CCVI. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Men vraagt x en y te vinden, uit de vergelijkingen

$$x^2y - y^2x = a \text{ en } x^2y^7 - y^2x^7 = b?$$

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. S. SPEIJER, A. C. BELINFANTE, C. J. BOLTEN, M. H. GODEFROI, M. L. GOEDE, D. HOOLA VAN NOOTEN, M. G. SNOER, L. J. ULMAN, S. DIK, CORNZ. *en* C. F. JULIUS.

I. OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Schrijven wij de gegevene vergelijkingen onder de gedaante

$$xy(x-y) = a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

$$x^2y^2(x^5-y^5) = -b \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

en deelen wij de laatste door de eerste, dan komt er

$$xy(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4) = -\frac{b}{a};$$

voor deze vergelijking kan men schrijven

$$xy\{(x-y)^4+5xy(x^2-xy+y^2)\} = -\frac{b}{a},$$

of

$$xy\{(x-y)^4+5xy(x-y)^2+5x^2y^2\} = -\frac{b}{a} \quad . \quad (3),$$

maar nu volgt uit de eerste der gegevene vergelijkingen (1)

$$xy = \frac{a}{x-y} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4),$$

welke waarde, in (3) gesubstitueerd zijnde, geeft

$$\frac{a}{x-y}\{(x-y)^4+5a(x-y)+\frac{5a^2}{(x-y)^2}\} = -\frac{b}{a},$$

of na herleiding

$$(x-y)^6+\frac{5a^3+b}{a^2}(x-y)^3 = -5a^2 \quad \ldots \quad (5);$$

deze vergelijking als eene vierkantsvergelijking oplossende, vindt men

$$(x-y)^3 = \frac{-5a^3-b \pm \sqrt{(5a^6+10a^3b+b^2)}}{2a^2},$$

indien wij nu kortheidshalve de bekende uitdrukking

$$\sqrt[3]{\frac{-5a^3-b \pm \sqrt{(5a^6+10a^3b+b^2)}}{2a^2}} = c$$

stel-

ſtellen, hebben wij

$$x - y = c \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6),$$

en door (4)

$$xy = \frac{a}{c} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7),$$

wordende nu uit (6) en (7) op de gewone wijze gevonden

$$x = \frac{c^2 \pm \sqrt{(c^4 + 4ac)}}{2c},$$

en

$$y = \frac{-c^2 \pm \sqrt{(c^4 + 4ac)}}{2c};$$

daar c in deze uitdrukkingen twee verſchillende waarden heeft, zullen er dus voor x en y vier verſchillende waarden beſtaan, die aan de opgegevene vergelijkingen voldoen.

II. Oplossing *van* J. S. Speijer.

Stellen wij $x = zy$, waarin z eene nieuwe onbekende voorſtelt, dan veranderen de opgegevene vergelijkingen in

$$z^2 y^3 - z y^3 = a \text{ en } z^2 y^9 - z^7 y^9 = b,$$

uit deze vergelijkingen heeft men nu terſtond

$$y^3 = \frac{a}{z(z-1)} \text{ en } y^9 = -\frac{b}{z^2(z^5-1)},$$

deshalve is

$$\left(\frac{a}{z(z-1)}\right)^3 = -\frac{b}{z^2(z^5-1)},$$

of na herleiding

$$a^3(z^5-1) + bz(z-1)^3 = 0;$$

daar nu $z-1$ niet gelijk nul zijn kan, omdat alsdan $z=1$, $x=y$ en bij gevolg $a=0$ en $b=0$ zou moeten wezen, mogen wij de laatſte vergelijking door $z-1$ deelen, als wanneer er komt

$$a^3(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) + bz(z-1)^2 = 0,$$

of, alles naar de magten van z rangſchikkende,

$$a^3 z^4 + (a^3+b)z^3 + (a^3-2b)z^2 + (a^3+b)z + a^3 = 0;$$

uit deze vierdemagtsvergelijking wordt z bekend, terwijl alsdan x en y gevonden worden door de vergelijkingen

$$y = \sqrt[3]{\frac{a}{z(z-1)}} \text{ en } x = z\sqrt[3]{\frac{a}{z(z-1)}}.$$

Aanmerking *van* J. Badon Ghijben. Om de uitgebragte vierdemagtsvergelijking te kunnen oplossen, is het niet noodig dat a en b in getallen gegeven zijn, want bij deze vergelijking zijn de

co-

coëfficienten van voren naar achteren of omgekeerd genomen juist dezelfde en het is alzoo eene *wederkeerige vergelijking*. Deelen wij namelijk deze vergelijking door z^2, dan kunnen wij dezelve schrijven in den vorm

$$a^3\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+(a^3+b)\left(z+\frac{1}{z}\right)+a^3-2b=0,$$

stellende nu

$$z+\frac{1}{z}=w,$$

dan is $\left(z+\frac{1}{z}\right)^2=z^2+2+\frac{1}{z^2}=w^2$ en derhalve

$$z^2+\frac{1}{z^2}=w^2-2,$$

hierdoor verandert onze vergelijking in

$$a^3(w^2-2)+(a^3+b)w+a^3-2b=0,$$

of

$$a^3 w +(a^3+b)w-(a^3+2b)=0,$$

waaruit men vindt

$$w=\frac{-a^3-b\pm\sqrt{(5a^6+10a^3b+b^2)}}{2a^3};$$

voorts volgt uit het stellen van $z+\frac{1}{z}=w$

$$z^2-zw=1,$$

waardoor gevonden wordt

$$z=\frac{1}{2}\left\{w\pm\sqrt{(w^2-4)}\right\},$$

en hierin behoeft men nu slechts de boven gevondene waarde van w te substitueren, om z onmiddellijk in a en b uit te drukken.

CCVII. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

In eenen driehoek eene lijn te trekken, evenwijdig aan eene der zijden, zoodanig dat de inhoud des cirkels, om den afgesneden driehoek beschreven, een n^{de} gedeelte zij van den inhoud des cirkels, om den oorspronkelijken driehoek beschreven?

Opgelost *door* L. J. Ulman, W. J. C. Rammelman Elsevier, C. F. Julius, I. Warnsinck, C. Brunings, A. C. Belinfante, D. Hoola van Nooten, J. S. Speijer *en* D. van Lankeren Matthes.

OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

Om dit voorstel op te losfen behoeft niets anders te geschieden, dan den afgesneden driehoek gelijk aan een n^{de} gedeelte van den oorspronkelijken te maken, vermits alsdan de omgeschrevene cirkels in dezelfde verhouding zullen staan. Te dien einde deelen wij eene van die zijden des driehoeks ABC (*Fig.* 79), waaraan de te trekken lijn niet evenwijdig moet loopen, bijv. AB zoodanig in D, dat $BD:AB=1:n$ zij; vervolgens beschrijven wij op AB een' halven cirkel en stellen in D eene loodlijn DE op AB, den omtrek des halven cirkels in E snijdende; voorts BE getrokken hebbende, nemen wij $BF=BE$ en trekken uit F de lijn FG evenwijdig met AC, dan zal deze lijn FG de begeerde zijn. Want uit de eigenschappen des cirkels heeft men

$$BE^2:AB^2=BD:AB,$$

dus is ook

$$BF^2:AB^2=BD:AB,$$

maar wegens de gelijkvormigheid der driehoeken FBG en ABC

$$BF^2:AB^2=\textit{drieh.}\,FBG:\textit{drieh.}\,ABC$$

zijnde, terwijl

$$BD:AB=1:n$$

genomen is, zoo heeft men ook

$$\textit{drieh.}\,FBG:\textit{drieh.}\,ABC=1:n,$$

de driehoek FBG is dus een n^{de} gedeelte van den driehoek ABC en wegens derzelver gelijkvormigheid is dan ook den cirkel om FBG het n^{de} gedeelte van den cirkel om ABC beschreven.

AANMERKINGEN. 1°. Wanneer gevraagd ware, *dat de inhoud des cirkels* om *den afgesneden driehoek beschreven, een n^{de} gedeelte moest zijn van dien* in *den oorspronkelijken driehoek beschreven*, dan zoude men te werk gaan als volgt: laat het middelpunt des ingeschreven cirkels zijn in *m* (*Fig.* 80), dan beschrijve men om den driehoek den cirkel ABHC, trekke uit diens middelpunt M de stralen MA en MB en voorts, evenwijdig met deze, uit *m* de straen *ma* en *mb*, dan is *ab* de zijde van eenen met ABC gelijkvormigen driehoek, wiens *om*geschreven cirkel de *in*geschrevene des oorspronkelijken driehoeks is; men behandele dan de zijde *ab* even als AB in *Fig.* 79, en hierdoor het punt *f* gevonden hebbende, neme men $BF=bf$ en trekke FG, die de begeerde lijn zijn zal.

2°.

2°. Wanneer de vraag was, *dat de inhoud des cirkels in den afgesneden driehoek het n^{de} gedeelte van dien om den oorspronkelijken driehoek beschreven, zijn moest*, dan zoude men aldus handelen: laten M en *m* (*Fig.* 81) wederom de middelpunten zijn der cirkels om en in den driehoek ABC beschreven, dan trekke men regthoekig door AB den straal MI en door I eene onbepaalde raaklijn, voorts uit *m* de lijnen *m*A en *m*B en, evenwijdig met deze, uit M de lijnen MA′ en MB′, die van de onbepaalde raaklijn een stuk A′B′ afsnijden, dan is A′B′ de zijde van eenen met ABC gelijkvormigen driehoek, wiens *in*geschreven cirkel de *om*geschrevene des oorspronkelijken driehoeks is; men bepale nu als boven in A′B′ het punt F′, make BF = B′F′ en trekke FG, die dan weder de begeerde deellijn zal wezen. Mogt B′F′ > AB zijn, dan is de oplossing niet in den eigenlijken zin mogelijk, men zoude dan wel, het punt F op het verlengde van AB nemende en FG trekkende, eenen driehoek BFG verkrijgen, wiens ingeschreven cirkel aan de vraag voldeed, maar deze driehoek zoude grooter dan den oorspronkelijken en dus geen van denzelven afgesneden deel zijn.

CCVIII. VOORSTEL.

Door G. GRAAFLAND.

Iemand gevraagd zijnde naar den geboortedag van LODEWIJK XIV, *gaf de volgende voorwaarden op, tusschen de getallen bestaande, die het jaar, de maand en den dag aanwijzen: het getal der maand is 4 meer dan dat van den dag; en zoo men het vierkant van de som dezer beide getallen met de helft van het getal der maand vermenigvuldigt, en door dat product het vierkant des jaargetals deelt, zal het quotient 396 meer zijn dan het drievoud van het gemelde product, en 26 minder dan de derde magt van de som der getallen van de maand en van den dag met het vierkant van het dubbeld des maandgetals te zamen genomen. Men vraagt hieruit den geboortedag te bepalen?*

OPGELOST *door* C. J. BOLTEN, A. C. BELINFANTE, Mr. G. W. DE BRUIJN KOPS, C. BRUNINGS, S. DIK, CORNZ., M. H. GODEFROI, M. L. GORDE, G. GRAAFLAND, H. A. HARTOGH, D. HOOLA VAN NOOTEN, B. DE JONGH, C. F. JULIUS, D. VAN LAN-

LANKERER MATTHES, B. LUBBERS, E. OLIVIER, DZ., M. G. SNOER, J. S. SPEIJER, L. J. ULMAN en C. VAN SCHAICK.

OPLOSSING *van* C. J. BOLTEN.

Stellende het jaargetal $= x$,
het getal der maand $= y+2$,
en dat van den dag $= y-2$,
dan is reeds aan de eerste voorwaarde van het voorstel voldaan; de overige voorwaarden geven nog de vergelijkingen

$$\frac{x^2}{2y^2(y+2)} = 396 + 6y^2(y+2),$$

en

$$\frac{x^2}{2y^2(y+2)} = -26 + 8y^3 + 4(y+2)^2,$$

deze vergelijkingen van elkander aftrekkende, verkrijgt men

$$0 = 422 + 6y^2(y+2) - 8y^3 - 4(y+2)^2,$$

of, na ontwikkeling en rangschikking,

$$y^3 - 4y^2 + 8y - 203 = 0;$$

door de gewone handelwijze zal men vinden, dat deze vergelijking eenen positieven wortel $y = 7$ heeft, en dat de beide andere wortels onbestaanbaar zijn; de waarde $y = 7$ in de eerste der bovenstaande vergelijkingen overbrengende, verkrijgt men

$$\frac{x^2}{2.7^2.9} = 396 + 6.7^2.9 = 2.9.\{22 + 3 \times 7^2\} = 2.9.13^2,$$

of $x^2 = 2^2.7^2.9^2.13^2$,
en $x = 2.7.9.13 = 1638$;
het jaargetal is dus $x = 1638$,
het getal der maand $y+2 = 9$,
dat van den dag $y-2 = 5$,
en de gevraagde geboortedag den 5de *September* 1638.

CCIX. VOORSTEL.

Door M. G. SNOER.

Men vraagt naar twee vierkante getallen, welker verschil gelijk is aan a maal het verschil van derzelver wortels, en welker som weder een vierkant is?

OPGELOST *door* M. G. SNOER, S. T. BOAS, C. F. JULIUS, L. J. ULMAN, MR. G. W. DE BRUIJN KOPS, I. WARNSINCK, D. HOOLA VAN NOOTEN, A. C. BELINFANTE, B. LUBBERS, J. S. SPEI-

Speijer, S. Dik, Corn.z., M. H. Godefroi, H. A. Hartogh, B. de Jongh, D. van Lankeren Matthes en C. van Schaick.

Oplossing van M. G. Snoer.

Laten x^2 en y^2 de gevraagde getallen voorstellen, dan is vooreerst

$$x^2-y^2=a(x-y),$$

of $$x^2-ax=y^2-ay,$$

uit welke vierkantsvergelijking men vindt

$$x=a-y \quad \text{of} \quad x=y;$$

ten andere moet x^2+y^2 een vierkant zijn, hetwelk, indien men de gevondene waarde $x=y$ wilde gebruiken, klaarblijkelijk onmogelijk is; wij kunnen dus alleen $x=a-y$ nemen, en moeten derhalve $(a-y)^2+y^2$ tot een vierkant maken; stellen wij dat $a-py$ de wortel van dit vierkant ware, dan is

$$(a-y)^2+y^2=(a-py)^2,$$

waaruit men, na ontwikkeling en herleiding, vindt

$$y=\frac{2a(p-1)}{p^2-2},$$

en dan is $$x=a-y=\frac{ap(p-2)}{p^2-2};$$

voor elke willekeurige waarde van p zullen deze gevondene uitdrukkingen aan het voorstel voldoen, mits men slechts p niet gelijk 1 of 2 neme, waardoor x of y een van beide gelijk nul zouden worden; nemende bijv. $p=3$, zoo zijn de gevraagde getallen $\frac{3a}{7}$ en $\frac{4a}{7}$.

In hoe verre het mogelijk is antwoorden in geheele getallen te bekomen, hangt alleen van het gegevene getal a af; is het getal a van den vorm q^2-2 en dus $a+2$ een volkomen vierkant, dan zal men, $p=q$ nemende, altijd geheele getallen vinden; indien bijv. $a=14$ was gegeven, neme men, omdat $14=4^2-2$ is, $p=4$, en men zal voor de begeerde getallen verkrijgen

6 en 8.

CCX. VOORSTEL.

Door J. Bassant.

Eene rekenkunstige reeks van vier termen te vinden, zoodanig

dat

dat de som der termen, de som van de vierkanten der termen en de som van de derde magten der termen andermaal eene rekenkunstige reeks uitmaken?

Opgelost *door* L. J. Ulman, J. Bassan, A. C. Belinfante, Mr. G. W. de Bruijn Kops, S. Dik, Cornz., D. Hoola van Nooten, B. de Jongh, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, B. Lubbers, I. Warnsinck, M. G. Snoer, J. S. Speijer *en* M. L. Goede.

Oplossing *van* L. J. Ulman.

Men stelle de gevraagde reeks voor door

$$x - 3px,\ x - px,\ x + px \text{ en } x + 3px,$$

dan is de som der termen $4x$,

de som der vierkanten $4x^2 + 20p^2x^2$;

de som der derde magten $4x^3 + 60p^2x^3$;

om aan de voorwaarde te voldoen, dat deze andermaal eene rekenkunstige reeks uitmaken, moet dus

$$4x + (4x^3 + 60p^2x^3) = 2(4x^2 + 20p^2x^2)$$

zijn; deze vergelijking door $4x$ deelende en de termen overbrengende, verkrijgt men

$$10p^2x - 15p^2x^2 = x^2 - 2x + 1,$$

en

$$p^2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{10x - 15x^2}.$$

De teller dezer uitdrukking reeds een vierkant zijnde, moet ook de noemer tot een vierkant gemaakt worden; men stelle daartoe

$$10x - 15x^2 = q^2x^2,$$

dan vindt men

$$x = \frac{10}{q^2 + 15},$$

hierdoor wordt

$$p = \frac{q^2 + 5}{10q},$$

en de gevraagde reeks wordt dus

$$\frac{-3q^2 + 10q - 15}{q(q^2 + 15)},\ \frac{-q^2 + 10q - 5}{q(q^2 + 15)},\ \frac{q^2 + 10q + 5}{q(q^2 + 15)} \text{ en } \frac{3q^2 + 10q + 15}{q(q^2 + 15)};$$

stellen wij $q = 5$, dan is de reeks

$$-\tfrac{2}{10},\ +\tfrac{1}{10},\ +\tfrac{4}{10} \text{ en } +\tfrac{7}{10},$$

nemen wij $q = 1$, dan is dezelve

$$-\tfrac{2}{4},\ +\tfrac{1}{4},\ +\tfrac{4}{4} \text{ en } +\tfrac{7}{4} \text{ enz.}$$

Het zal echter niet mogelijk zijn al de termen der reeks in po-

positieve getallen te bekomen, *want in het algemeen zal de som van eenige getallen*, (om het even of dezelve al dan niet eene reeks uitmaken) *de som van hunne vierkanten en de som van hunne derde magten geene rekenkunstige reeks kunnen uitmaken, zonder dat ten minste één dezer getallen negatief zij*; stellen wij, om dit aan te toonen, dat p, q, r, s, *enz.* de getallen zijn, dan vereischt de voorwaarde voor het bestaan dier reeks, dat men hebbe

$$p+q+r+s+\text{enz.}+p^3+q^3+r^3+s^3\text{ enz.}=$$
$$2(p^2+q^2+r^2+s^2+\text{enz.});$$

men kan deze vergelijking ook aldus schrijven

$$(p^3-2p^2+p)+(q^3-2q^2+q)+(r^3-2r^2+r)+(s^3-2s^2+s)+\text{enz.}=0$$

of $p(p-1)^2+q(q-1)^2+r(r-1)^2+s(s-1)^2+\text{enz.}=0$;

daar nu de tweede factor van elk der termen een vierkant en dus altijd positief is, zoo kan de som derzelve nimmer, gelijk nul worden, zonder dat ten minste één der eerste factoren p, q, r, *enz.* negatief zij.

CCXI. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Eene harmonische reeks van drie termen te vinden, zoodanig dat zoo wel de middelste term, als de som der uiterste termen vierkanten zijn?

OPGELOST *door* Mr. G. W. DE BRUIJN KOPS, J. BASSAN, A. C. BELINFANTE, C. BRUNINGS, S. DIK, CORNZ., D. HOOLA VAN NOOTEN, B. DE JONGH, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, B. LUBBERS, C. VAN SCHAICK, M. G. SNOER, J. S. SPEIJER, L. J. ULMAN *en* I. WARNSINCK.

OPLOSSING *van* Mr. G. W. DE BRUIJN KOPS.

Men stelle voor den eersten term x^2+xy,
en voor den laatsten y^2+xy,
dan is aan de voorwaarde, dat hunne som een vierkant moet zijn, voldaan; nu is, volgens de eigenschap der harmonische evenredigheden, de middelste term gelijk aan het dubbelde product der uiterste termen gedeeld door hunne som, en wij hebben dus voor den middelsten term onzer reeks

$$\frac{2(x^2+xy)(y^2+xy)}{(x^2+xy)+(y^2+xy)}=2xy;$$

deze middelste term moet nu nog een vierkant zijn en hieraan

voldoet men terstond, indien men slechts voor x en y de factoren neemt, waarin de helft van een even vierkant getal kan ontbonden worden. Nemende bijv. $2xy=4$, dan is $xy=2$ en nu kan men $x=1$ en $y=2$ nemen, waardoor de gevraagde reeks wordt

$$3, \; 4 \text{ en } 6.$$

Nemende $2xy=64$, dan is $xy=32$; nu kan men $x=1$ en $y=32$ of $x=2$ en $y=16$ of $x=4$ en $y=8$ nemen, waardoor men voor de reeks vindt

$$33, \; 64 \text{ en } 1056;$$

of $$36, \; 64 \text{ en } 288;$$

of $$48, \; 64 \text{ en } 96.$$

CCXII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Men vraagt eene rekenkunstige reeks in geheele getallen te vinden, die met de eenheid aanvangt, onder voorwaarde dat zoo wel de som der uiterste termen als de som der geheele reeks vierkanten zijn, waarvan de wortels zich als 1 tot 2 verhouden?

OPGELOST *door* A. C. BELINFANTE, J. BASSAN, L. J. ULMAN, S. T. BOAS, Mr. G. W. DE BRUIJN KOPS, C. BRUNINGS, S. DIK, CORNZ., D. HOOLA VAN NOOTEN, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, J. S. SPEIJER, M. G. SNOER, L. WARNSINCK, B. DE JONGH, B. LUBBERS *en* C. VAN SCHAICK.

OPLOSSING *van* A. C. BELINFANTE.

Men stelle voor de reeks

$$1, \; 1+x, \; 1+2x, \; enz. \; \ldots \; \text{tot} \; 1+(n-1)x,$$

dan is de som der uiterste termen

$$2+(n-1)x,$$

en de som der reeks

$$\tfrac{1}{2}n(2+(n-1)x);$$

dewijl nu de wortels dezer uitdrukkingen zich als 1 tot 2 moeten verhouden, moeten die uitdrukkingen zelve tot elkander staan als 1 tot 4, en wij hebben dus

$$2+(n-1)x : \tfrac{1}{2}n(2+(n-1)x) = 1:4,$$

waaruit men terstond vindt

$$n=8,$$

zoodat de reeks uit acht termen moet bestaan; door de waarde

$n=8$

$x=8$ in de bovenstaande uitdrukkingen te substitueren, vindt men

voor de som der uiterste termen $2+7x$,

en voor de som der reeks $4(2+7x)$;

dezen zullen beide vierkanten zijn, indien men slechts $2+7x$ tot een vierkant maakt; hiertoe stelle men

$$2+7x=(y+3)^2$$

dan vindt men hieruit

$$x=\frac{y(y+6)}{7}+1,$$

daar nu x een geheel getal moet zijn, kan men voor y alleen 7 en de veelvouden van 7, of zes minder dan 7 en deszelfs veelvouden nemen, want in het eene geval wordt y en in het andere geval $y+6$ door 7 deelbaar; de waarden die men voor y nemen kan zijn dus

$$y=0,\ 1,\ 7,\ 8,\ 14,\ 15,\ \textit{enz.}$$

de overeenkomstige waarden van x zijn

$$x=1,\ 2,\ 14,\ 17,\ 41,\ 46,\ \textit{enz.}$$

zoodat wij voor de gevraagde reeks de volgende antwoorden verkrijgen:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8;
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15;
1, 15, 29, 43, 57, 71, 85, 99;
1, 18, 35, 52, 69, 86, 103, 120;
1, 42, 83, 124, 165, 206, 247, 288;
1, 47, 93, 139, 185, 231, 277, 323;
enz.

CCXIII. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Men vraagt naar drie vijfhoekige getallen, die eene rekenkunstige reeks uitmaken, zoodanig dat hunne som een vierkant en de som hunner vijfhoekige wortels de vierkantswortel van hunne som zij?

OPGELOST *door* L. J. ULMAN, C. F. JULIUS, D. HOOLA VAN NOOTEN, B. LUBBERS, S. DIK, CORNZ., D. VAN LANKEREN MATTHES, A. C. BELINFANTE *en* B. DE JONGH.

OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

Stellen wij voor de wortels der vijfhoekige getallen x, y en z

en

en voor derzelver fom py, dan geven de voorwaarden des voorftels de drie volgende vergelijkingen:

$$x+y+z=py \quad \ldots\ldots \quad (1),$$

$$\tfrac{1}{2}x(3x-1)+\tfrac{1}{2}y(3y-1)+\tfrac{1}{2}z(3z-1)=p^2y^2 \quad (2),$$

en $$\tfrac{1}{2}x(3x-1)+\tfrac{1}{2}z(3z-1)=y(3y-1) \quad . \quad (3);$$

uit (2) en (3) volgt oogenblikkelijk

$$1\tfrac{1}{2}y(3y-1)=p^2y^2;$$

waaruit men vindt

$$y=\frac{3}{9-2p^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4);$$

brengen wij nu deze waarde voor y in (1) en (3) over, dan komt er na herleiding

$$x+z=\frac{3(p-1)}{9-2p^2} \quad \ldots\ldots \quad (5);$$

en $$\tfrac{1}{2}x(3x-1)+\tfrac{1}{2}z(3z-1)=\frac{6p^2}{(9-2p^2)^2},$$

voor deze laatfte vergelijking kunnen wij ook fchrijven

$$3x^2+3z^2-(x+z)=\frac{12p^2}{(9-2p^2)^2},$$

hier nu de vergelijking (5) bij optellende, vinden wij

$$3x^2+3z^2=\frac{12p^2}{(9-2p^2)^2}+\frac{3(p-1)}{9-2p^2},$$

en dus $$x^2+z^2=\frac{4p^2}{(9-2p^2)^2}+\frac{p-1}{9-2p^2},$$

of na herleiding

$$x^2+z^2=\frac{-2p^3+6p^2+9p-9}{(9-2p^2)^2} \quad \ldots\ldots \quad (6);$$

brengen wij verder de vergelijking (5) in het vierkant, dan geeft dit

$$x^2+2xz+z^2=\frac{9p^2-18p+9}{(9-2p^2)^2},$$

hiervan (6) aftrekkende, komt er

$$2xz=\frac{2p^3+3p^2-27p+18}{(9-2p^2)^2} \quad \ldots\ldots \quad (7),$$

en nu wederom (7) van (6) aftrekkende,

$$x^2-2xz+z^2=\frac{-4p^3+3p^2+36p-27}{(9-2p^2)^2};$$

waar-

waarvan de vierkantswortel is

$$x - z = \frac{\sqrt{(-4p^3 + 3p^2 + 36p - 27)}}{9 - 2p^2} \quad . \; . \; (8);$$

zoodat wij uit (5) en (8) eindelijk vinden

$$x = \frac{3(p-1) + \sqrt{(-4p^3 + 3p^2 + 36p - 27)}}{2(9 - 2p^2)} \quad . \; (9),$$

en $$z = \frac{3(p-1) - \sqrt{(-4p^3 + 3p^2 + 36p - 27)}}{2(9 - 2p^2)} \quad . \; (10).$$

Door de vergelijkingen (4), (9) en (10), hebben wij dan nu x, y en z alle in het beschikbare getal p uitgedrukt, en ons blijft alleen over, voor p zoodanige waarden aan te wijzen, als waardoor x, y en z rationaal zullen worden; hiertoe behoeft klaarblijkelijk slechts

$$-4p^3 + 3p^2 + 36p - 27$$

tot een vierkant gemaakt te worden, maar omdat -27 geen vierkant getal is, zal zulks niet gemakkelijk te doen zijn, alvorens voor p ten minste één getal gevonden te hebben, dat hieraan voldoet. Beproeven wij echter deze uitdrukking in factoren te ontleden, dan vinden wij, dat dezelve gelijk is aan

$$(3-p)(3+p)(4p-3),$$

en wij kunnen dezelve dus tot een volkomen vierkant maken, door te stellen

$$(3-p)(3+p) = 4p - 3 \quad . \; . \; . \; . \; (A),$$

of $$(3-p)(4p-3) = 3 + p \quad . \; . \; . \; . \; (B),$$

of $$(3+p)(4p-3) = 3 - p \quad . \; . \; . \; . \; (C);$$

uit (A) vindt men $p = 2$ of $p = -6$, uit (B) $p = 2$ of $p = 1\frac{1}{2}$, terwijl uit (C) geene rationale waarden voor p gevonden worden. Wij kennen dus nu voor p reeds de drie waarden $1\frac{1}{2}$, 2 en -6, die den vorm $-4p^3 + 3p^2 + 36p - 27$ tot een vierkant maken, en bij gevolg zijn wij in staat, om nieuwe waarden voor p te vinden die hieraan voldoen, door $p = 1\frac{1}{2} + q$, $p = 2 + q$ of $p = q - 6$ te stellen en de komende vormen op de gewone wijs te behandelen. Ter beantwoording der voorgestelde vraag zal het echter genoegzaam zijn $p = 2$ te nemen, dan wordt $x = 4$, $y = 3$ en $z = -1$; de vijfhoekige getallen zelve zijn dus 22, 12 en 2.

CCXIV.

CCXIV. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Wanneer een kegel in eenen cilinder is beschreven, zoodat zij hetzelfde grondvlak gemeen hebben en de top des kegels in het middelpunt van het bovenvlak des cilinders valt, staat de inhoud van den kegel tot dien van den cilinder als 1 *tot* 3. *Men vraagt of er even zoo eene bestendige betrekking is, tusschen de inhouden der ellipsen, die ontstaan wanneer deze beide ligchamen gesneden worden, door een plat vlak, dat aan de eene zijde bij den bovenrand des cilinders ingaat en aan de andere zijde bij den benedenrand des cilinders uitkomt? en zoo ja, welke deze betrekking is?*

Opgelost *door* C. J. Bolten, B. Lubbers, L. J. Ulman, I. Warnsinck, S. Dik, Cornz., S. T. Boas *en* C. F. Julius.

Oplossing *van* C. J. Bolten.

Laten ABCD en ABE (*Fig.* 82) eenen cilinder en daarin beschreven kegel voorstellen; zij AC de projectie van het snijdende vlak, waardoor de beide bedoelde ellipsen AC en AH ontstaan, en stellen wij $AC = a$ en $AB = b$, dan is het vooreerst klaar, dat de kleine as der ellips AC gelijk zal zijn aan de middellijn van het grondvlak des cilinders; en daar de inhoud eener ellips gelijk is aan het vierde gedeelte van het product der beide assen vermenigvuldigd met het getal π, zoo hebben wij dus

$$Inh. Ellips. AC = \tfrac{1}{4} a b \pi.$$

Om den inhoud der ellips AH te bepalen, merken wij op, dat hare groote as $AH = \tfrac{2}{3} AC$ is; want de driehoeken AHB en EHC zijn gelijkvormig, daar $AB = 2 EC$ is, is dus ook $AH = 2 HC$ en bij gevolg $AH = \tfrac{2}{3} AC = \tfrac{2}{3} a$; verder is uit de leer der kegelsneden bekend, dat, door H de lijn HI evenwijdig aan AB getrokken zijnde, de kleine as der ellips AH middenevenredig is tusschen AB en HI, maar de driehoeken AHI en ACE wederom gelijkvormig en $AH = \tfrac{2}{3} AC$ zijnde, is ook $HI = \tfrac{2}{3} EC$, of $HI = \tfrac{1}{3} AB = \tfrac{1}{3} b$; de kleine as der ellips AH is dus

$$\sqrt{AB \times HI} = \sqrt{(b \times \tfrac{1}{3} b)} = \tfrac{1}{3} b \sqrt{3},$$

en derhalve

$$Inh\ Ellips. AH = \tfrac{1}{4} \times \tfrac{2}{3} a \times \tfrac{1}{3} b \sqrt{3} \times \pi = \tfrac{1}{18} a b \pi \sqrt{3};$$

de betrekking tusschen de inhouden der beide ellipsen is alzoo

Inh.

$$Inh. Ellips. AC : Inh. Ellips. AH = \tfrac{1}{4} ab\pi : \tfrac{1}{18} ab\pi \sqrt{3},$$
$$= \tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{18} \sqrt{3},$$
$$= 9 : 2\sqrt{3},$$
$$= 3\sqrt{3} : 2;$$

waaruit blijkt dat deze betrekking bestendig is.

CCXV. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Wanneer twee gelijke cirkels elkander zoodanig snijden, dat wederkeerig de omtrek des eenen cirkels door het middelpunt van den anderen gaat, vraagt men den inhoud te vinden van het gedeelte dier cirkels, dat aan beide gemeen is?

OPGELOST *door* D. HOOLA VAN NOOTEN, B. LUBBERS, S. T. BOAS, C. BRUNINGS, C F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, L. J. ULMAN, I. WARNSINCK, J. S. SPEIJER, M. G. SNOEB, S. DIK, CORNZ. *en* B. DE JONGH.

OPLOSSING *van* D. HOOLA VAN NOOTEN.

Laten C en D (*Fig* 83) de middelpunten zijn der cirkels, die elkander volgens de opgave snijden in A en B, dan zijn de lijnen AC, AD, BC, BD en CD alle stralen der gelijke cirkels; derhalve zijn de driehoeken ACD en BCD gelijkzijdig, hunne hoeken zijn dus elk 60°, bij gevolg is *hoek* ACB $= 120°$ en de cirkelsector ACBD is dus een derde gedeelte van den inhoud des geheelen cirkels; indien wij dus de gelijke stralen r noemen, is

$$Inh. Sector. ABCD = \tfrac{1}{3} r^2 \pi.$$

De lijnen AB en CD deelen elkander in E klaarblijkelijk midden door en staan regthoekig op elkander; alzoo is EC $= \tfrac{1}{2}$CD$= \tfrac{1}{2}r$, terwijl AB de koorde van eenen boog van 120° zijnde, AB$=$ $r\sqrt{3}$ is; wij hebben dus

$$Inh. drieh. ABC = \tfrac{1}{2} AB \times EC = \tfrac{1}{4} r^2 \sqrt{3}.$$

Deze inhoud des driehoeks aftrekkende van den gevondenen inhoud des sectors, vinden wij

$$Inh. Sgm. ABD = \tfrac{1}{12} r^2 (4\pi - 3\sqrt{3});$$

en daar het gedeelte der cirkels, dat aan beide gemeen is, het dubbeld van het segment ABD bevat, vinden wij voor deszelfs inhoud

$$\tfrac{1}{6} r^2 (4\pi - 3\sqrt{3}).$$

CCXVI.

CCXVI. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Men vraagt in eenen cirkel eenen regthoek te beschrijven, waarvan de inhoud de helft is van den inhoud des cirkels; zoo mede den inhoud te vinden van de cirkel-segmenten, die door de zijden des regthoeks van den cirkel worden afgesneden?

Opgelost *door* L. J. Ulman, A. C. Belinfante, B. Lubbers, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, J. S. Speijer, S. Dik, Cornz., D. Hoola van Nooten, I. Warnsinck, C. Brunings *en* B. de Jongh.

I. Oplossing *van* L. J. Ulman.

Zij ABCD (*Fig.* 84) de begeerde vierhoek, welks diagonalen elkander klaarblijkelijk in het middelpunt E des cirkels zullen snijden; zij r de straal des cirkels en stellen wij *hoek* AEB $= \phi$, dan is de inhoud van den regthoek $2r^2 \, Sin\, \phi$, alzoo dezelve gevonden wordt, door het product der diagonalen met de halve sinus van den ingesloten hoek te vermenigvuldigen; daar deze inhoud de helft van dien des cirkels moet zijn, hebben wij de vergelijking

$$2r^2 Sin.\, \phi = \tfrac{1}{2}\pi r^2,$$

dus is $$Sin.\, \phi = \tfrac{1}{4}\pi,$$

of $$Sin.\, \phi = 0{,}7853982,$$

waaruit men door behulp der sinustafels vindt

$$\phi = 51^\circ 45' 27'',07 \text{ of } \phi = 128^\circ 14' 32'',93,$$

waarvan de eerste waarde klaarblijkelijk tot den hoek BED en de tweede tot den hoek AEB behoort.

Nemen wij nu $r = 1$, dan hebben wij voor de bogen AB en BD, in deelen van den straal uitgedrukt,

$$boog\, AB = 128^\circ 14' 32'',93 = 2{,}2382535,$$

en $$boog\, BD = 51^\circ 45' 27'',07 = 0{,}9033391;$$

daar verder de inhoud van eenen cirkelsector gelijk is aan het product van deszelfs boog met de helft van den straal, is

$$Inh.\, Sector.\, AEB = 1{,}1191267,$$

en $$Inh.\, Sector.\, BED = 0{,}4516695;$$

maar de inhouden der driehoeken AEB, BED, CED en AEC zijn alle aan elkander gelijk, dus is elk het vierde gedeelte des vierhoeks ABCD of het achtste gedeelte des cirkels, welks inhoud,

houd, omdat wij $r=1$ genomen hebben, blôtelijk door het getal π wordt uitgedrukt; wij hebben alzoo

$$drieh.\ AEB = drieh.\ BED = \tfrac{1}{8}\pi = 0{,}3926990;$$

trekken wij de inhouden dezer driehoeken van de boven gevondene inhouden der sectoren af, dan komt er

$$Inh.\ segment\ AB = 0{,}7264277,$$

en $$Inh.\ segment\ BD = 0{,}0589705;$$

voor de dubbelde som dezer segmenten vindt men juist $\frac{1}{4}\pi$, hetgeen tot eene proef op de berekening strekt; zijnde het voorts duidelijk, dat men, om de inhouden der genoemde segmenten voor eenen willekeurigen straal r te berekenen, de gevondene getallen slechts met r^2 behoeft te vermenigvuldigen.

Om den regthoek, door middel van den hoek ϕ, werkelijk in den cirkel te construeren, zonder transporteur of pleinschaal te gebruiken, stelle men (*Fig.* 85) op het uiteinde eener willekeurige middellijn AD eene raaklijn DF en make dezelve door eene der bekende handelwijzen (zie VAN SWINDEN, *Meetkunst*, VII Boek, 26 Voorst. 5de Aanm.) zoo na mogelijk gelijk aan den halven cirkelomtrek, men neme vervolgens $DG = \frac{1}{4}DF$, trekke GB evenwijdig met AB, en voorts door B de middellijn BC, dan is, wederom de straal des cirkels voor eenheid nemende, blijkbaar

$$Sin.\ BED = BH = DG = \tfrac{1}{4}DF = \tfrac{1}{4}\pi = Sin.\ \phi,$$

en dus de hoek BED of deszelfs supplement gelijk ϕ, weshalve de punten A, B, C en D, door deze constructie verkregen, de hoekpunten van den begeerden regthoek zijn.

II. OPLOSSING *van* A. C. BELINFANTE.

Laat m de middellijn des cirkels voorstellen, dan is deszelfs inhoud $\frac{1}{4}m^2\pi$ en de inhoud van den begeerden regthoek is dus $\frac{1}{8}m^2\pi$; stellen wij nu de zijden van dien regthoek AB $=x$ en AC $=y$, dan is klaarblijkelijk

$$xy = \tfrac{1}{8}m^2\pi;$$

daar voorts de diagonaal BC door het middelpunt gaat en de hoek A regt is, hebben wij ook

$$x^2 + y^2 = m^2;$$

het dubbeld der eerste vergelijking bij de laatste optellende of daarvan aftrekkende, verkrijgt men

$$(x+y)^2 = m^2(1+\tfrac{1}{4}\pi) = \tfrac{1}{4}m^2(4+\pi),$$

en $$(x-y)^2 = m^2(1-\tfrac{1}{4}\pi) = \tfrac{1}{4}m^2(4-\pi),$$

dus is $$x+y = \tfrac{1}{2}m\sqrt{(4+\pi)};$$

en $$x-y = \tfrac{1}{2}m\sqrt{(4-\pi)},$$

waaruit terstond gevonden wordt

$$x = \tfrac{1}{4}m\{\sqrt{(4+\pi)}+\sqrt{(4-\pi)}\},$$

en $$y = \tfrac{1}{4}m\{\sqrt{(4+\pi)}-\sqrt{(4-\pi)}\},$$

zoodat nu de zijden gevonden zijn en alzoo de regthoek bepaald *is.*

De inhoud der segmenten kan alsnu, daar derzelver koorden bekend zijn, op de gewone wijze berekend worden.

CCXVII. VOORSTEL.

Door M. H. GODEFROI.

Twee getallen te vinden, zoodat, tweemaal het vierkant van het eerste verminderd wordende met het vierkant van het tweede, de rest wederom een volkomen vierkant zij?

OPGELOST *door* M. H. GODEFROI, L. J. ULMAN, A. C. BELINFANTE, Mr. G. W. DE BRUIJN KOPS, C. BRUNINGS, M. L. GOEDE, H. A. HARTOGH, D. HOOLA VAN NOOTEN, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, M. G. SNOER, J. S. SPEIJER, I. WARNSINCK, S. DIK, CORNZ., B. LUBBERS *en* C. VAN SCHAICK.

OPLOSSING *van* M. H. GODEFROI.

Stel voor de getallen x en y, dan moet

$$2x^2 - y^2 = y^2 + 2(x^2 - y^2) = y^2 + 2(x+y)(x-y)$$

een vierkant zijn; zij hiertoe

$$y^2 + 2(x+y)(x-y) = \left(y + \frac{m(x+y)}{n}\right)^2,$$

ontwikkelt men dan het tweede lid dezer vergelijking, laat de gelijke term y^2 in beide leden wegvallen en deelt vervolgens de vergelijking door $x+y$, dan komt er

$$2(x-y) = \frac{2ym}{n} + \frac{m^2(x+y)}{n^2},$$

of na herleiding

$$(2n^2 - m^2)x = (2mn + m^2 + 2n^2)y,$$

waaruit volgt $$x = \frac{2mn + m^2 + 2n^2}{2n^2 - m^2}y;$$

hier-

hierin nu voor m, n en y willekeurige waarden nemende, zal men voor x eene waarde verkrijgen, die, met de genomene waarde voor y, dan de vraag beantwoordt; zij bijv. $m = 1$, $n = 1$, $y = 2$, dan is $x = 10$; en nu is $2x^2 - y^2 = 196 = 14^2$; neemt men $m = 1$, $n = 2$, $y = 7$, dan is $x = 13$; en dan is $2x^2 - y^2 = 289 = 17^2$ enz.

Aanmerking van L. J. Ulman. Om onafhankelijk van m en n voor x een geheel getal te verkrijgen, kan men $y = 2n^2 - m^2$ nemen, alsdan heeft men

$$x = m^2 + 2mn + 2n^2,$$

en

$$y = 2n^2 - m^2;$$

ftelt men nu $m + n = \pm p$ of $m = \pm p - n$, dan wordt

$$x = n^2 + p^2,$$

en

$$y = n^2 - p^2 \pm 2pn;$$

daar nu in het algemeen $n^2 + p^2$, $n^2 - p^2$ en $2pn$ de zijden van eenen rationalen regthoekigen driehoek voorftellen, blijkt het dat men, voor x de hypothenufa en voor y de fom of het verfchil der regthoekszijden van zulk eenen driehoek nemende, getallen verkrijgen zal die aan de vraag voldoen.

CCXVIII. Voorstel.

Door M. H. Godefroi.

Men vraagt a en x in geheele getallen zoodanig te bepalen, dat $ax^4 + 1$ een volkomen vierkant worde?

Opgelost *door* L. J. Ulman, M. H. Godefroi, A. C. Belinfante, C. Brunings, M. L. Goede, H. A. Hartogh, D. Hoola van Nooten, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, M. G. Snoer, J. S. Serijer, I. Warnsinck, Mr. G. W. de Bruijn Kops, S. Dik, Cornz., B. Lubbers *en* C. van Schaick.

Oplossing *van* L. J. Ulman.

Stel dat de wortel van het gezochte vierkant zij $px^2 \pm 1$, dan is

$$ax^4 + 1 = p^2x^4 \pm 2px^2 + 1,$$

waaruit men terftond vindt

$$a = p^2 \pm \frac{2p}{x^2} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(A)},$$

men kan nu x naar willekeur nemen en $2p$ insgelijks naar goed-

vinden, mits deelbaar door x^2, bijv. $p = n x^2$ nemende, heeft men

$$a = n^2 x^4 \pm 2n \quad \ldots\ldots \quad (B);$$

neemt men bijv. in (A) $x = 2$ en $p = 2$, zoo is $a = 5$ of 3; neemt men in (B) $x = 2$ en $n = 1$, zoo is $a = 18$ of 14 *enz.*

CCXIX. VOORSTEL.

Door J. S. SPEIJER.

Eenen driehoek te berekenen, indien gegeven zijn een der hoeken aan de bazis, benevens de loodlijnen, die uit de hoeken aan de bazis op de overstaande zijden vallen?

OPGELOST *door* I. WARNSINCK, J. S. SPEIJER, E. OLIVIER, DZ., L. J. ULMAN, A. C. BELINFANTE, C. J. BOLTEN, C. BRUNINGS, M. H. GODEFROI, H. A. HARTOGH, D. HOOLA VAN NOOTEN, B. DE JONGH, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES *en* S. DIK, CORNZ.

OPLOSSING *van* I. WARNSINCK.

Laat ABC (*Fig.* 86) den gevraagden driehoek voorstellen, waarin de loodlijnen op AC en AB, $BD = a$ en $CE = b$ gegeven zijn, terwijl bovendien *hoek* $ABC = \alpha$ bekend is, dan heeft men uit den regthoekigen driehoek BEC terstond

$$BC = \frac{b}{Sin.\, \alpha},$$

terwijl uit den regthoekigen driehoek BDC volgt

$$Sin.\, ACB = \frac{BD}{BC} = \frac{a\, Sin.\, \alpha}{b},$$

hierdoor de bazis BC met de aanliggende hoeken B en C bekend zijnde, zoo is de driehoek geheelenal bepaald.

Even gemakkelijk kan dezelve geconstrueerd worden; men make namelijk eenen hoek $ABC = \alpha$, trekke eene lijn evenwijdig aan AB en op den afstand b van dezelve verwijderd, deze lijn zal het been BC van den hoek ABC ergens in C snijden, welk punt C het tweede hoekpunt des driehoeks zijn zal; men beschrijve verder uit B met a als straal een cirkelboog, en trekke uit C eene raaklijn aan dien boog, zoo zal deze raaklijn de lijn AB ergens in het derde hoekpunt A snijden, waardoor de geheele driehoek geconstrueerd is.

CCXX. VOORSTEL.

Door J. S. SPEIJER.

Eenen driehoek te berekenen, indien gegeven zijn de tophoek, de bazis en de lijn, die den tophoek midden door deelt?

OPGELOST *door* J. S. SPEIJER, C. BRUNINGS, C. F. JULIUS, D. HOOLA VAN NOOTEN, L. J. ULMAN, C. J. BOLTEN, I. WARNSINCK, A. C. BELINFANTE *en* S. DIK, CORNZ.

I. OPLOSSING *van* J. S. SPEIJER.

Laat ABC (*Fig.* 87) den driehoek voorstellen, waarin de tophoek A, door de lijn AD is midden door gedeeld, dan zijn gegeven *hoek* BAC $= 2\alpha$, AD $= a$ en BC $= b$; stellen wij nu

$$hoek\,B - hoek\,C = 2\phi;$$

dan is, omdat $hoek\,B + hoek\,C = 180° - 2\alpha$

is, $hoek\,B = 90° - (\alpha - \phi)$,

en $hoek\,C = 90° - (\alpha + \phi)$,

dus ook $Sin.\,B = Cos.\,(\alpha - \phi)$ en $Sin.\,C = Cos.\,(\alpha + \phi)$.

Nu is in den driehoek ABD

$$BD = AD \times \frac{Sin.\,BAD}{Sin.\,B} = \frac{a\,Sin.\,\alpha}{Cos.(\alpha - \phi)},$$

en in den driehoek ACD

$$CD = AD \times \frac{Sin.\,CAD}{Sin.\,C} = \frac{a\,Sin.\,\alpha}{Cos.(\alpha + \phi)},$$

tellen wij deze waarden van BD en CD bij elkander op, dan vinden wij, omdat BD + CD $= b$ gegeven is,

$$b = \frac{a\,Sin.\,\alpha}{Cos.(\alpha - \phi)} + \frac{a\,Sin.\,\alpha}{Cos.\,(\alpha + \phi)},$$

of

$$b = a\,Sin.\,\alpha\,\frac{Cos.(\alpha + \phi) + Cos.\,(\alpha - \phi)}{Cos.(\alpha + \phi) \times Cos.\,(\alpha - \phi)},$$

maar nu is in het algemeen

$$Cos.\,(\alpha + \phi) + Cos\,(\alpha - \phi) = 2\,Cos.\,\alpha\,Cos.\,\phi,$$

en

$$Cos.\,(\alpha + \phi) \times Cos.\,(\alpha - \phi) = Cos^2.\,\phi - Sin^2.\,\alpha,$$

hierdoor gaat onze vergelijking over in

$$b = \frac{2\,a\,Sin.\,\alpha\,Cos.\,\alpha\,Cos.\,\phi}{Cos^2.\,\phi - Sin^2.\,\alpha} = \frac{a\,Sin.\,2\,\alpha\,Cos.\,\phi}{Cos^2.\,\phi - Sin^2.\,\alpha},$$

dewelke men terstond herleidt tot

$$Cos^2.\,\phi - \frac{a\,Sin.\,2\,\alpha}{b}\,Cos.\,\phi - Sin^2.\,\alpha = 0,$$

waaruit men vindt

$$Cos.\phi = \frac{a}{2b} . \left\{Sin.2\alpha \pm \sqrt{(Sin^2.2\alpha + \frac{4b^2}{a^2} Sin^2.\alpha)}\right\}.$$

Alzoo nu ϕ bekend is, vindt men de zijden AB en AC door de vergelijkingen

$$AB = b\frac{Cos.(\alpha + \phi)}{Sin.2\alpha} = a\frac{Cos.\phi}{Cos.(\alpha - \phi)},$$

en

$$AC = b\frac{Cos.(\alpha - \phi)}{Sin.2\alpha} = a\frac{Cos.\phi}{Cos.(\alpha + \phi)}.$$

II. OPLOSSING van C. BRUNINGS.

De gegevens door dezelfde letters als in de vorige oplossing voorstellende, en de onbekende zijden $AB = x$ en $AC = y$ stellende, hebben wij

$$Inh.\,drieh.\,ABD + Inh.\,drieh.\,ACD = Inh.\,drieh.\,BAC,$$

of

$$\tfrac{1}{2}a\,x\,Sin.\alpha + \tfrac{1}{2}a\,y\,Sin.\alpha = \tfrac{1}{2}x\,y\,Sin.2\alpha,$$

met 2 vermenigvuldigende en door $Sin.\alpha$ deelende, komt er

$$a(x+y) = 2\,x\,y\,Cos.\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1);$$

verder is $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB \times AC \times Cos.BAC$,

of

$$b^2 = x^2 + y^2 - 2\,x\,y\,Cos.2\alpha,$$

hierin $Cos.2\alpha = 2\,Cos^2.\alpha - 1$ substituerende, komt er

$$b^2 = (x+y)^2 - 4\,x\,y\,Cos^2.\alpha \quad . \; . \; . \; . \; (2);$$

trekken wij nu uit (1)

$$x + y = \frac{2\,x\,y\,Cos.\alpha}{a} \quad . \; . \; . \; . \; (3),$$

en brengen wij deze waarde voor $x + y$ in (2) over, dan verkrijgen wij de vergelijking

$$b^2 = \frac{4\,x^2y^2\,Cos^2.\alpha}{a^2} - 4\,x\,y\,Cos^2.\alpha,$$

welke men gemakkelijk herleidt tot

$$x^2y^2 - a^2\,x\,y = \frac{a^2b^2}{4\,Cos^2.\alpha}$$

en waaruit men vindt

$$x\,y = \frac{a}{2\,Cos.\alpha}\left\{a\,Cos.\alpha \pm \sqrt{(a^2\,Cos^2.\alpha + b^2)}\right\} \quad . \; (4),$$

deze waarde voor $x\,y$ in (3) overbrengende, verkrijgt men

$$x + y = a\,Cos.\alpha \pm \sqrt{(a^2\,Cos^2.\alpha + b^2)} \quad . \; . \; . \; (5);$$

de-

dewijl wij nu de som en het product der onbekende grootheden x en y gevonden hebben, kunnen wij kortheidshalve

$$x+y=p \quad \text{en} \quad xy=q$$

stellen, als wanneer x en y klaarblijkelijk de wortels zijn der vierkantsvergelijking

$$X^2-pX+q=0,$$

weshalve x en y en daardoor ook de geheele driehoek bekend is.

III. Oplossing van C. F. Julius.

Dewijl de hoek BAC midden door gedeeld is, heeft men de evenredigheid

$$AB : BD = AC : CD,$$

wij kunnen dus deze gelijke verhoudingen tot onbekende aannemen en stellen derhalve

$$\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CD}=z,$$

waaruit volgt

$$AB=z\times BD \quad \text{en} \quad AC=z\times CD,$$

terwijl wij voor de gegevens wederom dezelfde letters als in de voorgaande oplossingen gebruiken.

Nu is $BD^2=AB^2+AD^2-2\,AB\times AD\times Cos.\,\alpha,$

$CD^2=AC^2+AD^2-2\,AC\times AD\times Cos.\,\alpha,$

het verschil dezer vergelijkingen is

$$BD^2-CD^2=AB^2-AC^2-2(AB-AC)\times AD\times Cos.\,\alpha,$$

of, voor AB, AC en AD respectievelijk $z\times BD$, $z\times CD$ en a schrijvende,

$$BD^2-CD^2=z^2(BD^2-CD^2)-2(BD-CD)\,a\,z\,Cos.\,\alpha,$$

deze vergelijking door $BD-CD$ deelende, komt er

$$BD+CD=z^2(BD+CD)-2\,a\,z\,Cos.\,\alpha,$$

of, daar $BD+CD=b$ is,

$$b=z^2b-2\,a\,z\,Cos.\,\alpha,$$

wij hebben dus de vierkantsvergelijking

$$z^2-2\,\frac{a\,Cos.\,\alpha}{b}\,z=1,$$

waaruit gevonden wordt

$$z=\frac{a\,Cos.\,\alpha\pm\sqrt{(a^2\,Cos^2.\,\alpha+b^2)}}{b}.$$

Voorts is $\frac{Sin. ADC}{Sin. \alpha} = \frac{AC}{CD} = z$,

en dus $Sin. ADC = z\, Sin. \alpha$,

daar nu z bekend geworden is, is ook *hoek* ADC bekend, en hierdoor de geheele driehoek bepaald.

IV. Oplossing *van* D. Hoola van Nooten.

Voor de gegevens wederom alles als hierboven nemende, stellen wij $BD = \frac{1}{2}b - w$ en $CD = \frac{1}{2}b + w$, dan is uit den driehoek ABD

$$Sin. B = \frac{AD \times Sin. BAD}{BD} = \frac{a\, Sin. \alpha}{\frac{1}{2}b - w},$$

en uit den driehoek ACD

$$Sin. C = \frac{AD \times Sin. CAD}{CD} = \frac{a\, Sin. \alpha}{\frac{1}{2}b + w},$$

hieruit hebben wij ook

$$Cos. B = \frac{\sqrt{\{(\frac{1}{2}b - w)^2 - a^2\, Sin^2. \alpha\}}}{\frac{1}{2}b - w},$$

en $$Cos. C = \frac{\sqrt{\{(\frac{1}{2}b + w)^2 - a^2\, Sin^2. \alpha\}}}{\frac{1}{2}b + w};$$

maar nu is

$$Sin. (B + C) = Sin. BAC = Sin. 2\alpha,$$

of $$Sin. B\, Cos. C + Sin. C\, Cos. B = 2\, Sin. \alpha\, Cos. \alpha,$$

hierin bovenstaande waarden overbrengende, verkrijgen wij, na deeling door $Sin. \alpha$,

$$\frac{a\sqrt{\{(\frac{1}{2}b - w)^2 - a^2 Sin^2. \alpha\}} + a\sqrt{\{(\frac{1}{2}b + w)^2 - a^2 Sin^2. \alpha\}}}{\frac{1}{4}b^2 - w^2} = 2\, Cos. \alpha;$$

uit deze vergelijking kan men nu de onbekende w bepalen, daardoor worden dan ook de hoeken B en C en bij gevolg de geheele driehoek bekend.

Aanmerking *van* L. J. Ulman. Men zie omtrent dit voorstel J. de Gelder, *Meetk. Analysis*, § 321, alwaar ook eene fraaije constructie voor den begeerden driehoek gegeven wordt.

CCXXI. Voorstel.

Door H. A. Hartogh.

Eene rekenkunstige reeks van drie termen te vinden, waarvan de eerste term door 4, *de tweede door* 5 *en de derde door* 7 *deelbaar is?*

Op-

OPGELOST *door* H. A. HARTOGH, A. C. BELINFANTE, S. T. BOAS, C. J. BOLTEN, Mr. G. W. DE BRUIJN KOPS, S. DIK, CORNZ., M. H. GODEFROI, M. L. GOEDE, D. HOOLA VAN NOOTEN, B. DE JONGH, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, B. LUBBERS, C. VAN SCHAICK, M. G. SNOEK, J. S. SPEIJER, L. J. ULMAN *en* I. WARNSINCK.

OPLOSSING *van* H. A. HARTOGH.

Stellen wij voor den eersten term der reeks $4x$,
en voor den tweeden $5x+5y$,
dan is de derde $6x+10y$;
aan de voorwaarde, dat de eerste term door 4 en de tweede door 5 deelbaar moet zijn, is door deze stelling voldaan, en wij hebben nog slechts x en y zoodanig te bepalen, dat $6x+10y$ door 7 deelbaar worde;

stel hiertoe $6x+10y=7p$;

dan is $x=\frac{7p-10y}{6}=p-y+\frac{p-4y}{6}$;

stel verder $p-4y=6q$,

dan is $y=\frac{p-6q}{4}=-q+\frac{p-2q}{4}$;

stel weder $p-2q=4r$,

dan is $q=\frac{p-4r}{2}=-2r+\frac{p}{2}$;

stel eindelijk $\frac{p}{2}=s$,

dan is $p=2s$;

en nu verkrijgt men, door achtervolgende substitutiën,

$$q=s-2r,$$
$$y=3r-s,$$
$$x=4s-5r;$$

hierdoor wordt de gestelde reeks

$$16s-20r,\ 15s-10r,\ 14s,$$

waarin men voor s en r alle mogelijke getallen kan nemen, mits om de reeks in positieve getallen te vinden $16s>20r$ zij; bijv.

voor $s=1$ en $r=0$, is de reeks 16, 15 en 14;
voor $s=2$ en $r=1$, is dezelve 12, 20 en 28;
voor $s=3$ en $r=2$, is dezelve 8, 25 en 42; *enz.*

CCXXII. VOORSTEL.

Door J. BADON GHIJBEN.

Van drie masſieve punten A, B *en* C *zijn gegeven derzelver verſchillende gewigten, gelijk mede derzelver onderlinge afſtanden; men vraagt hoe ver hun zwaartepunt verwijderd is: 1°. van het middelpunt des cirkels, die door* A, B *en* C *gaat; en 2°. van het middelpunt eens bols van gegevenen ſtraal, waarvan het oppervlak door* A, B *en* C *gaat?*

OPGELOST *door* F. J. STAMKART. C. F. JULIUS, I. WARNSINCK, C. J. BOLTEN, D. HOOLA VAN NOOTEN, J. JONKHERT *en* L. J. ULMAN.

OPLOSSING *van* F. J. STAMKART.

Stellen wij de gewigten der drie punten A, B en C (*Fig.* 88) door die zelfde letters voor en laten de afſtanden $AB = c$, $AC = b$ en $BC = a$ gegeven zijn; zij voorts M het middelpunt van den cirkel, die door de punten A, B en C gaat, en r deszelfs ſtraal, dan is r eene bekende functie van a, b en c; men heeft namelijk

$$r = \frac{abc}{4\sqrt{(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)}}.$$

Om het zwaartepunt der drie punten A, B en C te vinden, deele men AB in D, zoodanig dat

$$AD : BD = B : A$$

is, men trekke vervolgens CD en deele deze weder in P derwijze, dat men heeft

$$DP : CP = C : A + B,$$

dan zal P het zwaartepunt der drie masſieve punten A, B en C zijn.

Om uit deze conſtructie de gevraagde lijn MP te berekenen, ſtellen wij kortheidshalve

$$AD = m,\ BD = n,\ DP = p \text{ en } CP = q,$$

dan zijn de bovenſtaande evenredigheden

$$m : n = B : A,$$

en

$$p : q = C : A + C,$$

uit dezelve vindt men gemakkelijk

$$m = \frac{B}{A+B}(m+n) = \frac{B}{A+B}c \quad \ldots \quad (1),$$

$n =$

$$n = \frac{A}{A+B}(m+n) = \frac{A}{A+B}c \quad \ldots \quad (2),$$

$$p = \frac{C}{A+B+C}(p+q) \quad \ldots \quad (3),$$

en $$q = \frac{A+B}{A+B+C}(p+q) \quad \ldots \quad (4).$$

Nu is, uit de driehoeken ADC en BDC,

$$AC^2 = CD^2 + AD^2 - 2\, CD \times AD \times Cos.\, ADC,$$

of $$b^2 = (p+q)^2 + m^2 - 2\,(p+q)\, m\, Cos.\, ADC,$$

en $$BC^2 = CD^2 + BD^2 + 2\, CD \times BD \times Cos.\, ADC,$$

of $$a^2 = (p+q)^2 + n^2 + 2\,(p+q)\, n\, Cos.\, ADC,$$

vermenigvuldigt men de eerste dezer vergelijkingen met n, de tweede met m, dan verkrijgt men voor hunne som

$$b^2 n + a^2 m = (m+n)(p+q)^2 + mn(m+n),$$

of $$b^2 n + a^2 m = c\,(p+q)^2 + cmn,$$

waaruit volgt

$$CD^2 = (p+q)^2 = \frac{a^2 m + b^2 n}{c} - mn \quad \ldots \quad (5);$$

trekken wij AM, BM en CM, dan vindt men op dezelfde wijze: uit de driehoeken ADM en BDM, daar $AM = BM = r$ is,

$$MD^2 = \frac{r^2 m + r^2 n}{c} - mn = r^2 - mn \quad \ldots \quad (6);$$

en uit de driehoeken MPD en MPC

$$MP^2 = \frac{p \times MC^2 + q \times MD^2}{p+q} - pq,$$

welke laatste vergelijking, daar $MC = r$ en $MD^2 = r^2 - mn$ gevonden is, terstond overgaat in

$$MP^2 = \frac{pr^2 + q(r^2 - mn)}{p+q} - pq = r^2 - \left\{pq + \frac{mnq}{p+q}\right\} \quad (7).$$

Het product der vergelijkingen (3) en (4) geeft

$$pq = \frac{(A+B)\,C}{(A+B+C)^2}(p+q)^2,$$

hierin voor $(p+q)^2$ de gevondene waardij (5) stellende, is

$$pq = \frac{(A+B)\,C}{(A+B+C)^2}\cdot\left\{\frac{a^2 m + b^2 n}{c} - mn\right\},$$

en nu voor m en n de waardijen (1) en (2) substituerende,

$pq =$

$$pq = \frac{(A+B)C}{(A+B+C)^2} \cdot \left\{ \frac{B}{A+B}a^2 + \frac{A}{A+B}b^2 - \frac{A \times B}{(A+B)^2}c^2 \right\},$$

of

$$pq = \frac{B \times C}{(A+B+C)^2}a^2 + \frac{A \times C}{(A+B+C)^2}b^2 - \frac{A \times B \times C}{(A+B+C)^2(A+B)}c^2 \quad . \; (8);$$

het product der vergelijkingen (1), (2) en (4) geeft voorts

$$mnq = \frac{A \times B \times (A+B)}{(A+B+C)(A+B)^2}(p+q)c^2,$$

waaruit volgt

$$\frac{mnq}{p+q} = \frac{A \times B}{(A+B+C)(A+B)}c^2 \quad . \; . \; . \; (9);$$

de vergelijkingen (8) en (9) bij elkander optellende, komt er na herleiding

$$pq + \frac{mnq}{p+q} = \frac{B \times C \times a^2 + A \times C \times b^2 + A \times B \times c^2}{(A+B+C)^2} \quad (10),$$

en dit alsnu in (7) overbrengende, verkrijgen wij eindelijk

$$MP^2 = r^2 - \frac{B.C.a^2 + A.C.b^2 + A.B.c^2}{(A+B+C)^2} \quad . \; (11),$$

waardoor de eerste der gevraagde afstanden bekend is.

De afstand van het zwaartepunt der drie punten tot het middelpunt van eenen bol, welks oppervlak door de drie punten gaat en welks straal R is, wordt nu ook gemakkelijk gevonden; want laat M′ (*Fig.* 89) het middelpunt van dezen bol zijn, dan is, M′M loodregt op het vlak ABC getrokken hebbende, M het middelpunt van den cirkel, die door A, B en C gaat, wij hebben dus

$$M'M^2 = M'B^2 - MB^2 = R^2 - r^2 \quad . \; . \; (12);$$

nu is ook $M'P^2 = M'M^2 + MP^2$,

en zoo wij hierin voor MP en M′M de waardijen (11) en (12) overbrengen, komt er

$$M'P^2 = R^2 - \frac{B.C.a^2 + A.C.b^2 + A.B.c^2}{(A+B+C)^2} \quad . \; (13),$$

waardoor ook de tweede der gevraagde afstanden in de gegevens is uitgedrukt.

Aanmerking. — Het behandelde voorstel is slechts een bijzonder geval van een veel algemeener, namelijk: *Gegeven zijnde de onderlinge afstanden van eenige massieve punten in de ruimte, als ook*

ook de afstanden van elk dezer punten tot een punt naar welgevallen gekozen, vraagt men naar den afstand van het laatstgenoemde punt tot het zwaartepunt van het stelsel massieve punten?

Laten, om dit algemeene voorstel op te lossen, A, B, C, D *enz.* de massieve punten, zoo wel als hunne gewigten voorstellen; zij P hun zwaartepunt en M het naar welgevallen gekozen punt, welks afstand tot P gevraagd wordt; noemen wij (a, b) de afstand tusschen A en B, (b, c) die tusschen B en C, (m, b) die tusschen M en B, *enz.* dan stelt (m, p) de gevraagde afstand voor; laten eindelijk, het punt M voor oorsprong der coördinaten aangenomen zijnde, x, y, z de coördinaten van A, x', y', z' die van B, *enz.* en X, Y, Z die van P zijn, dan is:

$$X(A+B+C+D+enz.)=Ax+Bx'+Cx''+Dx'''+enz.$$
$$Y(A+B+C+D+enz.)=Ay+By'+Cy''+Dy'''+enz.$$
$$Z(A+B+C+D+enz.)=Az+Bz'+Cz''+Dz'''+enz.$$

brengen wij deze vergelijkingen in het vierkant en nemen wij alsdan de som derzelve, zoo komt er, de termen behoorlijk rangschikkende,

$$(X^2+Y^2+Z^2)(A+B+C+D+enz.)^2=$$
$$=\left\{\begin{array}{r}A^2(x^2+y^2+z^2)+B^2(x'^2+y'^2+z'^2)+C^2(x''^2+y''^2+z''^2)+enz.\\ +2A.B.(xx'+yy'+zz')+2A.C.(xx''+yy''+zz'')+enz.\\ +2B.C.(x'x''+y'y''+z'z'')+enz.\end{array}\right\}.$$

Nu is klaarblijkelijk

$$X^2+Y^2+Z^2=(p,m)^2, x^2+y^2+z^2=(a,m)^2, x'^2+y'^2+z'^2=(b,m)^2, enz.$$

ook is

$$(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2=(a,b)^2,$$

of na herleiding

$$(x^2+y^2+z^2)+(x'^2+y'^2+z'^2)-2(xx'+yy'+zz')=(a,b)^2,$$

waaruit volgt

$$2(xx'+yy'+zz')=(a,m)^2+(b,m)^2-(a,b)^2;$$

even zoo heeft men

$$2(xx''+yy''+zz'')=(a,m)^2+(c,m)^2-(a,c)^2,$$
$$2(x'x''+y'y''+z'z'')=(b,m)^2+(c,m)^2-(b,c)^2,$$

enz.

deze waarden in onze vorige vergelijking overbrengende, vinden wij

$$(m,p)^2(A+B+C+D+enz.)^2=$$

(A²+

$$=\left\{\begin{array}{l}(A^2+A.B+A.C+A.D+enz.)(a,m)^2\\ +(B^2+B.A+B.C+B.D+enz.)(b,m)^2\\ +(C^2+C.A+C.B+C.D+enz.)(c,m)^2\\ +(D^2+D.A+D.B+D.C+enz.)(d,m)^2\\ +enz.\\ -\left\{\begin{array}{r}A.B(a,b)^2+A.C(a,c)^2+A.D(a,d)^2+enz.\\ +B.C(b,c)^2+B.D(b,d)^2+enz.\\ +C.D(c,d)^2+enz.\\ +enz.\end{array}\right\}\end{array}\right\};$$

dat is:

$$(m,p)^2(A+B+C+D+enz.)^2=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}(A+B+C+D+enz.)(A(a,m)^2+B(b,m)^2+C(c,m)^2+enz.)\\ -\left\{\begin{array}{r}A.B(a,b)^2+A.C(a,c)^2+A.D(a,d)^2+enz.\\ +B.C(b,c)^2+B.D(b,d)^2+enz.\\ +C.D(c,d)^2+enz.\\ +enz.\end{array}\right\}\end{array}\right\}(A).$$

Deze formule (A) bevat, als bijzondere gevallen, in zich de formulen (11) en (13); om dit te doen zien, laten wij vooreerst stellen dat de punten A, B, C, D *enz.* in het oppervlak van eenen bol gelegen zijn, waarvan R de straal en M het middelpunt is, dan zijn (a,m), (b,m), (c,m), *enz.* alle gelijk R; gevolgelijk

$$(m,p)^2(A+B+B+D+enz.)^2=$$

$$=(A+B+C+enz.)^2\times R^2-\left\{\begin{array}{r}A.B(a,b)^2+A.C(a,c)^2+enz.\\ +B.C(b,c)^2+enz.\\ +enz.\end{array}\right\},$$

waaruit volgt

$$(m,p)^2=R^2-\frac{A.B(a,b)^2+A.C(a,c)^2+enz.+B.C(b,c)^2+enz.}{(A+B+C+enz.)^2}\ (B);$$

waren er nu slechts drie punten, dan zoude men hebben

$$(m,p)^2=R^2-\frac{A.B(a.b)^2+A.C(a,c)^2+B.C(b,c)^2}{(A+B+C)^2},$$

hetwelk juist de formule (13) is, en ook (11), wanneer de punten A, B en C in eenen grooten cirkel liggen.

Uit deze formulen kunnen onderscheidene gevolgen afgeleid worden: hadden, bij voorbeeld, al de punten A, B, C *enz.* ge-

gelijke masſa's, en waren er n punten, dan konde (A) geſchreven worden onder den vorm

$$n^2 \times (m,p)^2 = n\left((a,m)^2 + (b,m)^2 + (c,m)^2 + (d,m)^2 + enz.\right) - \left\{\begin{aligned} &(a,b)^2 + (a,c)^2 + (a,d)^2 + enz. \\ &\quad + (b,c)^2 + (b,d)^2 + enz. \\ &\quad\quad + (c,d)^2 + enz. \\ &\quad\quad\quad + enz. \end{aligned}\right\};$$

lag daarenboven M in het zwaartepunt zelf, dan was $(m,p) = 0$ en men zoude hebben

$$n\left\{(a,p)^2 + (b,p)^2 + (c,p)^2 + enz.\right\} = \left\{\begin{aligned} &(a,b)^2 + (a,c)^2 + (a,d)^2 + enz. \\ &\quad + (b,c)^2 + (b,d)^2 + enz. \\ &\quad\quad + (c,d)^2 + enz. \\ &\quad\quad\quad + enz. \end{aligned}\right\};$$

derhalve: *Wanneer n masſieve punten alle een gelijk gewigt hebben, is n malen de ſom van de vierkanten hunner afſtanden tot hun zwaartepunt, gelijk aan de ſom van de vierkanten der afſtanden dezer punten, op alle mogelijke wijzen twee aan twee genomen.*

In eenen driehoek, bijv. *is drie malen de ſom van de vierkanten der afſtanden van het zwaartepunt des driehoeks tot de drie hoekpunten, gelijk aan de ſom van de vierkanten der drie zijden*; want in dit geval ſtemt het zwaartepunt der drie even veel gewigt hebbende hoekpunten, met het zwaartepunt des driehoeks overeen.

In een parallelogram, is viermalen de ſom der vierkanten van de halve diagonalen, gelijk aan de ſom der vierkanten van de vier zijden en van de twee diagonalen.

In iederen regelmatigen n-hoek, is n^2 malen het vierkant van den ſtraal des omgeſchreven cirkels, gelijk aan de ſom der vierkanten van de n zijden des veelhoeks en van al de diagonalen, welke in denzelven kunnen getrokken worden.

Kiezen wij nog een ander punt M′, op eenen afſtand (m',p) van het zwaartepunt P der punten A, B, C, D *enz.*, dan hebben wij insgelijks

$$(m',p)^2 (A + B + C + D + enz.)^2 =$$

$$= \left\{\begin{aligned} &(A+B+C+D+enz.)(A(a,m')^2 + B(b,m')^2 + C(c,m')^2 + enz.) \\ &- \left\{\begin{aligned} &A.B\,(a,b)^2 + A.C\,(a,c)^2 + A.D\,(a,d)^2 + enz. \\ &\quad + B.C\,(b,c)^2 + B.D\,(b,d)^2 + enz. \\ &\quad\quad + C.D\,(c,d)^2 + enz. \\ &\quad\quad\quad + enz. \end{aligned}\right\} \end{aligned}\right\};$$

hier-

hiervan de vergelijking (A) term voor term aftrekkende, komt er, na door (A + B + C + D + *enz.*) gedeeld te hebben,

$$((m',p)^2 - (m,p)^2)(A + B + C + D + \textit{enz.}) =$$
$$= A((a,m')^2 - (a,m)^2) + B((b,m')^2 - (b,m)^2) + \textit{enz.};$$

was nu $(m',p) = (m,p)$, dan had men

$$A(a,m)^2 + B(b,m)^2 + \textit{enz.} = A(a,m')^2 + B(b,m'^2) + \textit{enz.},$$

dat is: *Indien er in eenig ſtelſel van punten of in eenig ligchaam, punten op gelijke afſtanden van het zwaartepunt van het ſtelſel genomen worden, dan zal de ſom der producten, die men verkrijgt, door het gewigt van elk punt met het vierkant van deszelfs afſtand tot een der gekozene punten te vermenigvuldigen, een ſtandvastig getal zijn.*

Ook volgt nog uit de vergelijking (A), *dat de ſom der producten van het gewigt van elk punt, met het vierkant van deszelfs afſtand tot het zwaartepunt*, een minimum *is.*

CCXXIII. VOORSTEL.

Door J. BADON GHIJBEN.

Een bol ligt op een horizontaal vlak; in drie gegevene punten van deszelfs oppervlak hangen drie gegevene gewigten; men vraagt de ſtand van dezen bol te vinden, opdat er evenwigt plaats hebbe?

OPGELOST *door* F. J. STAMKART, C. F. JULIUS, C. J. BOLTEN, I. WARNSINCK, L. J. ULMAN *en* J. JONKHERT.

OPLOSSING *van* F. J. STAMKART.

Het is klaar, dat, wanneer er evenwigt beſtaat, de bol zoodanig zal moeten liggen, dat het zwaartepunt der drie punten en het middelpunt des bols zich in ééne zelfde verticale lijn bevinden. Dit evenwigt zal voorts *los* of *vast* zijn, naar mate het zwaartepunt zich *boven* of *beneden* het middelpunt des bols bevindt.

Het punt van aanraking met het horizontale vlak zal dus eene der uiteinden zijn, van de middellijn, die door het zwaartepunt gaat; en de ſtand van den bol, bij het evenwigt, zal gevonden zijn, wanneer men de ſtelling van een der beide mogelijke aanrakingspunten, met betrekking tot de drie gegevene punten, kan aanwijzen. Hiertoe vinden wij, in de oploſsing van het voorgaande voorſtel, den weg gebaand.

Zij M (*Fig.* 90) het middelpunt des bols, P het zwaartepunt van

van n masſieve punten A, B, C, D, *enz.* op het oppervlak des bols verſpreid (*), A een dezer punten, Q en Q′ de mogelijke raakpunten en ſtellen wij den onbekenden hoek AMQ $=\alpha$.

Wanneer wij dan ter bekorting nemen

$$A.B(a,b)^2+A.C(a,c)^2+\textit{enz.}+B.C(b,c)^2+\textit{enz.}=\Sigma A.B(a,b)^2,$$
$$A+B+C+D+\textit{enz.}=\Sigma A,$$

hebben wij, volgens de formule (B) uit de voorgaande oplosſing,

$$(m,p)^2=R^2-\frac{\Sigma A.B(a,b)^2}{(\Sigma A)^2};$$

en volgens de formule (A) is, indien wij voor M het punt A zelf kiezen, waardoor in die formule $(a,m)=0$ wordt en (m,p), (b,m), (c,m), *enz.* reſpectievelijk in (a,p), (a,b), (a,c), *enz.* overgaan

$$(a,p)^2(\Sigma A)^2=(\Sigma A)\{B(a,b)^2+C(a,c)^2+\textit{enz.}\}-\Sigma A.B(a,b)^2,$$

waaruit volgt

$$(a,p)^2=\frac{B(a,b)^2+C(a,c)^2+\textit{enz.}}{\Sigma A}-\frac{\Sigma A.B(a,b)^2}{(\Sigma A)^2};$$

daar men nu uit den driehoek AMP heeft

$$Cos.\,AMP=\frac{AM^2+MP^2-AP^2}{2AM\times MP},$$

dat is:

$$Cos.\,\alpha=\frac{R^2+(m,p)^2-(a,p)^2}{2R(m,p)},$$

zoo vinden wij, door hierin voor (m,p) en (a,p) bovenſtaande waardijen te ſubſtitueren, na herleiding

$$Cos.\,\alpha=\frac{2R^2(\Sigma A)-\{B(a,b)^2+C(a,c)^2+\textit{enz.}\}}{2R\sqrt{\{R^2(\Sigma A)^2-\Sigma A.B(a,b)^2\}}}\quad.\ (I).$$

Deze formule bepaalt de grootte van den hoek α, zoo wel als van de andere hoeken, die de lijn MQ met de ſtralen, naar de punten B, C, D, *enz.* getrokken, maakt; want om de Coſinus van een' dier andere hoeken, bijv. van den hoek, dien de ſtraal van het punt B met MQ maakt, te vinden, behoeft men in den tweeden term des tellers van de formule (I), ſlechts A voor B, a voor b, en omgekeerd te ſchrijven. Door de formule (I) is al-

(*) Wij nemen hier n punten, omdat de oplosſing van dit algemeenere geval, na de behandeling van het voorgaande Voorſtel, niet moeijelijker is, dan wanneer wij ſlechts drie punten genomen hadden.

alzoo de plaats van Q en ook van Q′ op den bol bepaald en bijgevolg het voorstel opgelost. Wij kunnen echter aan de vergelijking (I) eene andere en meer geschikte gedaante geven. Laat namelijk het getal graden der bogen, die over den bol van het punt A tot B, van A tot C, van B tot C, enz. loopen door (a, b), (a, c), (b, c), enz. worden voorgesteld, dan is klaarblijkelijk

$$(a, b) = R \textit{ koorde } (a, b) = 2 R \, Sin. \tfrac{1}{2}(a, b)$$

en dus

$$(a, b)^2 = 4 R^2 \, Sin^2. \tfrac{1}{2}(a, b) = 2 R^2 - 2 R^2 \, Cos. (a, b),$$

even zoo is

$$(a, c)^2 = 2 R^2 - 2 R^2 \, Cos. (a, c), \text{ enz. hierdoor wordt}$$

$$Cos. \alpha = \frac{2 R^2 \Sigma A - 2 R^2 (B + C + D + enz.) + 2 R^2 \{ B \, Cos. (a, b) + C \, Cos. (a, c) + D \, Cos. (a, d) + enz. \}}{2 R \sqrt{\{ R^2 (\Sigma A)^2 - 2 R^2 \Sigma A . B + 2 R^2 \Sigma A . B \, Cos. (a, b) \}}},$$

$$= \frac{\Sigma A - (B + C + D + enz.) + \{ B \, Cos. (a, b) + C \, Cos. (a, c) + D \, Cos. (a, d) + enz. \}}{\sqrt{\{ (A + B + C + enz.)^2 - (2 A . B + 2 A . C + 2 B . C + enz.) + 2 \Sigma A . B \, Cos. (a, b) \}}},$$

$$= \frac{A + B \, Cos. (a, b) + C \, Cos. (a, c) + D \, Cos. (a, d) + enz.}{\sqrt{\{ A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + enz. + 2 \Sigma A . B \, Cos. (a, b) \}}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (II).$$

Waren er slechts drie punten, dan zoude men hebben

$$Cos. \alpha = \frac{A + B \, Cos. (a, b) + C \, Cos. (a, c)}{\sqrt{\{ A^2 + B^2 + C^2 + 2 A . B \, Cos. (a, b) + 2 A . C \, Cos. (a, c) + 2 B . C \, Cos. (b, c) \}}},$$

$$Cos. \beta = \frac{B + A \, Cos. (b, a) + C \, Cos. (b, c)}{\sqrt{\{ A^2 + B^2 + C^2 + 2 A . B \, Cos. (a, b) + 2 A . C \, Cos. (a, c) + 2 B . C \, Cos. (b, c) \}}},$$

$$Cos. \gamma = \frac{C + A \, Cos. (c, a) + B \, Cos. (c, b)}{\sqrt{\{ A^2 + B^2 + C^2 + 2 A . B \, Cos. (a, b) + 2 A . C \, Cos. (a, c) + 2 B . C \, Cos. (b, c) \}}};$$

zijnde β en γ de hoeken, die MQ met de stralen, naar de punten B en C gaande, maakt.

Hadden de drie massieve punten evenveel gewigt, dan was

$$Cos.\,\alpha = \frac{1 + Cos.\,(a,b) + Cos.\,(a,c)}{\sqrt{\{3 + 2\,Cos.\,(a,b) + 2\,Cos.\,(a,c) + 2\,Cos.\,(b,c)\}}},$$

$$Cos.\,\beta = \frac{1 + Cos.\,(b,a) + Cos.\,(b,c)}{\sqrt{\{3 + 2\,Cos.\,(a,b) + 2\,Cos.\,(a,c) + 2\,Cos.\,(b,c)\}}},$$

$$Cos.\,\gamma = \frac{1 + Cos.\,(c,a) + Cos.\,(c,b)}{\sqrt{\{3 + 2\,Cos.\,(a,b) + 2\,Cos.\,(a,c) + 2\,Cos.\,(b,c)\}}};$$

en als nog $(a,b) = (a,c) = (b,c) = \mu$ was, dan zoude men hebben

$$Cos.\,\alpha = Cos.\,\beta = Cos.\,\gamma = \sqrt{\frac{1 + 2\,Cos.\,\mu}{3}}.$$

Hadden de drie massieve punten ongelijke gewigten, maar waren (a,b), (a,c), (b,c) alle 90°, dan had men

$$Cos.\,\alpha = \frac{A}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}},$$

$$Cos.\,\beta = \frac{B}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}},$$

$$Cos.\,\gamma = \frac{C}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}}.$$

Uit de gevondene formulen, voor het geval dat er slechts drie punten zijn, volgt nog:

$$A\,Cos.\,\alpha + B\,Cos.\,\beta + C\,Cos.\,\gamma =$$
$$= \sqrt{\{A^2 + B^2 + C^2 + 2A.B\,Cos.(a,b) + 2A.C\,Cos.(a,c) + 2B.C\,Cos.(b,c)\}};$$

en het is ligtelijk in te zien, dat voor meerdere punten in het algemeen

$$A\,Cos.\,\alpha + B\,Cos.\,\beta + C\,Cos.\,\gamma + D\,Cos.\,\vartheta + enz. =$$
$$= \sqrt{\{A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + enz. + 2\,\Sigma A\,.\,B\,Cos.\,(a,b)\}}$$

zijn zal, zoodat wij de formule (II) ook aldus kunnen schrijven

$$Cos.\,\alpha = \frac{A + B\,Cos.(a,b) + C\,Cos.\,(a,c) + D\,Cos.\,(a,d) + enz.}{A\,Cos.\,\alpha + B\,Cos.\,\beta + C\,Cos.\,\gamma + D\,Cos.\,\vartheta + enz.} \quad \text{(III)}.$$

Nemen wij nu voor een oogenblik aan, dat de gewigten A, B, C enz. vervangen worden door krachten van gelijk vermogen, doch die, in stede van loodregt naar beneden, elk in de rigting MA, MB, MC, enz. van het middelpunt naar het oppervlak,

op den bol hun vermogen uitoefenen, dan is $A\,Cos.\alpha + B\,Cos.\beta + C\,Cos.\gamma + D\,Cos.\vartheta + enz.$, de som dezer volgens de lijn MQ ontwikkelde krachten; *deze som zal gelijk zijn aan de zamengestelde kracht van al de krachten* A, B, C, D, *enz.*; *en de lijn* MQ *zal ook de rigting dezer zamengestelde kracht aanwijzen.*

Om dit te bewijzen behoeven wij slechts aan te toonen, dat, wanneer de krachten A, B, C, D, *enz.* ontwikkeld worden, volgens eene willekeurige loodlijn MR, op MQ uit M opgerigt, de som dezer ontwikkelde krachten gelijk nul zal zijn; dit nu volgt gemakkelijk uit de vergelijking (III), want, stellende dat er, behalve de punten A, B, C, D, *enz.* nog een punt R op 90° afstands van Q gelegen ware, van eene massa gelijk nul, dan is het klaar, dat hierdoor de plaats van Q niet veranderen kan, en dat men dan volgens (III) zoude hebben

$$Cos.RMQ = \frac{R + A\,Cos.(a,r) + B\,Cos.(b,r) + C\,Cos.(c,r) + enz.}{R\,Cos.RMQ + A\,Cos.\alpha + B\,Cos.\beta + C\,Cos.\gamma + enz.},$$

daar nu hierin $Cos.RMQ = Cos.90° = 0$ en $R = 0$ genomen is, heeft men gevolgelijk

$$A\,Cos.(a,r) + B\,Cos.(b,r) + C\,Cos.(c,r) + enz. = 0;$$

en dus zal ook de som der krachten A, B, C, *enz.* werkende in de rigtingen MA, MB, MC, *enz.* en elk ontwikkeld volgens de lijn MR gelijk nul zijn.

Wanneer derhalve *een bol, waarvan het oppervlak, in verschillende punten, met verschillende gewigten bezwaard is, op een horizontaal vlak in rust ligt, en in elk der punten, waaraan die gewigten hangen, in plaats van die gewigten, krachten evenredig aan dezelve en regthoekig op het oppervlak werkende aangebragt worden, dan zal daardoor de rust van den bol niet verstoord worden.* De druk echter, die het horizontale vlak in beide gevallen ondervindt, is niet dezelfde, want, als de gewigten hangen, is die druk $A + B + C + D$ *enz.*, en, wanneer de krachten regthoekig op het oppervlak werken, dan is dezelve $A\,Cos.\alpha + B\,Cos.\beta + C\,Cos.\gamma + D\,Cos.\vartheta + enz.$ en dus in het laatste geval kleiner dan in het eerste.

In het geval van drie punten, is het gemakkelijk te zien, dat de gemeenschappelijke noemer der waarden voor $Cos.\alpha$, $Cos.\beta$ en $Cos.\gamma$ gevonden; den diagonaal van een parallelopipedum voorstelt, waar-

waarvan A, B en C de ribben en (a,b), (a,c) en (b,c) de drie hoeken zijn, waaronder die drie ribben aan de uiteinden des bedoelden diagonaal te zamen komen; en even gemakkelijk ziet men, dat α, β en γ de drie hoeken zijn, die de diagonaal met de ribben A, B en C van het parallelopipedum maakt. Hieruit volgt een gemakkelijk middel, om, op den bol zelf, het punt Q door teekening te vinden; bijv. in het geval van drie punten.

Laten namelijk A, B en C (*Fig.* 91) de drie punten op den bol voorstellen, dan beschrijve men met den straal des bols eenen cirkel (*Fig.* 92) en passe daarop eenen boog *a b* (*Fig.* 92) = AB (*Fig.* 91) af; daarna neme men, op de stralen M*a* en M*b* (*Fig.* 92), de lijnen MA en MB evenredig aan de gewigten A en B, voltooije het parallelogram onder de zijden MA en MB en trekke den diagonaal MN, die den boog *a b* in *d* snijdt; nu past men op den bol AD (*Fig.* 91) = *a d* (*Fig.* 92) of BD (*Fig.* 91) = *b d* (*Fig.* 92) af, en trekke (*Fig.* 91) den *boog* CD; verder neme men *c d* (*Fig.* 92) = CD (*Fig.* 91) en op den straal M*c* (*Fig.* 92) de lijn MC evenredig aan het gewigt C genomen hebbende, make men een parallelogram onder de zijden MN en MC, en trekke den diagonaal MO, welke den boog *cd* in *q* snijdt; eindelijk passe men weder op den bol CQ (*Fig.* 91) = *cq* (*Fig.* 92), of DQ (*Fig.* 91) = *d q* (*Fig.* 92) af, dan zal Q het gevraagde punt zijn, waarop de bol in rust kan liggen.

Ingeval er meerdere punten zijn, kan men op dezelfde wijze voortgaan.

CCXXIV. VOORSTEL.

Door J. BADON GHIJBEN.

Men vraagt eenen cirkel te beschrijven, die door twee gegeven punten gaat en een gegeven cirkel aanraakt?

OPGELOST *door* C. J. BOLTEN, I. WARNSINCK, L. J. ULMAN *en* C. F. JULIUS.

I. OPLOSSING *van* C. J. BOLTEN.

Laten P en Q (*Fig.* 93) de twee gegevene punten en MNOR de gegeven cirkel zijn; vereenigende dan P en Q door eene regte lijn en trekkende XY loodregt door het midden van PQ, zoo zal het middelpunt van den gevraagden cirkel ergens in deze lijn

XY moeten gelegen zijn. Indien dan V dat punt is, zal, wanneer VP en VM getrokken is,

VM — VP = MR

moeten zijn; M en P kunnen dus als de brandpunten van eene hyperbool beschouwd worden, waarvan de eerste as gelijk MR is; deze hyperbool beschrijvende, zullen derhalve de punten V en V', alwaar deszelfs takken de lijn XY snijden, de middelpunten zijn van twee cirkels, die door de punten P en Q gaan en die den gegeven cirkel raken.

Aanmerkingen. 1°. Daar eene regte lijn en eene hyperbool elkander slechts in twee punten kunnen snijden, kunnen er niet meer dan twee cirkels bestaan, die aan het voorstel voldoen.

2°. Het voorstel is altijd mogelijk, uitgezonderd in het geval dat een der gegevene punten binnen en het andere buiten den gegeven cirkel ligt.

3°. Het voorstel heeft altijd twee oplossingen, of liever er zijn altijd twee cirkels, die aan hetzelve voldoen, uitgezonderd het geval dat een der punten in den omtrek van den gegevenen cirkel ligt, als wanneer er maar een cirkel aan het voorstel voldoet.

4°. Wanneer de lijn die door de twee punten P en Q gaat, tevens raaklijn aan den gegevenen cirkel is, blijven er nog wel twee antwoorden, die het voorstel oplossen, doch de eene cirkel verkrijgt alsdan een oneindig groote straal, of gaat over in eene regte lijn.

5°. Wanneer men, in het geval dat beide de gegevene punten buiten den gegevenen cirkel liggen, uit het verst verwijderde punt raaklijnen aan den gegevenen cirkel trekt, zoo zullen, indien het andere punt tusschen die beide raaklijnen ligt, de beide cirkels, die aan het voorstel voldoen, den gegevenen cirkel uitwendig raken; doch ligt het andere punt buiten die raaklijnen, dan zal de gegevene cirkel door een der begeerde cirkels uitwendig en door den anderen inwendig geraakt worden.

Alle welke bijzonderheden, bij de constructie van die gevallen, van zelfs in het oog vallen.

II. Oplossing van L. Wassinck.

Laat M (*Fig.* 94) het middelpunt van den gegevenen cirkel

en A en B de gegevene punten zijn, dan moet, indien wij op het midden van AB de loodlijn CD oprigten, het middelpunt van den gevraagden cirkel ergens in die loodlijn liggen. M′ verbeelde dit middelpunt, dan zal het punt E, waar de lijn die de punten M en M′ vereenigt, den gegeven cirkel-omtrek snijdt, het raakpunt en dus $AM' = EM'$ de straal van den gevraagden cirkel moeten zijn. Trekken wij nu uit M eene lijn MD evenwijdig met AB, of, wat hetzelfde is, loodregt op CD, nemen wij als gegevens aan $AB = 2a$, of $AC = BC = a$, $MD = b$, $CD = c$, $ME = r$ en stellen wij den onbekenden straal van den gevraagden cirkel $AM' = EM' = R$, dan is

$$MM' = R + r,$$

$$M'D = \sqrt{(MM'^2 - MD^2)} = \sqrt{\{(R+r)^2 - b^2\}},$$

$$M'C = \sqrt{(AM'^2 - AC^2)} = \sqrt{(R^2 - a^2)},$$

en dus, omdat $M'D + M'C = CD = c$ is,

$$c = \sqrt{\{(R+r)^2 - b^2\}} + \sqrt{(R^2 - a^2)};$$

om uit deze vergelijking R op te lossen, brengen wij dezelve in het vierkant, hetwelk geeft

$$c^2 = (R+r)^2 - b^2 + R^2 - a^2 + 2\sqrt{\{(R^2-a^2)((R+r)^2-b^2)\}},$$

hieruit de wortelgrootheid afzonderende, vindt men

$$2\sqrt{\{(R^2-a^2)((R+r)^2-b^2)\}} = (a^2+b^2+c^2-r^2) - 2R(R+r),$$

en brengt men nu deze vergelijking nogmaals in het vierkant, dan zal men na behoorlijke herleiding, de termen volgens de magten van R rangschikkende, vinden

$$R^2 - R\,r\,\frac{a^2-b^2-c^2+r^2}{c^2-r^2} = \frac{(a^2-b^2-c^2+r^2)^2 + 4a^2c^2}{4(c^2-r^2)},$$

uit welke vierkantsvergelijking men verkrijgt

$$R = \frac{r(a^2-b^2-c^2+r^2)}{2(c^2-r^2)}$$

$$\pm\sqrt{\left\{\frac{r^2(a^2-b^2-c^2+r^2)^2}{4(c^2-r^2)^2} + \frac{(a^2-b^2-c^2+r^2)^2+4a^2c^2}{4(c^2-r^2)}\right\}},$$

hetwelk gemakkelijk herleid wordt tot

$$R = \frac{r(a^2-b^2-c^2+r^2) \pm c\sqrt{\{(a^2-b^2-c^2+r^2)^2+4a^2(c^2-r^2)\}}}{2(c^2-r^2)};$$

hierdoor de straal van den begeerden cirkel bekend wordende, is het voorstel *Stelkunstig* opgelost; en uit de dubbelde waarde voor

R. gevonden blijkt dat er twee cirkels aan het voorstel voldoen zullen.

Aanmerking *van* L. J. Ulman. *Meetkunstige* constructiën van dit voorstel vindt men in de *Meetkunstige Analysis*, § 329, en in het *Mengelwerk van Verhandelingen des Genootschaps*, 2e deel, bladz. 72.

CCXXV. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

Wanneer twee standvastige hoeken PAQ *en* PBQ *om derzelver hoekpunten* A *en* B *zoodanig draaijen, dat het snijpunt* Q *der beenen* AQ *en* BQ *eene regte lijn beschrijft, verlangt men de meetkunstige plaats te bepalen van het snijpunt* P *der beenen* AP *en* BP?

Opgelost *door* J. Badon Ghijben.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Laten A en B (*Fig.* 95) de hoekpunten der hoeken PAQ en en PBQ zijn, en zij OQ de regte lijn, die gedurende de beweging dier hoeken door het snijpunt Q beschreven wordt; nemen wij dan eene lijn door A en B getrokken als as der abscissen aan, en, als oorsprong het punt O, waar die as door de lijn OQ gesneden wordt, dan zijn gegeven

$$OA = a,\ OB = a',\ Tang.\,PAQ = p,\ Tang.\,PBQ = q,$$

terwijl verder de vergelijking der lijn OQ, waarvoor wij

$$y = mx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

stellen, bekend is.

De lijn AQ door een punt gaande, waarvan $x = a$ en $y = 0$ de coördinaten zijn, zoo kunnen wij derzelver vergelijking door $y = \alpha(x - a)$ voorstellen, waarin α eene onbepaalde coëfficient is; op gelijke wijze vergelijkingen voor de lijnen BQ, AP en BP opmakende, hebben wij

voor de vergelijking van AQ, $y = \alpha(x - a)$. (2),

» » » » BQ, $y = \alpha'(x - a')$. (3),

» » » » AP, $y = \alpha''(x - a)$. (4),

» » » » BP, $y = \alpha'''(x - a')$. (5);

voor de coördinaten van het snijpunt Q der lijnen AQ en BQ, vinden wij uit (2) en (3)

$$x = \frac{\alpha' a' - \alpha a}{\alpha' - \alpha} \quad \text{en} \quad y = \frac{\alpha\alpha'(a' - a)}{\alpha' - \alpha} \quad \ldots \quad (6);$$

de-

deze coördinaten moeten voldoen aan de vergelijking (1), dus is

$$\frac{aa'(\alpha'-\alpha)}{a'-a}=m\frac{a'a'-aa}{a'-a},$$

waaruit volgt

$$\frac{a'}{a}-\frac{a}{a'}=\frac{\alpha'-\alpha}{m} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7);$$

voorts hebben wij, de trigonometrische tangens van den hoek, waaronder twee lijnen elkander snijden, uitdrukkende in de coëfficienten, die x in de vergelijkingen dier lijnen heeft:

$$\left.\begin{array}{l} \text{uit (2) en (4), } \mathit{Tang.}\,\mathrm{PAQ}=\dfrac{a-a''}{1+aa''}=p \\ \text{en uit (3) en (5), } \mathit{Tang.}\,\mathrm{PBQ}=\dfrac{a'''-a'}{1+a'a'''}=q \end{array}\right\} \quad . \; . \; (8);$$

wordende uit de beide laatste vergelijkingen gemakkelijk gevonden

$$a''=\frac{a-p}{1+ap} \text{ en } a'''=\frac{a'+q}{1-a'q} \quad . \; . \; . \; (9).$$

Laten nu u en t de coördinaten zijn van het punt P, welks meetkunstige plaats gevraagd wordt, dan moeten deze coördinaten, omdat P een punt van de lijnen AP en BP is, voldoen aan de vergelijkingen (4) en (5), waardoor wij hebben

$$t=a''(u-\alpha) \text{ en } t=a'''(u-\alpha'),$$

of, voor a'' en a''' hunne waarden (9) stellende,

$$t=\frac{(a-p)(u-\alpha)}{1+ap} \text{ en } t=\frac{(a'+q)(u-\alpha')}{1-a'q} \quad . \; (10);$$

uit deze beide vergelijkingen a en a' oplossende, vindt men

$$a=\frac{t+p(u-\alpha)}{u-\alpha-pt} \text{ en } a'=\frac{t-q(u-\alpha')}{u-\alpha'+qt} \quad . \; . \; (11),$$

en brengen wij nu deze waarden in (7) over, dan komt er

$$\frac{a'(u-\alpha-pt)}{(u-\alpha)p+t}+\frac{a(u-\alpha'+qt)}{(u-\alpha')q-t}=\frac{\alpha'-\alpha}{m} \quad . \; (12);$$

deze vergelijking, die de bedoelde meetkunstige plaats aanduidt, van den tweeden graad zijnde, toont aan, dat de snijpunten P in eene kegelsnede liggen.

Aanmerkingen. 1°. Indien de lijn OQ, altijd door O gaande, loodregt op AB was, zou men in de vergelijking (12) $m=\infty$ moeten stellen, als wanneer dezelve overgaat in

$$\frac{(u-a-pt)(uq-a'q-t)}{(u-a'+qt)(up-ap+t)}=-\frac{a}{a'} \quad . \quad . \quad (13).$$

2°. Indien, altijd het punt O voor oorsprong behoudende, OQ evenwijdig met AB was, zoude wel $m=0$ zijn, maar het nemen van $m=0$ in de vergelijking (12) zoude niet voldoende zijn, ter bepaling van de gezochte meetkunstige plaats voor dat geval; men zoude alsdan namelijk voor de vergelijking van OQ $y=c$ hebben, en deze vorm is in de gestelde vergelijking $y=mx$ niet begrepen. Voor dit geval moeten de gevondene coördinaten (6) voldoen aan de vergelijking $y=c$, hetwelk geeft

$$\frac{aa'(a'-a)}{a'-a}=c$$

of

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a'}=\frac{a'-a}{c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7'),$$

zoodat wij, hierin de waarden (11) overbrengende, alsdan hebben

$$\frac{u-a-pt}{(u-a)p+t}+\frac{u-a'+qt}{(u-a')q-t}=\frac{a'-a}{c} \quad . \quad . \quad (14).$$

3°. Waren de hoeken PAQ en PBQ beide regt, dan zoude men hebben $p=q=\infty$; schrijven wij de vergelijking (12) in de gedaante

$$\frac{\frac{u-a}{p}-t}{u-a+\frac{t}{p}}a'+\frac{\frac{u-a'}{q}+t}{u-a'-\frac{t}{q}}a=\frac{a'-a}{m},$$

dan is het klaar, dat dezelve voor $p=q=\infty$ overgaat in

$$\frac{at}{u-a'}-\frac{a't}{u-a}=\frac{a'-a}{m};$$

brengen wij in het eerste lid dezer vergelijking de breuken onder denzelfden noemer, dan wordt dezelve door $a'-a$ deelbaar, waardoor wij vinden

$$t(a'+a-u)=\frac{(u-a)(u-a')}{m} \quad . \quad . \quad . \quad (15);$$

en daar in deze vergelijking geen t^2 maar wel tu voorkomt, behoort dezelve altijd tot eene hyperbool.

Waren niet alleen de hoeken PAQ en PBQ regt, maar stond nog bovendien de lijn OQ loodregt op AB, dan zou men in

(15)

(15) $m = \infty$ moeten nemen; waardoor men, omdat $t = 0$ klaarblijkelijk niet voldoen kan, zou verkrijgen

$$u = a + a' \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (16);$$

zoodat in dit geval de gevraagde meetkunstige plaats eene regte lijn zou wezen, mede loodregt op AB staande, en AB in een punt C zoodanig snijdende, dat OA = BC is.

4°. Indien de lijn OQ niet willekeurig aangenomen, maar zoodanig bepaald wordt, dat zij gaan moet door het punt Q′, waarin AQ en BQ elkander snijden, op het oogenblik dat AP en BP langs AB vallen, dan hebben wij, omdat

$$Tang.\ BAQ' = Tang.\ PAQ = p\,,$$

en
$$Tang.\ ABQ' = Tang.\ PBQ = q$$

is, voor de vergelijkingen van AQ′, $y = p\,(x - a)$,

„ „ „ „ BQ′, $y = -q\,(x - a')$,

en bij gevolg voor de coördinaten van het punt Q′

$$x = \frac{pa + qa'}{p + q} \quad \text{en} \quad y = \frac{pq\,(a' - a)}{p + q} \; . \; . \; (6''),$$

deze coördinaten zouden nu aan de vergelijking $y = mx$, moeten voldoen, waardoor wij zouden hebben

$$\frac{pq\,(a' - a)}{p + q} = m\,\frac{pa + qa'}{p + q}$$

of
$$\frac{a'}{p} + \frac{a}{q} = \frac{a' - a}{m} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7'');$$

voor dit geval moet dus tusschen de standvastigen der vergelijking (12) de betrekking van afhankelijkheid bestaan, in de vergelijking (7″) uitgedrukt.

Wij brengen derhalve (7″) in (12) over, dan verkrijgen wij

$$\frac{a'(u - a - pt)}{(u - a)p + t} + \frac{a(u - a' + qt)}{(u - a')q - t} = \frac{a'}{p} + \frac{a}{q},$$

maar schrijven wij deze vergelijking aldus:

$$a\left\{\frac{u - a' + qt}{(u - a')q - t} - \frac{1}{q}\right\} = a'\left\{\frac{1}{p} - \frac{u - a - pt}{(u - a)p + t}\right\},$$

en vereenigen wij de breuken in elk der beide leden voorkomende, dan is de komende vergelijking

$$\frac{a}{q} \cdot \frac{q^2 t + t}{(u - a')q - t} = \frac{a'}{p} \cdot \frac{p^2 t + t}{(u - a)p + t}$$

door

door t deelbaar; laten wij dus den factor t weg en keeren wij tevens de breuken om, dan komt er

$$\frac{q}{a}.\frac{(u-a')q-t}{q^2+1}=\frac{p}{a'}.\frac{(u-a)p+t}{p^2+1} \quad . \; . \; (17);$$

deze vergelijking, van den eersten graad zijnde, toont aan, dat in dit geval de gevraagde meetkunstige plaats eene regte lijn zijn zal.

Waren nu nog bovendien de hoeken PAQ en PBQ even groot en dus $p=q=n$, dan zou de vergelijking (17) geven

$$\frac{(u-a')n-t}{a}=\frac{(u-a)n+t}{a'},$$

waaruit gevonden wordt

$$t=\frac{n(a'-a)}{a'+a}u-n(a'-a) \quad . \; . \; . \; (18);$$

in dit geval is dus de gevraagde meetkunstige plaats eene regte lijn, die vooreerst, omdat $p=q=n$ nemende uit (7') volgt $m=\frac{n(a'-a)}{a'+a}$, evenwijdig met OQ' is en die ten andere, omdat in (18) $t=0$ nemende $u=a+a'$ gevonden wordt, door het punt C gaat.

CCXXVI. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Vijf geheele getallen te vinden, die de volgende eigenschappen hebben: de drie eerste, zoowel als de drie laatste, vormen eene meetkunstige reeks; de drie middelste maken eene rekenkunstige reeks uit; en de som van het eerste en vijfde, zoo wel als de som van het tweede en vierde getal, zijn volkomen vierkanten?

OPGELOST *door* L. J. ULMAN, J. BASSAN, C. BRUNINGS, C. F. JULIUS, S. T. BOAS, MR. G. W. DE BRUIJN KOPS, S. DIK, CORNZ., D. VAN LANKEREN MATTHES, B. LUBBERS, M. G. SNOER, I. WARNSINCK, J. J. GASTMAN, D. HOOLA VAN NOOTEN *en* C. VAN SCHAICK.

OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

Daar het tweede, derde en vierde getal eene rekenkunstige reeks moeten uitmaken, zoo moet de som van het tweede en vierde gelijk zijn aan tweemaal het derde; deze som moet echter een vierkant zijn, derhalve moet het derde getal de helft van een

een vierkant wezen en wij kunnen alzoo dit derde getal door $2x^2$ voorstellen. Stellen wij nu

voor de drie eerste getallen $2p^2$, $2px$, $2x^2$;

en voor de drie laatste $2x^2$, $2qx$, $2q^2$;

zoo vormen deze twee drietallen ieder eene meetkunstige reeks, zoodat de vijf getallen

$$2p^2,\ 2px,\ 2x^2,\ 2qx,\ 2q^2,$$

nu nog slechts moeten voldoen aan de voorwaarden, dat

$$2px+2qx=4x^2$$

is, en $2p^2+2q^2=$ *een vierkant*.

De eerste dezer vergelijkingen geeft terstond

$$x=\tfrac{1}{2}(p+q),$$

en er blijft dus nog over, om p en q zoodanig te bepalen, dat het dubbeld van de som van derzelver vierkanten weder een vierkant zij. Daar nu uit de oplossing van het CCXVII Voorstel gemakkelijk blijkt, dat hiertoe voor p en q slechts de som en het verschil der regthoekszijden van eenen rationalen regthoekigen driehoek behoeven genomen te worden, zoo stellen wij

$$p=2mn-(m^2-n^2),$$
$$q=2mn+(m^2-n^2),$$

hieruit volgt, daar $x=\frac{1}{2}(p+q)$ gevonden is,

$$x=2mn;$$

en de vijf begeerde getallen zijn alzoo

$$2p^2=8m^2n^2-8mn(m^2-n^2)+2(m^2-n^2)^2,$$
$$2px=8m^2n^2-4mn(m^2-n^2),$$
$$2x^2=8m^2n^2,$$
$$2qx=8m^2n^2+4mn(m^2-n^2),$$

en $2q^2=8m^2n^2+8mn(m^2-n^2)+2(m^2-n^2)^2$;

voor $m=2$ en $n=1$, zijn deze getallen 2, 8, 32, 56 en 98.

CCXXVII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Twee geheele getallen te vinden; zoodanig, dat hunne som en de som der rekenkunstige en meetkunstige middenevenredigen vierkanten zijn?

OPGELOST *door* L. J. ULMAN, J. BASSAN, Mr. G. W. DE BRUIJN KOPS, C. BRUNINGS, S. DIK, CORNS., D. HOOLA VAN

NOO-

NOOTEN, C. F. JULIUS, D. VAN LAKERREN MATTHES, B. LUBBERS, M. G. SNOEK, I. WARNSINCK en C. VAN SCHAICK.

OPLOSSING van L. J. ULMAN.

Stel voor de getallen $2x^2$ en $2y^2$, dan is de rekenkunstige middenevenredige dezer getallen x^2+y^2 en hunne meetkunstige middenevenredige $2xy$; daar nu de som dezer middenevenredigen reeds een vierkant is, namelijk $x^2+2xy+y^2$, zoo behoeven wij slechts de som der getallen of $2x^2+2y^2$ tot een vierkant te maken. Hiertoe is het genoegzaam, even als in de vorige oplossing, voor x en y de som en het verschil te nemen van de regthoekszijden van een rationalen regthoekigen driehoek, stellen wij dus

$$x = 2mn - (m^2-n^2) \text{ en } y = 2mn + (m^2-n^2),$$

dan zijn de getallen

$$2x^2 = 8m^2n^2 - 8mn(m^2-n^2) + 2(m^2-n^2)^2,$$

en $$2y^2 = 8m^2n^2 + 8mn(m^2-n^2) + 2(m^2-n^2)^2;$$

voor $m=2$ en $n=1$, zijn dus deze getallen 2 en 98.

AANMERKING. Het is klaar, dat de beide uitersten der vijf getallen, die aan het voorgaande Voorstel voldoen, altijd aan het hier gevraagde beantwoorden.

CCXXVIII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Eene rekenkunstige reeks van drie termen te vinden, zoodanig, dat de proniken dezer termen eene meetkunstige reeks uitmaken?

OPGELOST *door* S. T. BOAS, J. BASSAN, E. BOAS, C. BRUNINGS, S. DIK, CORNZ., J. J. GASTMAN, M. L. GOEDE, D. HOOLA VAN NOOTEN, C. F. JULIUS, D. VAN LAKERREN MATTHES, B. LUBBERS, M. G. SNOEK, L. J. ULMAN en I. WARNSINCK.

OPLOSSING *van* S. T. BOAS.

Stellen wij voor de rekenkunstige reeks

$$x-y,\ x \text{ en } x+y,$$

dan zijn de proniken dezer termen

$$(x-y)^2+(x-y),\ x^2+x \text{ en } (x+y)^2+(x+y);$$

zullen deze nu eene meetkunstige reeks uitmaken, dan moet

$$(x^2+x)^2 = \{(x-y)^2+(x-y)\}\cdot\{(x+y)^2+(x+y)\}$$

zijn;

zijn; deze vergelijking herleidt men als volgt:

$$x^2(x+1)^2=(x-y)(x-y+1)(x+y)(x+y+1),$$
$$x^2(x+1)^2=(x^2-y^2)(x^2-y^2+2x+1),$$
$$x^2(x+1)^2=(x^2-y^2)\{(x+1)^2-y^2\},$$
$$x^2(x+1)^2=x^2(x+1)^2-y^2(x+1)^2-y^2(x^2-y^2),$$
$$y^2(x+1)^2+y^2(x^2-y^2)=0;$$

daar y niet gelijk nul kan wezen, deele men deze vergelijking door y^2, dan vindt men

$$(x+1)^2+x^2-y^2=0,$$

of
$$y^2=x^2+(x+1)^2.$$

Om de vraag in geheele getallen te beantwoorden, moet men dus twee op elkander volgende getallen x en $x+1$ hebben, zoodat de som hunner vierkanten een vierkant zij; hieraan voldoen alleen de getallen 3 en 4, en wij hebben dus $x=3$, waaruit volgt $y=5$, zoodat de rekenkunstige reeks dan wordt

—2, 3 en 8,

van welke getallen de produkten zijn

2, 12 en 72,

die alzoo eene meetkunstige reeks daarstellen.

AANMERKING. Al had men slechts antwoorden in gebrokens begeert, dan nog zoude altijd ten minste een der termen van de rekenkunstige reeks negatief zijn, omdat uit de vergelijking $y^2=x^2+(x+1)^2$ klaarblijkelijk volgt, dat $y>x$ is. Neemt men y positief, dan zal de eerste term der reeks negatief zijn, neemt men y negatief, dan zal zulks met den derden term het geval zijn; en neemt men ook nog x negatief, dan zullen de beide eerste of de beide laatste termen der reeks negatief zijn, naar gelang men y positief of negatief genomen heeft.

CCXXIX. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Men vraagt, of er eene harmonische reeks van drie termen bestaan kan, die de eigenschap heeft, dat de eerste term de vierkantswortel uit den tweeden, en de tweede term de vierkantswortel uit den derden is; en zoo ja, welke dan die reeks zij?

OPGELOST *door* B. LUBBERS, E. BOAS, C. BRUNINGS, S. DIK, CORNZ., D. HOOLA VAN NOOTEN, C. F. JULIUS, M. G. SNOER,

SNOER, L. J. ULMAN, M. L. GOEDE, D. VAN LANKEREN MATTHES en I. WARNSINCK.

OPLOSSING van B. LUBBERS.

Stel dat de eerste term x zij, dan moet x^2 de tweede en x^4 de derde term zijn; uit den aard der harmonische evenredigheden moet verder

$$x : x^4 = x^2 - x : x^4 - x^2,$$

of $$x(x^4 - x^2) = x^4(x^2 - x)$$

zijn; aan deze vergelijking voldoet $x=0$, maar dewijl deze waarde van x geene eigenlijke reeks geeft, deelen wij de vergelijking door x^3, als wanneer wij vinden

$$x^2 - 1 = x^2(x-1);$$

aan deze vergelijking voldoet verder $x=1$, maar dit geeft ook al geene eigenlijke reeks; wij deelen dus door $x-1$, en vinden alsdan

$$x+1 = x^2,$$

of $$x^2 - x - 1 = 0,$$

uit welke vierkantsvergelijking men verkrijgt

$$x = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5};$$

deze waarde van x toont derhalve aan, dat er twee reeksen zijn, die aan de bepaalde voorwaarde voldoen, te weten:

$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{5},\ 1\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{5},\ 3\tfrac{1}{2}+1\tfrac{1}{2}\sqrt{5};$$

en $$\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{5},\ 1\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{5},\ 3\tfrac{1}{2}-1\tfrac{1}{2}\sqrt{5}.$$

CCXXX. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Men verlangt eene harmonische reeks van drie termen, in geheele getallen, te vinden, van zoodanigen aard, dat als men de beide eerste termen elk met ééne eenheid verhoogt en den derden term onveranderd laat, de komende reeks harmonisch blijve?

OPGELOST *door* B. LUBBERS, Mr. G. W. DE BRUIJN KOPS, C. BRUNINGS, S. DIK, CORNZ., D. HOOLA VAN NOOTEN, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, M. G. SNOER, L. J. ULMAN, I. WARNSINCK, E. BOAS en C. VAN SCHAICK.

OPLOSSING van B. LUBBERS.

Indien wij de twee eerste termen der reeks door x en y voorstellen, dan is uit den aard der harmonische reeksen de derde term

term $\frac{xy}{2x-y}$; wij kunnen dus de begeerde reeks voorstellen door

$$x,\ y,\ \frac{xy}{2x-y},$$

en dan moeten volgens de opgaaf

$$x+1,\ y+1,\ \frac{xy}{2x-y},$$

wederom harmonisch evenredig zijn; wij hebben bij gevolg

$$x+1 : \frac{xy}{2x-y} = y-x : \frac{xy}{2x-y}-(y+1),$$

of $$(x+1)\{xy-(y+1)(2x-y)\} = xy(y-x);$$

deze vergelijking ontwikkelende en herleidende, vindt men terstond

$$2x^2+2x=y^2+y,$$

en hieruit y oplosfende, komt er

$$y=\tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{(8x^2+8x+1)}).$$

Stellen wij nu, om deze worteluitdrukking rationaal te maken,

$8x^2+8x+1=(ax-1)^2$ en dus $y=\frac{1}{2}(ax-2)$,

dan vinden wij hieruit

$$x=\frac{2a+8}{a^2-8}=\frac{a^2}{a^2-8}+\frac{2a}{a^2-8}-1,$$

bij gevolg is

$$y=\frac{4a+8}{a^2-8}=x+\frac{2a}{a^2-8},$$

en $$\frac{xy}{2x-y}=\frac{(a+4)(a+2)}{a^2-8}=1+\frac{6a+16}{a^2-8}=1+x+y;$$

indien wij nu voor a zulk eene rationale waarde nemen, dat $\frac{a^2}{a^2-8}$ een geheel getal wordt, dan zal ook $\frac{2a}{a^2-8}$ een geheel getal zijn; want stellende

$$\frac{a^2}{a^2-8}=b,$$

zoo vinden wij hieruit

$$a=2\sqrt{\frac{2b}{b-1}},$$

daardoor wordt dan

$$\frac{2a}{a^2-8}=\sqrt{\frac{b(b-1)}{2}},$$

en deze uitdrukking is vooreerst rationaal, omdat a rationaal is; en ten andere een geheel getal, omdat, b een geheel getal zijnde, $b(b-1)$ altijd door 2 deelbaar is.

Wij kunnen dus voor a alle geheele of gebrokene rationale waarden nemen, die $\frac{a^2}{a^2-8}$ tot een geheel getal maken, want dan zullen x, y en $\frac{xy}{2x-y}$ insgelijks geheele getallen worden;

voor $a=4$, vinden wij voor de begeerde reeks, 2, 3 en 6;
voor $a=3$, „ „ „ „ „ „ 14, 20 en 35;
voor $a=2\frac{6}{7}$, „ „ „ „ „ „ 84, 119 en 204;
voor $a=2\frac{24}{41}$, „ „ „ „ „ „ 2870, 4059 en 6930,

enz.

CCXXXI. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Wanneer men, uit het middelpunt van den cirkel in eenen driehoek beschreven, lijnen naar de hoekpunten trekt, wordt daardoor de driehoek in drie andere driehoeken verdeeld; indien nu gegeven zijn de stralen der ingeschreyene cirkels van twee der laatstgenoemde driehoeken, benevens een der hoeken van den oorspronkelijken driehoek, vraagt men de zijden van dien driehoek te berekenen?

OPGELOST *door* L. J. ULMAN, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, D. HOOLA VAN NOOTEN, C. F. JULIUS *en* I. WARNSINCK.

OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

Laat ABC (*Fig.* 96) een driehoek, en M het middelpunt van den in dien driehoek beschreven cirkel zijn, zoodat de lijnen AM, BM en CM de hoeken A, B en C midden door deelen. Laten P en Q de middelpunten zijn der cirkels, in de driehoeken AMB en AMC beschreven, zoodat de hoeken van die driehoeken ook weder door de lijnen AP, BP, MP en AQ, CQ, MQ worden midden door gedeeld. Trekken wij verder de stralen PD en QE loodregt op AB en AC, en stellen wij $PD=p$, $QE=q$, *hoek* BAC $=4\phi$, *hoek* BCA $=4\psi$, *hoek* ABC $=4\chi$; dan is, in den driehoek AMC,

hoek AMC $=180°-($*hoek* MAC $+$ *hoek* MCA$)=180°-(2\phi+2\psi)$,

en

en dus $\quad hoek\ AMQ = \frac{1}{2} hoek\ AMC = 90° - (\phi + \psi)$;
verder is, in den driehoek AQM,

$$hoek\ AQM = 180° - (hoek\ MAQ + hoek\ AMQ) =$$
$$180° - (\phi + 90° - (\phi + \psi)) = 90° + \psi;$$

uit dien zelfden driehoek AQM is nog

$$AM = \frac{AQ\ Sin.\ AQM}{Sin.\ AMQ} = \frac{AQ\ Cos.\ \psi}{Cos.\ (\phi + \psi)},$$

maar, daar uit den regthoekigen driehoek AEQ volgt

$$AQ = \frac{QE}{Sin.\ QAE} = \frac{q}{Sin.\ \phi},$$

zoo gaat de waarde voor AM over in

$$AM = \frac{q\ Cos.\ \psi}{Sin.\ \phi\ Cos.\ (\phi + \psi)},$$

op gelijke wijze vinden wij uit den driehoek APM, met behulp der driehoeken ADP en AMB,

$$AM = \frac{p\ Cos.\ \chi}{Sin.\ \phi\ Cos.\ (\phi + \chi)};$$

deze beide waarden van AM aan elkander gelijk stellende, hebben wij

$$\frac{q\ Cos.\ \psi}{Sin.\ \phi\ Cos.\ (\phi + \psi)} = \frac{p\ Cos.\ \chi}{Sin.\ \phi\ Cos.\ (\phi + \chi)},$$

of $\quad q\ Cos.\ \psi\ Cos.\ (\phi + \chi) = p\ Cos.\ \chi\ Cos.\ (\phi + \psi)$;
ontwikkelen wij nu $Cos.(\phi + \chi)$ en $Cos.(\phi + \psi)$, dan verkrijgen wij

$$q Cos.\psi(Cos.\phi Cos.\chi - Sin.\phi Sin.\chi) = p Cos.\chi(Cos.\phi Cos.\psi - Sin.\phi Sin.\psi),$$

of, zoo wij door $Sin.\ \phi\ Cos.\ \psi\ Cos.\ \chi$ deelen,

$$q\,(Cot.\ \phi - Tang.\ \chi) = p\,(Cot.\ \phi - Tang.\ \psi),$$

dat is $\quad (p - q)\ Cot.\ \phi = p\ Tang.\ \psi - q\ Tang.\ \chi \quad . \quad . \quad (A),$
welke vergelijking, op eene zeer eenvoudige wijze, de betrekking tusschen de hoeken des driehoeks en de stralen van de beide cirkels bepaalt.

Voorts is $\quad 4\phi + 4\psi + 4\chi = 180°,$
derhalve $\quad \phi + \psi + \chi = 45°,$

$$\chi = 45° - (\phi + \psi),$$
$$Tang.\ \chi = \frac{1 - Tang.\ (\phi + \psi)}{1 + Tang.\ (\phi + \psi)},$$

 of,

of, omdat $Tang.(\phi+\psi)=\frac{Tang.\phi+Tang.\psi}{1-Tang.\phi\, Tang.\psi}$ is,

$$Tang.\chi=\frac{1-Tang.\phi-Tang.\psi-Tang.\phi\, Tang.\psi}{1+Tang.\phi+Tang.\psi-Tang.\phi\, Tang.\psi};$$

brengen wij deze waarde in de vergelijking (A) over, tevens $\frac{p-q}{Tang.\phi}$ voor $(p-q)\, Cot.\phi$ schrijvende, dan verkrijgen wij

$$\frac{p-q}{Tang.\phi}=p\, Tang.\psi-q\,\frac{1-Tang.\phi-Tang.\psi-Tang.\phi\, Tang.\psi}{1+Tang.\phi+Tang.\psi-Tang.\phi\, Tang.\psi};$$

herleidt men nu deze vergelijking behoorlijk, alles naar de magten van $Tang.\phi$ rangschikkende, dan komt er

$$Tang^2.\phi-\frac{p\, Tang^2.\psi+2p\, Tang.\psi-p}{p\, Tang^2.\psi-(p+q)\, Tang.\psi-q}\, Tang.\phi$$
$$+\frac{(p-q)(Tang.\psi+1)}{p\, Tang^2.\psi-(p+q)\, Tang.\psi-q}=0 \quad (\Phi),$$

of, alles naar de magten van $Tang.\psi$ rangschikkende, komt er

$$Tang^2.\psi-\frac{(p+q)\, Tang^2.\phi+2p\, Tang.\phi-(p-q)}{p\, Tang.\phi\,(Tang.\phi-1)}\, Tang.\psi$$
$$-\frac{q\, Tang^2.\phi-p\, Tang.\phi-(p-q)}{p\, Tang.\phi\,(Tang.\phi-1)}=0 \quad . \quad (\Upsilon).$$

Dewijl nu, volgens het voorstel, behalve de stralen p en q, *één* der beide hoeken ϕ of ψ gegeven is, zoo kunnen wij door eene der vierkants-vergelijkingen (Φ) of (Υ) *de andere* dier beide hoeken vinden, waardoor dan ook de derde hoek χ bekend wordt.

Eindelijk worden de zijden, zoodra eenmaal al de hoeken gevonden zijn, gemakkelijk berekend; want, daar uit de regthoekige driehoeken ADP, BDP, AEQ, CEQ terstond volgt,

$AD=p\, Cot.\phi$, $BD=p\, Cot.\chi$, $AE=q\, Cot.\phi$, $CE=q\, Cot.\psi$,

zoo hebben wij

$$AB=AD+BD=p\,(Cot.\phi+Cot.\chi),$$
$$AC=AE+CE=q\,(Cot.\phi+Cot.\psi),$$

en hieruit kan men nu ook op de gewone wijze de derde zijde BC berekenen.

CCXXXII. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Hetzelfde als in het voorgaande voorstel wordt gevraagd, indien,

ne-

neveni een der hoeken van den oorspronkelijken driehoek, de stralen gegeven zijn van de cirkels, om *twee der kleinere driehoeken beschreven?*

Opgelost *door* L. J. Ulman, I. Warnsinck, W. J. C. Rammelman Elsevier, D. Hoola van Nooten, C. F. Julius, C. Brunings *en* D. van Lankeren Matthes.

Oplossing *van* L. J. Ulman.

Laat ABC (*Fig.* 97) de driehoek en M het middelpunt des ingeschreven cirkels zijn, laten verder de stralen der cirkels, om de driehoeken ABM en ACM beschreven, respectievelijk door r en s voorgesteld worden; stel de hoek des driehoeks, waarvan het hoekpunt in den omtrek van *beide* gegevene cirkels ligt, dat is *hoek* $BAC = 2\phi$ en een der andere hoeken des driehoeks bijv. *hoek* $ACB = 2\psi$, dan is *hoek* $ABC = 180° - (2\phi + 2\psi)$, en, omdat de lijnen AM, BM en CM de hoeken des driehoeks midden door deelen, is verder

$$\textit{hoek}\ BAM = \textit{hoek}\ CAM = \phi,$$
$$\textit{hoek}\ ACM = \textit{hoek}\ BCM = \psi,$$
$$\textit{hoek}\ ABM = \textit{hoek}\ CBM = 90° - (\phi + \psi).$$

Nu is, in den driehoek ABM,

$$AM = 2r\,Sin.\,ABM = 2r\,Cos.\,(\phi + \psi),$$

en, in den driehoek ACM,

$$AM = 2s\,Sin.\,ACM = 2s\,Sin.\,\psi,$$

bij gevolg hebben wij de vergelijking

$$r\,Cos.\,(\phi + \psi) = s\,Sin.\,\psi \quad \ldots\ldots \quad (A).$$

Is nu de hoek ψ gegeven, dan hebben wij terstond

$$Cos.(\phi + \psi) = \frac{s}{r}\,Sin.\,\psi,$$

waardoor $\phi + \psi$ en gevolgelijk ook ϕ gevonden wordt.

Is echter de hoek ϕ gegeven, dan hebben wij door herleiding der vergelijking (A)

$$r\,Cos.\,\phi\,Cos.\,\psi - r\,Sin.\,\phi\,Sin.\,\psi = s\,Sin.\,\psi,$$

of, door $Sin.\,\psi$ deelende,

$$r\,Cos.\,\phi\,Cot.\,\psi - r\,Sin.\,\phi = s,$$

waaruit terstond gevonden wordt

$$Cot.\,\psi = Cot.\,\phi + \frac{s}{r}\,Sec.\,\phi;$$

 hier-

hierdoor zijn dus, in beide gevallen, alle drie de hoeken des driehoeks bekend.

Wijders hebben wij

hoek AMB $=180^\circ-$ (*hoek* BAM $+$ *hoek* ABM) $=90^\circ+\psi$,

hoek AMC $=180^\circ-$ (*hoek* ACM $+$ *hoek* CAM) $=180^\circ-(\phi+\psi)$,

dus is *Sin.* AMB $=$ *Cos.* ψ, *Sin.* AMC $=$ *Sin.* $(\phi+\psi)$, en derhalve

$$AB = 2r\,Sin.\,AMB = 2r\,Cos.\,\psi,$$

en

$$AC = 2s\,Sin.\,AMC = 2s\,Sin.\,(\phi+\psi),$$

waardoor nu de derde zijde mede oogenblikkelijk kan berekend worden.

Aanmerking *van* I. Warnsinck. De gevondene vergelijking AB $=2r$ *Cos.* ψ leert ons: *dat in elken driehoek iedere zijde gelijk is aan het product van de Cosinus van den halven tegenoverstaanden hoek met de middellijn van den cirkel, welke door de uiteinden van die zijde en het middelpunt van den in dien driehoek beschrevenen cirkel gaat.*

CCXXXIII. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

Eenige kooplieden hebben te zamen 5200 *gulden, hierbij voegt ieder* 200 *maal zoo veel guldens, als er kooplieden zijn, met dit kapitaal winnen zij zoo veel ten honderd als hun aantal bedraagt, van deze winst ontvangt ieder* 18 *maal zoo veel guldens als er kooplieden zijn, en dan blijft er nog* 48 *gulden van die winst over. Men vraagt hoe veel kooplieden er waren?*

Opgelost *door* W. J. C. Rammelman Elsevier, E. Boas, S. T. Boas, C. Brunings, S. Dik, Cornz., G. Graafland, D. Hoola van Nooten, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, B. Lubbers, L. J. Ulman, I. Warnsinck, J. J. Gastman, M. G. Snoer *en* C. van Schaick.

Oplossing *van* W. J. C. Rammelman Elsevier.

Stel dat er x kooplieden waren, dan voegt ieder bij het kapitaal van 5200 gulden nog $200x$ gulden, zij voegen er dus te zamen $200x^2$ gulden bij, waardoor het kapitaal wordt:

$$5200+200x^2;$$

met dit kapitaal winnen zij x ten honderd, die winst is dus

(5200

$$(5200+200x^2)\frac{x}{100}=52x+2x^3;$$

van deze winst ontvangt elk $18x$ gulden, dus ontvangen zij te zamen van de winst $18x^2$ gulden, bij gevolg blijft er van de winst over

$$52x+2x^3-18x^2;$$

maar dit overschot is gegeven 48 gulden te zijn, wij hebben dus de vergelijking

$$52x+2x^3-18x^2=48,$$

of
$$x^3-9x^2+26x-24=0;$$

deze vergelijking heeft drie meetbare wortels, $x=2$, $x=3$, $x=4$, er zijn dus drie antwoorden op het voorstel, er kunnen namelijk *twee*, *drie* of *vier* kooplieden geweest zijn.

CCXXXIV. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Men vraagt eenen regthoekigen driehoek zoodanig te bepalen, dat de zijden door drie onderling ondeelbare gehéele getallen worden uitgedrukt; en dat de inhouden der omwentelings-ligchamen, die ontstaan wanneer deze driehoek om elk zijner zijden als as omwentelt, harmonisch evenredig zijn?

OPGELOST *door* B. LUBBERS, S. T. BOAS, S. DIK, CORNZ., D. HOOLA VAN NOOTEN, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, L. J. ULMAN *en* I. WARNSINCK.

OPLOSSING *van* B. LUBBERS.

Zij ABC (*Fig.* 98) de gevraagde driehoek, dan zal dezelve, om de zijde AC wentelende, eenen kegel ABB′ voortbrengen, waarvan AC de hoogte en BC de straal des grondvlaks is; stellen wij dus de kleinste regthoekszijde $AC=x$, de andere regthoekszijde $BC=y$ en de hypothenusa $AB=z$, dan vinden wij

Inh. Kegel. $ABB'=\frac{1}{3}\pi y^2 x$ . . . . (1).

Indien de driehoek ABC om de zijde BC wentelt, ontstaat er een kegel BAA′, waarvan BC de hoogte en AC de straal des grondvlaks is; alzoo hebben wij

Inh. Kegel. $BAA'=\frac{1}{3}\pi x^2 y$ . . . . . (2).

Laat men eindelijk den driehoek om de zijde AB wentelen, dan zal het omwentelings-ligchaam dat hierdoor ontstaat de som van de twee kegels ACC′ en BCC′ zijn, die beide tot grondvlak

 heb-

hebben den cirkel, welks straal de loodlijn CD is, uit den regten hoek C op de hypothenusa getrokken, terwijl AD en BD respectievelijk de hoogten dezer kegels zijn; hierdoor vinden wij, omdat $CD = \frac{xy}{z}$ is,

$$\textit{Inh. Kegel.}\ ACC' = \tfrac{1}{3} AD \times \frac{\pi x^2 y^2}{z^2},$$

$$\textit{Inh. Kegel.}\ BCC' = \tfrac{1}{3} BD \times \frac{\pi x^2 y^2}{z^2},$$

en door optelling dezer beide waarden

$$\textit{Inh. omw. ligch.}\ ACC'B = \tfrac{1}{3} AB \times \frac{\pi x^2 y^2}{z^2} = \tfrac{1}{3} . \frac{\pi x^2 y^2}{z} \quad . \quad (3).$$

De in (1), (2) en (3) gevondene inhouden

$$\tfrac{1}{3}\pi y^2 x, \quad \tfrac{1}{3}\pi x^2 y, \quad \tfrac{1}{3} . \frac{\pi x^2 y^2}{z},$$

moeten nu volgens de opgave harmonisch evenredig zijn; deelen wij deze uitdrukkingen alle door den gemeenen factor $\pi x y$, en vermenigvuldigen wij dezelve met $3z$, dan verkrijgen wij de termen

$$yz, \quad xz, \quad xy,$$

die nu insgelijks harmonisch evenredig moeten zijn; merken wij dus op, dat yz de grootste en xy de kleinste van deze drie termen is, omdat z de hypothenusa en x de kleinste regthoekszijde voorstelt, dan hebben wij, volgens den aard der harmonische evenredigheden,

$$yz : xy = yz - xz : xz - xy,$$

dat is: $z : x = yz - xz : xz - xy,$

of $1 : 1 = y - x : z - y,$

waaruit volgt $y - x = z - y,$

of $z = 2y - x,$

en $z^2 = 4y^2 - 4xy + x^2;$

daar nu, volgens de eigenschap van den regthoekigen driehoek, $x^2 + y^2 = z^2$ is, hebben wij alzoo

$$x^2 + y^2 = 4y^2 - 4xy + x^2,$$

of $3y^2 = 4xy,$

derhalve is $y = \tfrac{4}{3}x,$

en $z = 2y - x = \tfrac{5}{3}x,$

wes-

weshalven de zijden des driehoeks zijn

$$x, \ \tfrac{4}{3}x \ \text{en} \ \tfrac{5}{3}x;$$

omdat nu deze zijden geheele en tevens onderling ondeelbare getallen moeten zijn, kan x niet anders dan 3 wezen, weshalve dan eindelijk de zijden des gevraagden driehoeks door geene andere getallen kunnen worden uitgedrukt, dan door

3, 4 en 5.

AANMERKING *van* J. BADON GHIJBEN. Indien in de opgave slechts gevorderd was, dat de beide regthoekszijden door geheele en onderling ondeelbare getallen moesten worden uitgedrukt, zoude men voor deze zijden insgelijks de getallen 3 en 4 gevonden hebben; dat de hypothenusa dus ook door een geheel getal onderling ondeelbaar met de getallen der regthoekszijden wordt uitgedrukt, is toevalligerwijze een noodzakelijk gevolg van de overige voorwaarden des voorstels.

CCXXXV. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Men vraagt hetzelfde als in het voorgaande voorstel, indien de ligchamen, wier inhouden harmonisch evenredig moeten zijn, ontstaan door de omwenteling des driehoeks om elk der lijnen, door de hoekpunten evenwijdig aan de overstaande zijden getrokken?

OPGELOST *door* B. LUBBERS, S. T. BOAS, S. DIK. CORNZ., D. HOOLA VAN NOOTEN; C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, L. J. ULMAN *en* I. WARNSINCK.

OPLOSSING *van* B. LUBBERS.

Zij ABC (*Fig.* 98) wederom de gevraagde driehoek, dan zal dezelve, om eene lijn wentelende door B evenwijdig met AC getrokken, een omwentelings-ligchaam voortbrengen, dat bestaat uit het verschil van den cilinder $ACc'a'$ en den kegel ABa'; deze ligchamen hebben beide tot hoogte AC en tot straal des grondvlaks BC, zoodat wij, de zijden des driehoeks even als in het voorgaande voorstel door x, y en z voorstellende, zullen hebben

$$\textit{Inh. omw. ligch.}\ BCABa'c'B = \pi y^2 x - \tfrac{1}{3}\pi y^2 x = \tfrac{2}{3}\pi y^2 x \quad . \ (1).$$

Laat men den driehoek ABC om eene lijn wentelen, door A evenwijdig met BC getrokken, dan heeft men even zoo

$$\textit{Inh. omw. ligch.}\ ACBAb''c''A = \pi x^2 y - \tfrac{1}{3}\pi x^2 y = \tfrac{2}{3}\pi x^2 y \quad . \ (2).$$

 In-

Indien eindelijk de driehoek ABC omwentelt om eene lijn, door C evenwijdig met AB getrokken, dan is het ligchaam dat daardoor ontſtaat de cilinder AB$b\,a$ verminderd met de ſom der kegels CAa en CBb; omdat CD$=\frac{xy}{z}$ de ſtraal van het grondvlak dezer ligchamen is, heeft men

$$\textit{Inh. Cil.}\ \mathrm{AB}\,b\,a = \mathrm{AB} \times \frac{\pi x^2 y^2}{z^2},$$

$$\textit{Inh. Kegel.}\ \mathrm{CA}\,a = \tfrac{1}{3}\mathrm{AD} \times \frac{\pi x^2 y^2}{z^2},$$

$$\textit{Inh. Kegel}\ \mathrm{CB}\,b = \tfrac{1}{3}\mathrm{BD} \times \frac{\pi x^2 y^2}{z^2},$$

en trekt men de ſom dezer beide kegels van den cilinder af, dan komt er, omdat $\mathrm{AB}-(\frac{1}{3}\mathrm{AD}+\frac{1}{3}\mathrm{BD})=\mathrm{AB}-\frac{1}{3}\mathrm{AB}=\frac{2}{3}\mathrm{AB}=\frac{2}{3}z$ is,

$$\textit{Inh. omw. ligch.}\ \mathrm{CABC}\,b\,a\,\mathrm{C} = \tfrac{2}{3}.\frac{\pi x^2 y^2}{z} \quad . \ . \ (3).$$

De inhouden in (1), (2) en (3) gevonden

$$\tfrac{2}{3}\pi y^2 x,\quad \tfrac{2}{3}\pi x^2 y,\quad \tfrac{2}{3}.\frac{\pi x^2 y^2}{z},$$

moeten nu volgens de opgave wederom harmonisch evenredig zijn; maar, daar dezelve juist het dubbeld zijn der inhouden van het voorgaande voorſtel, blijft het verdere van de vorige oplosſing hier letterlijk van toepasſing, zoodat ook ter beantwoording van dit voorſtel de zijden des driehoeks door de getallen 3, 4 en 5 moeten uitgedrukt worden.

CCXXXVI. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Men vroeg aan eene reeds bejaarde vrouw, op haren verjaardag, hoe oud zij was? Zij antwoordde: ik heb vier kinderen, de oudſte is zoo veel ouder dan de tweede, als de tweede ouder dan de derde, en als de derde ouder dan de vierde is; wij allen zijn op denzelfden dag jarig; voor 30 jaren was ik tweemaal zoo oud als al mijne kinderen te zamen; doch heden zijn mijne kinderen gezamenlijk tweemaal zoo oud als ik ben; hoe oud is die vrouw en hare kinderen?

OPGELOST *door* B. LUBBERS, E. BOAS, S. T. BOAS, Mr. G. W. DE BRUIJN KOPS, S. DIJK, CORNZ., J. J. GASTMAN, M. L. GOE-

GOEDE, G. GRAAFLAND, D. HOOLA VAN NOOTEN, C. F. JULIUS, L. J. ULMAN, I. WARNSINCK, D. VAN LANKEREN MATTHES, A. VOLKERSE, C. VAN SCHAICK *en* C. BRUNINGS.

OPLOSSING *van* B. LUBBERS.

Dewijl volgens de opgave de jaren der kinderen eene rekenkunstige reeks uitmaken, kunnen wij stellen, dat de kinderen voor 30 jaren $x+3y$, $x+y$, $x-y$ en $x+3y$ jaren oud geweest zijn; dus was de moeder toen $8x$ jaren oud. Dan zijn thans de kinderen $x+3y+30$, $x+y+30$, $x-y+30$, $x-3y+30$, terwijl de moeder $8x+30$ jaren oud is; de tegenwoordige ouderdom der kinderen is dus gezamenlijk $4x+120$; en de helft hiervan gelijk moetende zijn aan de tegenwoordige jaren der moeder, zoo hebben wij de vergelijking

$$8x+30=2x+60,$$

waaruit volgt $$x=5;$$

voor 30 jaren was dus de ouderdom der moeder 40 jaren en die der kinderen

$$5+3y,\ 5+y,\ 5-y \text{ en } 5-3y$$

jaren; y kan hierin geene andere waarde dan 1 hebben, omdat elke andere waarde van y voor den ouderdom van een of meer der kinderen een gebroken of negatief getal zou geven; wij hebben dus $y=1$, waaruit volgt dat de kinderen voor 30 jaren respectievelijk 8, 6, 4 en 2 jaren oud waren; de tegenwoordige ouderdom der moeder is dus 70 en die der kinderen 38, 36, 34 en 32 jaren.

CCXXXVII. VOORSTEL.

Door M. H. GODEFROI.

Vindt eene rekenkunstige reeks van vijf termen, waarbij de sommen van de eerste, tweede en derde magten der termen, tot elkander in reden zijn als de getallen 2, 9 *en* 44?

OPGELOST *door* L. J. ULMAN, E. BOAS, S. T. BOAS, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, Mr. G. W. DE BRUIJN KOPS, M. L. GOEDE, D. HOOLA VAN NOOTEN, S. DIK, CORNZ., J. J. GASTMAN, M. H. GODEFROI, B. LUBBERS, M. G. SNOBB, I. WARNSINCK, C. BRUNINGS *en* C. VAN SCHAICK.

I. OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

Stellen wij dat de algemeene vraag was voorgesteld, *om eene re-*

rekenkunstige reeks van n termen te vinden, waarbij de sommen der eerste, tweede en derde magten, tot elkander zijn in reden als a, b en c? en laat deze gevraagde reeks worden voorgesteld door

$$x,\ x+y,\ x+2y,\ enz\ \ .\ .\ \text{tot}\ x+(n-1)y,$$

dan is de som der termen

$$nx+\tfrac{1}{2}n(n-1)y,$$

de som van de tweede magten der termen

$$nx^2+n(n-1)xy+\tfrac{1}{6}n(n-1)(2n-1)y^2,$$

en de som van de derde magten der termen

$$nx^3+\tfrac{3}{2}n(n-1)x^2y+\tfrac{1}{2}n(n-1)(2n-1)xy^2+\tfrac{1}{4}n^2(n-1)^2y^3.\ (*)$$

Wij hebben dus, volgens de voorwaarden des voorstels,

$$\frac{nx^2+n(n-1)xy+\tfrac{1}{6}n(n-1)(2n-1)y^2}{nx+\tfrac{1}{2}n(n-1)y}=\frac{b}{a},$$

en $$\frac{nx^3+\tfrac{3}{2}n(n-1)x^2y+\tfrac{1}{2}n(n-1)(2n-1)xy^2+\tfrac{1}{4}n^2(n-1)^2y^3}{nx+\tfrac{1}{2}n(n-1)y}=\frac{c}{a};$$

in deze laatste vergelijking, kan de deeling, in het eerste lid aangeduid, werkelijk uitgevoerd worden, waardoor wij verkrijgen

$$x^2+(n-1)xy+\tfrac{1}{2}n(n-1)y^2=\frac{c}{a}\ \ .\ .\ (A),$$

terwijl de eerste vergelijking, na deeling door n, geeft

$$x^2+(n-1)xy+\tfrac{1}{6}(n-1)(2n-1)y^2=\frac{b}{a}(x+\tfrac{1}{2}(n-1)y)\ (B);$$

trekken wij nu deze vergelijkingen (A) en (B) van elkander af, dan komt er

$$\tfrac{1}{6}(n^2-1)y^2=\frac{c}{a}-\frac{b}{a}x-\frac{b}{2a}(n-1)y,$$

waaruit men terstond trekt

$$x=-\tfrac{1}{2}(n-1)y+\frac{c}{b}-\frac{a(n^2-1)}{6b}y^2\ \ .\ .\ .\ (C);$$

behardelt men echter (A) als eene gewone vierkants-vergelijking, dan vindt men

$x=$

(*) De coëfficienten, in de laatstgenoemde uitdrukkingen, worden gevonden, door behulp van het sommeren der volgende rekenkunstige reeksen van de eerste, tweede en derde orde, als

$$1+2+3+enz,\ \ .\ .\ \text{tot}+(n-1)=\tfrac{1}{2}n(n-1),$$
$$1+2^2+3^2+enz,\ \ .\ .\ \text{tot}+(n-1)^2=\tfrac{1}{6}n(n-1)(2n-1),$$
$$1+2^3+3^3+enz.\ \ .\ .\ \text{tot}+(n-1)^3=\tfrac{1}{4}n^2(n-1)^2.$$

$$x = -\tfrac{1}{2}(n-1)y \pm \sqrt{\left(\frac{c}{a} - \tfrac{1}{4}(n^2-1)y^2\right)};$$

deze beide waarden van x aan elkander gelijk stellende, verkrijgt men

$$\frac{c}{b} - \frac{a(n^2-1)}{6b}y^2 = \pm\sqrt{\left(\frac{c}{a} - \tfrac{1}{4}(n^2-1)y^2\right)};$$

verheft men nu deze vergelijking tot de tweede magt, dan vindt men, na behoorlijke herleiding,

$$y^4 - \frac{12ac - 9b^2}{a^2(n^2-1)}y^2 + \frac{36c(ac-b^2)}{a^3(n^2-1)^2} = 0,$$

waaruit volgt

$$y^2 = \frac{12ac - 9b^2 \pm 3b\sqrt{(9b^2 - 8ac)}}{2a^2(n^2-1)} \quad \ldots \text{(D)},$$

zoodat nu y en bij gevolg door de vergelijking (C) ook x bekend is.

In ons geval is $n=5$, $a=2$, $b=9$ en $c=44$; substitueerende deze waarden in (D), zoo vindt men

$$y^2 = 1 \text{ of } y^2 = \tfrac{154}{64},$$

en dus $y=1$, $y=\tfrac{1}{8}\sqrt{154}$, $y=-1$ of $y=-\tfrac{1}{8}\sqrt{154}$;
uit (C) vindt men verder, dat met deze waarden van y respectievelijk overeenstemmen

$$x=2,\ x=2\tfrac{3}{4}-\tfrac{1}{4}\sqrt{154},\ x=6 \text{ en } x=2\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{4}\sqrt{154};$$

indien wij de eerste dezer waarden voor x en y gebruiken, komt er voor de gevraagde reeks

$$2,\ 3,\ 4,\ 5 \text{ en } 6;$$

gebruiken wij de tweede der waarden voor x en y gevonden, dan vinden wij voor de reeks

$$2\tfrac{3}{4}-\tfrac{1}{4}\sqrt{154},\ 2\tfrac{3}{4}-\tfrac{1}{8}\sqrt{154},\ 2\tfrac{3}{4},\ 2\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{8}\sqrt{154} \text{ en } 2\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{4}\sqrt{154};$$

de derde en vierde waarden voor x en y geven de beide bovenstaande reeksen in omgekeerde rangorde terug, weshalve er geen andere, dan de beide bovenstaande antwoorden, op het voorstel kunnen gegeven worden.

II. Oplossing *van* L. J. Ulman.

Om ons bijzonder vraagstuk terstond op te lossen, stelle men voor de reeks

$$x-2y,\ x-y,\ x,\ x+y \text{ en } x+2y,$$

dan is de som van de termen . . . . $5x$,

de

de fom van de tweede magten derzelve . $5x^2+10y^2$,
en die van de derde magten . . . . . . $5x^3+30xy^2$;
dus hebben wij de evenredigheden

$$5x:5x^2+10y^2=2:9 \text{ of } x:x^2+2y^2=2:9$$

en $$5x:5x^3+30xy^2=2:44 \text{ of } 1:x^2+6y^2=1:22;$$

uit de eerfte volgt terftond

$$x^2+2y^2=\tfrac{9}{2}x \text{ en dus } 6y^2=\tfrac{27}{2}x-3x^2,$$

even zoo is uit de tweede

$$x^2+6y^2=22 \quad „ \quad „ \quad 6y^2=22-x^2;$$

derhalve is $\frac{27}{2}x-3x^2=22-x^2$,

of $x^2-\frac{27}{4}x=-11$,

waaruit men vindt $x=4$ of $x=2\frac{3}{4}$;

door eene der vorige vergelijkingen vindt men verder

voor $x=4$, $y=\pm 1$,

en voor $x=2\frac{3}{4}$, $y=\pm\frac{1}{8}\sqrt{154}$,

waardoor wij, even als in de vorige oplosfing, voor de gevraagde reeks verkrijgen

$$2, \quad 3, \quad 4, \quad 5 \text{ en } 6;$$

of $2\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{154}$, $2\frac{3}{4}-\frac{1}{8}\sqrt{154}$, $2\frac{3}{4}$, $2\frac{3}{4}+\frac{1}{8}\sqrt{154}$ en $2\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{154}$.

CCXXXVIII. VOORSTEL.

Door M. H. GODEFROI.

Vindt eene rekenkunstige reeks van drie termen, waarbij de sommen van de eerfte, derde en vijfde magten der termen, in reden zijn als de getallen 1, 6 en 46?

OPGELOST *door* L. J. ULMAN, C. F. JULIUS, S. T. BOAS, D. VAN LANKEREN MATTHES, E. BOAS, D. HOOLA VAN NOOTEN, S. DIK, CORNZ., M. H. GODEFROI, B. LUBBERS, M. G. SNOER, L. WARNSINCK, C. BRUNINGS *en* C. VAN SCHAICK.

OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

Stellende voor de reeks

$$x-y, \quad x \text{ en } x+y,$$

dan is de fom der termen $3x$,

de fom van derzelver derde magten

$$3x^3+6xy^2,$$

en de fom van derzelver vijfde magten

$$3x^5+20x^3y^2+10xy^4;$$

laten nu, deze fommen in reden moeten zijn als de getallen a, b en c,

c, dan hebben wij de evenredigheden

$$3x:3x^3+6xy^2=a:b \quad \ldots\ldots \quad (A),$$

en $$3x:3x^5+20x^3y^2+10xy^4=a:c \quad \ldots \quad (B);$$

uit de eerſte evenredigheid vindt men dadelijk

$$x^2+2y^2=\frac{b}{a},$$

of $$x^2=\frac{b}{a}-2y^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (C);$$

uit de tweede evenredigheid vindt men

$$3x^4+20x^2y^2+10y^4=\frac{3c}{a},$$

en, in deze vergelijking de bovenſtaande waarde van x^2 overbrengende,

$$3\left(\frac{b}{a}-2y^2\right)^2+20\left(\frac{b}{a}-2y^2\right)y^2+10y^4=\frac{3c}{a},$$

of, na behoorlijke herleiding,

$$y^4-\frac{4b}{9a}y=\frac{b^2-ac}{6a^2},$$

waaruit terſtond volgt

$$y^2=\frac{4b\pm\sqrt{(70b^2-54ac)}}{18a} \quad \ldots\ldots \quad (D),$$

terwijl wij dan verder door (C) hebben

$$x^2=\frac{5b\mp\sqrt{(70b^2-54ac)}}{9a} \quad \ldots \quad (E).$$

In ons voorſtel is nu gegeven $a=1$, $b=6$, $c=46$; deze getallen in (D) en (E) overbrengende, vinden wij, de benedenſte teekens gebruikende, $y^2=1$ en $x^2=4$, dus $y=\pm1$ en $x=\pm2$; daar nu deze beide waarden van x en y op alle mogelijke wijzen met elkander verbonden mogen worden, vinden wij, dat

voor $x=2$ en $y=1$ de gevraagde reeks is: 1, 2 en 3,
voor $x=2$ en $y=-1$ „ „ „ „ 3, 2 en 1,
voor $x=-2$ en $y=1$ „ „ „ „ -3, -2 en -1,
voor $x=-2$ en $y=-1$ „ „ „ „ -1, -2 en -3,

welke vier uitkomsten eigenlijk alleen de reeks

$$\pm1,\ \pm2,\ \pm3,$$

aanwijzen. Indien wij in (D) en (E) de bovenſte teekens gebrui-

bruiken, komt er $y^2 = \frac{15}{9}$ en $x^2 = \frac{24}{9}$, dus $y = \pm \frac{1}{3}\sqrt{15}$ en $x = \pm \frac{2}{3}\sqrt{6}$, waardoor wij, even als boven handelende, voor de begeerde reeks alleen vinden

$$\pm \tfrac{1}{3}(2\sqrt{6} - \sqrt{15}),\ \pm \tfrac{2}{3}\sqrt{6},\ \pm \tfrac{1}{3}(2\sqrt{6} + \sqrt{15}).$$

CCXXXIX. VOORSTEL.

Door H. VAN BLANKEN.

Wanneer men in en om eenen cirkel regelmatige veelhoeken beschrijft, zal de omtrek van den ingeschreven 2 n-hoek, midden evenredig zijn tusschen de omtrekken van den ingeschreven n-hoek en van den omgeschreven 2 n-hoek; men vraagt naar het bewijs hiervan?

OPGELOST *door* S. T. BOAS, D. HOOLA VAN NOOTEN, H. VAN BLANKEN, C. BRUNINGS, S. DIK, CORNZ., C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, L. J. ULMAN *en* I. WARNSINCK.

I. OPLOSSING *van* S. T. BOAS.

Laat AB (*Fig.* 99) de zijde van den ingeschreven n-hoek, AC die van den ingeschreven $2n$-hoek en DE die van den omgeschreven $2n$-hoek zijn; trekken wij dan uit C op AB en uit D op AC de loodlijnen CF en DG, zoo zijn de driehoeken CDG en CAF gelijkvormig, omdat beide eenen regten hoek hebben en bovendien uit de evenwijdigheid der lijnen AB en DE volgt, dat *hoek* DCG = *hoek* CAF is; wij hebben dus de evenredigheid

$$AF : AC = CG : CD,$$

of

$$2\,AF : 2\,AC = 4\,CG : 4\,CD,$$

dat is

$$AB : 2\,AC = 2\,AC : 2\,DE,$$

of

$$n \times AB : 2n \times AC = 2n \times AC : 2n \times DE,$$

waardoor de stelling bewezen is.

II. OPLOSSING *van* D. HOOLA VAN NOOTEN.

Indien r de straal des cirkels voorstelt, heeft men, zoo als genoegzaam bekend is,

$$\textit{zijde des ingeschr. } n\textit{-hoeks} = 2r \, Sin. \frac{\pi}{n},$$

$$\textit{zijde des ingeschr. } 2n\textit{-hoeks} = 2r \, Sin. \frac{\pi}{2n},$$

$$\textit{zijde des omgeschr. } 2n\textit{-hoeks} = 2r \, Tang. \frac{\pi}{2n};$$

maar

maar nu is $Sin. \frac{\pi}{n} = 2\, Sin. \frac{\pi}{2n}\, Cos. \frac{\pi}{2n}$,

en $Tang. \frac{\pi}{2n} = Sin. \frac{\pi}{2n} : Cos. \frac{\pi}{2n}$,

derhalve:

zijde des ingeschr. n-hoeks $= 4 r\, Sin. \frac{\pi}{2n} \times Cos. \frac{\pi}{2n}$,

zijde des ingeschr. 2n-hoeks $= 2 r\, Sin. \frac{\pi}{2n}$,

zijde des omgeschr. 2n-hoeks $= 2 r\, Sin. \frac{\pi}{2n} : Cos. \frac{\pi}{2n}$;

vermenigvuldigt men deze uitdrukkingen respectievelijk met n en $2n$, dan komt er

omtrek des ingeschr. n-hoeks $= 4 n r\, Sin. \frac{\pi}{2n} \times Cos. \frac{\pi}{2n}$,

omtrek des ingeschr. 2 n-hoeks $= 4 n r\, Sin. \frac{\pi}{2n}$,

omtrek des omgeschr. 2 n-hoeks $= 4 n r\, Sin. \frac{\pi}{2n} : Cos. \frac{\pi}{2n}$;

waaruit blijkt, dat deze drie omtrekken eene meetkunstige reeks uitmaken, die $Cos. \frac{\pi}{2n}$ tot gemeene reden heeft; en dat bij gevolg de omtrek des ingeschreven $2\,n$-*hoeks* midden-evenredig is tusschen de beide andere genoemde omtrekken.

CCXL. VOORSTEL.

Door G. GRAAFLAND.

Men vraagt eene rekenkunstige reeks van n termen te vinden, indien de som der termen gelijk a en de som van de vierkanten der termen gelijk b gegeven is?

OPGELOST *door* L. J. ULMAN, G. GRAAFLAND, C. BRUNINGS, S. DIK, CORNZ., M. L. GOEDE, D. HOOLA VAN NOOTEN, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES *en* I. WARNSINCK.

OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

Stel voor de reeks

$x,\ x+y,\ x+2y,$ *enz.* . . . . tot $x+(n-1)y$,

dan is volgens de opgaaf

$$n x + \tfrac{1}{2} n (n-1) y = a,$$

en $nx^2 + n(n-1)xy + \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)y^2 = b$; (*)
men brenge nu de eerste vergelijking in het vierkant, vermenigvuldige de tweede met n en trekke de komende vergelijkingen van elkander af, dan vindt men

$$\tfrac{1}{6}n^2(n-1)(2n-1)y^2 - \tfrac{1}{4}n^2(n-1)^2y^2 = bn - a^2,$$

of
$$\tfrac{1}{12}n^2(n-1)(n+1)y = bn - a^2,$$

en dus
$$y = \sqrt{\frac{12(bn-a^2)}{n^2(n^2-1)}} = \frac{2}{n}\sqrt{\frac{3(bn-a^2)}{n^2-1}};$$

uit de eerste vergelijking is verder

$$x = \frac{a}{n} - \tfrac{1}{2}(n-1)y,$$

brengende dus de gevondene waarde voor y hierin over, zoo verkrijgt men

$$x = \frac{a}{n} - \frac{n-1}{n}\sqrt{\frac{3(bn-a^2)}{n^2-1}},$$

en de reeks is dus

$$\frac{a}{n} - \frac{n-1}{n}\sqrt{\frac{3(bn-a^2)}{n^2-1}},\ \frac{a}{n} - \frac{n-3}{n}\sqrt{\frac{3(bn-a^2)}{n^2-1}},\ \frac{a}{n} - \frac{n-5}{n}\sqrt{\frac{3(bn-a^2)}{n^2-1}},$$

enz. tot $\frac{a}{n} - \frac{n-(2n-1)}{n}\sqrt{\frac{3(bn-a^2)}{n^2-1}}$.

Indien bijv. gegeven was $n=4$, $a=52$, $b=756$, zoude men vinden $\sqrt{\frac{3(bn-a^2)}{n^2-1}} = 8$, $y=4$, $x=7$ en dan zoude de reeks zijn 7, 11, 15 en 19; waren de gegevens $n=5$, $a=90$, $b=2110$, dan zoude men hebben $\sqrt{\frac{3(bn-a^2)}{n^2-1}} = 17\tfrac{1}{2}$, $y=7$, $x=4$ en de reeks zoude alsdan zijn 4, 11, 18, 25 en 32; enz.

CCXLI. VOORSTEL.

Door J. S. SPEIJER.

Men vraagt naar eene harmonische reeks van vijf termen, waarvan de eerste, vierde en vijfde eene rekenkunstige reeks uitmaken; en waarbij het product, van het verschil der eerste en tweede termen met het verschil der derde en vierde, gelijk is aan den eersten term?

Op-

(*) Men vergelijke de noot op bladz. 412.

OPGELOST *door* J. S. SPEIJER, E. BOAS, Mr. G. W. DE BRUIJN KOPS, C. BRUNINGS, M. L. GOEDE, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, M. G. SNOEK, L. J. ULMAN, D. HOOLA VAN NOOTEN, B. LUBBERS *en* I. WARNSINCK.

OPLOSSING *van* J. S. SPEIJER.

Omdat men voor eene harmonische reeks altijd eene rei van breuken kan nemen, die alle denzelfden teller hebben, maar waarvan de noemers eene rekenkunstige reeks uitmaken, zoo stelle men voor de gevraagde reeks

$$\frac{n}{x+2y},\ \frac{n}{x+y},\ \frac{n}{x},\ \frac{n}{x-y}\ \text{en}\ \frac{n}{x-2y};$$

zullen nu de eerste, vierde en vijfde termen eene rekenkunstige reeks uitmaken, dan moet de som van de eerste en vijfde gelijk zijn aan het dubbeld der vierde; dit geeft de vergelijking

$$\frac{n}{x+2y}+\frac{n}{x-2y}=\frac{2n}{x-y},$$

welke men gemakkelijk herleidt tot

$$x^2-xy=x^2-4y^2,$$

en waaruit men vindt

$$x=4y;$$

hierdoor gaat de gestelde reeks over in

$$\frac{n}{6y},\ \frac{n}{5y},\ \frac{n}{4y},\ \frac{n}{3y}\ \text{en}\ \frac{n}{2y}.$$

Nu is het verschil van de eerste en tweede termen $\frac{n}{30y}$, het verschil der derde en vierde termen is $\frac{n}{12y}$, het product dezer verschillen is $\frac{n^2}{360y^2}$; en, daar dit product gelijk aan den eersten term moet wezen, hebben wij

$$\frac{n^2}{360y^2}=\frac{n}{6y},$$

waaruit men vindt

$$n=60y;$$

derhalve is de gevraagde reeks

10, 12, 15, 20 en 30.

CCXLII. Voorstel.

Door A. C. Belinfante.

Men begeert eenen driehoek te berekenen en te construeren, wanneer gegeven zijn: de loodlijn, die uit den tophoek op de bazis is nedergelaten; en de loodlijnen, die uit het voetpunt der eerstgenoemde loodlijn op de opstaande zijden vallen?

Opgelost *door* A. C. Belinfante, S. T. Boas, C. Brunings, M. L. Gorde, D. Hoola van Nooten, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, L. J. Ulman, I. Warnsinck, M. G. Snorr *en* C. van Schaick.

Oplossing *van* A. C. Belinfante.

Zij ABC (*Fig.* 100) de begeerde driehoek, waarin gegeven zijn de loodlijnen $CD=a$, $DE=b$ en $DF=c$, dan is $CE=\sqrt{(a^2-b^2)}$ en $CF=\sqrt{(a^2-c^2)}$; daar ADC en BDC beide regthoekige driehoeken zijn, uit welker regte hoeken loodlijnen op de schuinsche zijden getrokken zijn, hebben wij de evenredigheden:

$$AC:CD=CD:CE \text{ of } AC:a=a:\sqrt{(a^2-b^2)},$$
$$BC:CD=CD:CF \text{ of } BC:a=a:\sqrt{(a^2-c^2)},$$
$$AD:DE=CD:CE \text{ of } AD:b=a:\sqrt{(a^2-b^2)},$$
$$BD:DF=CD:CF \text{ of } BD:c=a:\sqrt{(a^2-c^2)};$$

uit de twee eerste volgt terstond

$$AC=\frac{a^2}{\sqrt{(a^2-b^2)}},$$

en

$$BC=\frac{a^2}{\sqrt{(a^2-c^2)}},$$

weshalve de beide opstaande zijden bekend zijn.

Uit de twee laatste evenredigheden heeft men

$$AD=\frac{ab}{\sqrt{(a^2-b^2)}} \text{ en } BD=\frac{ac}{\sqrt{(a^2-c^2)}},$$

van welke vergelijkingen de som is

$$AB=a\left\{\frac{b}{\sqrt{(a^2-b^2)}}+\frac{c}{\sqrt{(a^2-c^2)}}\right\};$$

hierdoor ook de derde zijde des driehoeks bekend wordende, is dezelve geheelenal bepaald.

Om den driehoek te construeren merke men op, dat uit de regthoekigheid der driehoeken DEC en DFC volgt, dat de pun-

ten

ten E en F op den omtrek van eenen cirkel liggen, op CD als middellijn beschreven. Men neme dus eene lijn CD = a, beschrijve op dezelve als middellijn eenen cirkel, plaatse in dien cirkel de koorden DE = b en DF = c en trekke de onbepaald verlengde lijnen CE en CF; indien men dan verder in het punt D eene raaklijn aan den cirkel trekt, die het verlengde der lijnen CE en CF in A en B snijdt, zal ABC de begeerde driehoek zijn.

CCXLIII. VOORSTEL.

Door J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz.

In eenen gelijkbeenigen driehoek, waarvan de bazis en hoogte gegeven zijn, is een cirkel beschreven; men vraagt den driehoek te bepalen, die door de vereeniging der raakpunten ontstaat?

OPGELOST *door* J. BADON GHIJBEN, J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz., C. BRUNINGS, M. L. GOEDE, D. HOOLA VAN NOOTEN, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, B. LUBBERS, L. J. ULMAN *en* I. WARNSINCK.

OPLOSSING *van* J. BADON GHIJBEN.

Laat ABC (*Fig.* 101) de gegevene gelijkbeenige driehoek voorstellen, waarin een cirkel beschreven is, de zijden in D, E en F rakende, dan zullen wij den driehoek DEF moeten bepalen. Nu is het vooreerst klaar, dat het raakpunt D tevens het voetpunt der loodlijn is, die uit C op AB wordt nedergelaten; ten andere weet men, dat de twee raaklijnen, die uit een punt buiten een' cirkel aan dien cirkel getrokken worden, even lang zijn; derhalve is AD = AF = BD = BE; omdat verder *hoek* A = *hoek* B is, zijn ADF en BDE twee gelijke en gelijkvormige gelijkbeenige driehoeken; bij gevolg is DF = DE, en dus de driehoek DEF almede gelijkbeenig. Omdat wijders CF = CE en CA = CB is, is EF evenwijdig met AB, en dus ook

hoek ADF = *hoek* AFD = *hoek* BDE = *hoek* BED = *hoek* DFE = *hoek* DEF,

bij gevolg is de driehoek DEF met de driehoeken ADF en BDE gelijkhoekig en dus ook gelijkvormig; men heeft alzoo de evenredigheid

$$AF : DF = DF : FE,$$

weshalve DF middenevenredig tusschen AF en FE is.

Laat nu gegeven zijn AB = $2a$ en CD = b, dan is AD = AF = BD = BE = a en AC = BC = $\sqrt{(a^2 + b^2)}$; en men heeft FE

5 deelbaar wezen; de vorm (A) is dus ook altijd door 5 deelbaar.

Daar wij nu aangetoond hebben, dat de vorm (A) altijd door 2, door 3 en door 5 deelbaar is, volgt hieruit dat dezelve ook door $2 \times 3 \times 5 = 30$, en bij gevolg dat het product der drie zijden des driehoeks altijd door 60 deelbaar is.

CCXLV. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

Eene regte cirkelvormige kegel in twee gelijke of ongelijke deelen verdeeld zijnde, door een vlak dat het oppervlak des kegels volgens eene parabool doorsnijdt, verlangt men de zwaartepunten der deelen te vinden?

Opgelost *door* J. Badon Ghijben *en* H. van Blanken.

I. Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Laat ABC (*Fig.* 102) eenen kegel voorstellen, gesneden door een parabolisch vlak DEF, loodregt op den asse-driehoek ABC staande, dan zullen wij de zwaartepunten der deelen ACDEF en DEFB moeten bepalen. Nu is het vooreerst klaar, dat deze zwaartepunten in het vlak ABC moeten gelegen zijn, en wij zullen dus de afstanden dier zwaartepunten tot nog twee andere vlakken moeten berekenen; hiertoe kiezen wij vooreerst het grondvlak des kegels, en ten tweede een vlak LMN, door het middelpunt O des grondvlaks evenwijdig aan het vlak DEF gebragt.

Nemen wij op OB een stuk $OS = x$, brengen wij door het punt S een vlak PQR evenwijdig met de vlakken DEF en LMN en trekken wij uit S een loodlijn ST op LO, dan kunnen wij de inhoud der parabool PQR, vermenigvuldigd met de differentiaal der lijn ST, als eene differentiaal van den inhoud van den kegel en deszelfs deelen ACDEF en DEFB aanmerken; dezen inhoud I noemende, hebben wij dus

$$\partial I = Inh. parab. PQR \times \partial . ST.$$

Laat nu gegeven zijn $AO = OB = r$, $hoek ACO = hoek BCO = \alpha$, dan is, omdat $hoek OST = hoek ACO = \alpha$ is,

$$ST = OS \times Cos. OST = x\, Cos.\, \alpha,$$

en $$\partial . ST = \partial x\, Cos.\, \alpha;$$

uit den gelijkbeenigen driehoek PSB hebben wij, omdat $SB = r - x$

en

en *hoek* PSB $=$ *hoek* CAO $= 90^\circ - \alpha$ is,

$$PS = \tfrac{1}{2} SB \times Sec.\, PSB = \tfrac{1}{2}(r - x)\, Cosec.\, \alpha,$$

uit de eigenschap des cirkels heeft men

$$QS = \sqrt{AS \times SB} = \sqrt{(r+x)(r-x)} = \sqrt{(r^2 - x^2)},$$

en dus is

$$Inh\ parab.\, PQR = \tfrac{4}{3} PS \times QS = \tfrac{2}{3}(r - x)\, Cosec.\, \alpha \sqrt{(r^2 - x^2)};$$

dezen inhoud nu vermenigvuldigende met $\partial . ST = \partial x\, Cos.\, \alpha$, verkrijgt men, daar $Cos.\, \alpha\, Cosec.\, \alpha = Cot.\, \alpha$ is,

$$\partial I = \tfrac{2}{3} Cot.\, \alpha\, (r - x)\, \partial x \sqrt{(r^2 - x^2)}.$$

Het zwaartepunt z der parabool PQR is, gelijk men weet, op de as PS zoodanig gelegen, dat men heeft $Pz = \tfrac{3}{5} PS$ en $Sz = \tfrac{2}{5} PS$; de afstanden zz' en zz'' van dit punt z tot de aangenomene vlakken van momenten BMN en LMN worden dus gemakkelijk gevonden; men heeft hiertoe uit den driehoek Szz'

$$zz' = Sz \times Sin.\, PSB = \tfrac{2}{5} PS \times Sin.\, PSB =$$

$$= \tfrac{2}{5} . \tfrac{1}{2}(r - x)\, Cosec.\, \alpha\, Cos.\, \alpha = \tfrac{1}{5}(r - x)\, Cot.\, \alpha,$$

zijnde voorts klaarblijkelijk

$$zz'' = ST = x\, Cos.\, \alpha.$$

Noemen wij nu A de afstand van het gezochte zwaartepunt tot het vlak BMN, A′ deszelfs afstand tot het vlak LMN, zoo hebben wij, volgens de gewone leerwijze ter bepaling der zwaartepunten,

$$A = \frac{\int zz' \times \partial I}{\int \partial I} \quad \text{en} \quad A' = \frac{\int zz'' \times \partial I}{\int \partial I},$$

of zoo wij hierin voor ∂I, zz' en zz'' de vroeger gevondene waarden stellen,

$$A = \tfrac{1}{5} Cot.\, \alpha . \frac{\int (r - x)^2 \partial x \sqrt{(r^2 - x^2)}}{\int (r - x)\, \partial x \sqrt{(r^2 - x^2)}},$$

en

$$A' = Cos.\, \alpha . \frac{\int (r - x)\, x\, \partial x \sqrt{(r^2 - x^2)}}{\int (r - x)\, \partial x \sqrt{(r^2 - x^2)}};$$

nu is

$$\int (r-x)^2 \partial x \sqrt{(r^2 - x^2)} = r^2 \int \partial x \sqrt{(r^2 - x^4)} - 2r \int x \partial x \sqrt{(r^2 - x^2)} + \int x^2 \partial x \sqrt{(r^2 - x^2)},$$

$$\int (r-x)\, x \partial x \sqrt{(r^2 - x^2)} = r \int x \partial x \sqrt{(r^2 - x^2)} - \int x^2 \partial x \sqrt{(r^2 - x^2)},$$

$$\int (r-x)\, \partial x \sqrt{(r^2 - x^2)} = r \int \partial x \sqrt{(r^2 - x^2)} - \int x \partial x \sqrt{(r^2 - x^2)};$$

en (zie I. R. SCHMIDT, *Diff. en Integr. Rek.* § 206.)

$$\int \partial x \sqrt{(r^2-x^2)} = \tfrac{1}{2} x \sqrt{(r^2-x^2)} + \tfrac{1}{2} r^2 \, Boog. Sin. \frac{x}{r},$$

$$\int x \partial x \sqrt{(r^2-x^2)} = -\tfrac{1}{3} \sqrt{(r^2-x^2)^3},$$

$$\int x^2 \partial x \sqrt{(r^2-x^2)} = \tfrac{1}{4}(x^3 - \tfrac{1}{2} x r^2) \sqrt{(r^2-x^2)} + \tfrac{1}{8} r^4 \, Boog \; Sin. \frac{x}{r};$$

door ſubſtitutie dezer integralen, vinden wij, kortheidshalve $\sqrt{(r^2-x^2)} = y$ ſtellende,

$$A = \tfrac{1}{35} \, Cot. \alpha \, \frac{16 r y^3 + 6 x^3 y + 9 r^2 x y + 15 r^4 \, Boog \; Sin. \frac{x}{r} + c}{2 y^3 + 3 r x y + 3 r^3 \, Boog \; Sin. \frac{x}{r} + c''},$$

$$A' = -\tfrac{1}{4} \, Cos. \alpha \, \frac{8 r y^3 + 6 x^3 y - 3 r^2 x y + 3 r^4 \, Boog \; Sin. \frac{x}{r} + c'}{2 y^3 + 3 r x y + 3 r^3 \, Boog \; Sin. \frac{x}{r} + c''}.$$

Nemen wij de integralen van $x = -r$ tot $x = +r$, dan vinden wij, voor het zwaartepunt van den geheelen kegel, naar behooren

$$A = \tfrac{3}{8} r \, Cot. \alpha, \quad A' = -\tfrac{1}{4} \, Cos. \alpha.$$

Indien nu gegeven is $OG = a$, zullen wij de integralen van $x = -r$ tot $x = -a$ nemende en kortheidshalve $\sqrt{(r^2-a^2)} = b$ ſtellende, ter bepaling van het zwaartepunt van het deel ACDEF hebben

$$A = \tfrac{1}{20} \, Cot. \alpha \, \frac{32 r b^3 - 12 a^3 b - 18 r^2 a b - 30 r^4 \, Boog \; Sin. \frac{a}{r} + 15 r^4 \pi}{4 b^3 - 6 r a b - 6 r^3 \, Boog \; Sin. \frac{a}{r} + 3 r^3 \pi},$$

$$A' = -\tfrac{1}{4} \, Cos. \alpha \, \frac{16 r b^3 - 12 a^3 b + 6 r^2 a b - 6 r^4 \, Boog \; Sin. \frac{a}{r} + 3 r^4 \pi}{4 b^3 - 6 r a b - 6 r^3 \, Boog \; Sin. \frac{a}{r} + 3 r^3 \pi};$$

Hierin $a = 0$ en dus $b = r$ nemende, vinden wij voor het zwaartepunt van het ligchaam ACLMN

$$A = \tfrac{1}{20} r \, Cot. \alpha \, \frac{32 + 15 \pi}{4 + 3 \pi}, \quad A' = -\tfrac{1}{4} r \, Cos. \alpha \, \frac{16 + 3 \pi}{4 + 3 \pi}.$$

Nemen wij echter onze integralen van $x = -a$ tot $x = r$, dan vinden wij voor het zwaartepunt van het deel DEFB

$A =$

$$A = \frac{1}{20} Cot. \alpha \frac{32 r b^3 - 12 a^2 b - 18 r^2 ab - 30 r^4 \text{ Boog Sin.} \frac{a}{r} - 15 r^4 \pi}{4 b^3 - 6 r a b - 6 r^3 \text{ Boog Sin.} \frac{a}{r} - 3 r^3 \pi},$$

$$A' = -\frac{1}{4} Cos. \alpha \frac{16 r b^3 - 12 a^2 b + 6 r^2 ab - 6 r^4 \text{ Boog Sin.} \frac{a}{r} - 3 r^4 \pi}{4 b^3 - 6 r a b - 6 r^3 \text{ Boog Sin.} \frac{a}{r} - 3 r^3 \pi};$$

hierin weder $a = 0$ en $b = r$ nemende, vinden wij voor het zwaartepunt van het ligchaam LMNB

$$A = \frac{1}{20} r\, Cot. \alpha \frac{32 - 15 \pi}{4 - 3 \pi}, \quad A' = -\frac{1}{4} r\, Cos. \alpha \frac{16 - 3 \pi}{4 - 3 \pi}.$$

II. OPLOSSING *van* J. BADON GHIJBEN.

Wij kunnen ter bepaling van de gevraagde zwaartepunten eenen anderen meer eenvoudigen weg inslaan. Nemen wij namelijk op AC een stuk $AY = \frac{3}{4} AC$ en trekken wij de lijn BY, dan zal deze lijn BY de parabool PQR klaarblijkelijk in deszelfs zwaartepunt z snijden. Hetzelfde heeft plaats met al de parabolische doorsneden, die evenwijdig met DEF zijn, en wij kunnen dus het geheele gewigt van den kegel of van deszelfs deelen, als in de lijn BY of deszelfs deelen vereenigd beschouwen, mits elk punt z dezer lijn BY aanmerkende als met het geheele gewigt der bij dat punt z behoorende parabool PQR belast te zijn.

De gevraagde zwaartepunten liggen derhalve in de lijn BY; nemen wij nu op deze lijn het punt B voor oorsprong der momenten aan, en noemen wij A″ de afstand van het te bepalen zwaartepunt tot het punt B, overigens alles door dezelfde letters als in de vorige oplossing voorstellende, dan hebben wij weder, volgens de gewone leerwijze ter bepaling der zwaartepunten,

$$A'' = \frac{\int Bz \times \delta I}{\int \delta I};$$

nu is uit den driehoek BSz

$$Bz = \sqrt{\{SB^2 + Sz^2 - 2\, SB \times Sz \times Cos.\, zSB\}},$$

hierin $zSB = 90° - \alpha$, $SB = r - x$, $Sz = \frac{3}{4} PS$ en, zoo als vroeger gevonden is, $PS = \frac{1}{2}(r - x) Cosec. \alpha$ substituerende, vindt men na herleiding

$$Bz = \frac{1}{8}(r - x)\sqrt{(16 + Cot^2. \alpha)};$$

den

deze waarde van B x en de vroeger reeds gevondene voor δI in onze uitdrukking voor A' overbrengende, komt er na herleiding

$$A' = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{\int (r-x)^2 \delta x \sqrt{(r^2-x^2)}}{\int (r-x) \delta x \sqrt{(r^2-x^2)}} \sqrt{(16 + Cot^2 . a)};$$

nemen wij derhalve deze integralen tusschen de behoorlijke grenzen, dan is het gevraagde zwaartepunt bepaald.

Deze integralen reeds in de vorige oplossing gevonden zijnde, zouden wij dezelve kunnen overnemen, doch nog gemakkelijker is het, de bovenstaande waarde voor A' met de vroeger gevondene

$$A = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{\int (r-x)^2 \delta x \sqrt{(r^2-x^2)}}{\int (r-x) \delta x \sqrt{(r^2-x^2)}} . Cot. a$$

te vergelijken; waarbij wij, op de bij die integralen te voegen standvastigen, geen acht behoeven te slaan, om dat alles tusschen dezelfde grenzen moet geïntegreerd worden. Uit vergelijking der waarden van A' en A volgt dan

$$A' = \frac{A \sqrt{(16 + Cot^2 . a)}}{Cot. a} = A \sqrt{(1 + 16 Tang^2 . a)};$$

en men zal nu, in elk bijzonder geval, de waarde van A' vinden, door de waarde van A, die tot dat bijzonder geval behoort, uit de vorige oplossing te nemen en in de bovenstaande vergelijking over te brengen.

CCXLVI. VOORSTEL.

Door J. BADON GHIJBEN.

Indien eene regte lijn om eene andere regte lijn, die niet in hetzelfde vlak ligt, als as omwentelt, vraagt men aan een gegeven punt van het gebogen oppervlak, dat hierdoor beschreven wordt, een rakend vlak te brengen; ingeval dit rakend vlak het gebogen oppervlak tevens doorsnijdt, begeert men ook die doorsnede te bepalen?

OPGELOST *door* J. BADON GHIJBEN *en* H. VAN BLANKEN.

OPLOSSING *van* J. BADON GHIJBEN.

Laat OZ (*Fig.* 103) de lijn voorstellen waarom de omwenteling plaats heeft, laat AB de omwentelende lijn wezen, en zij OA de kortste afstand van deze beide lijnen, zoodat de hoeken ZOA en BAO beide regt zijn; nemen wij dan het punt O voor oorsprong der coördinaten, de lijn OZ voor de as der z, en de lijnen OX en OY, beide loodregt op OZ en onderling loodregt op elkander

zijn.

zijnde, respectievelijk voor de asfen der x en y aan, dan ligt QA klaarblijkelijk in het vlak der xy en de ftand der bewegende lijn, ten opzigte van de as OZ, om welke de omwenteling plaats heeft, zal bepaald zijn, door als gegeven aan te nemen $OA = a$ en de hoek, die de lijn AB met hare projectie AB′ op het vlak der xy maakt, $BAB' = \alpha$.

Nemen wij nu in AB een willekeurig punt P aan, dan zal dit een onbepaald punt zijn van het gebogen oppervlak, dat de lijn AB befchrijft; ftellen wij om de vergelijking van dat oppervlak te bepalen, de coördinaten van het punt P, $PP' = z$, $P'M = y$, $P'N = x$, dan hebben wij, OP′ getrokken zijnde, omdat de hoek OAP′ regt is,

$$OP'^2 = OA^2 + AP'^2,$$

of, omdat $OP'^2 = x^2 + y^2$, $OA = a$ en, uit den regthoekigen driehoek AP′P, $AP' = PP' \times Cot. PAP' = z\,Cot.\,\alpha$ is,

$$x^2 + y^2 = a^2 + z^2\,Cot^2.\,\alpha,$$

zoodat de vergelijking van het bedoelde oppervlak is

$$x^2 + y^2 - z^2\,Cot^2.\,\alpha = a^2 \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

Stelt men in deze vergelijking $y = o$, dan verkrijgt men, voor de doorfnede van het gebogen oppervlak met het vlak der xz de vergelijking

$$x^2 - z^2\,Cot^2.\,\alpha = a^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

welke klaarblijkelijk de middelpunts-vergelijking van eene hyperbool is, welker halve eerfte en tweede asfen refpectievelijk a en $a\,Tang.\,\alpha$ zijn; neemt men dus $Oa = a$, $Oc = a\,Tang.\,\alpha$, en befchrijft men op deze lijnen als halve asfen, in het vlak ZOX de hyperbool ab, dan zal dezelve de doorfnede van het gebogen vlak met het vlak ZOX zijn.

Neemt men in (1) $z = o$, dan verkrijgt men

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

voor de vergelijking van den cirkel Aa, die het punt A gedurende de omwenteling befchrijft; geeft men echter aan z eene andere ftandvastige waarde, bijv. $z = BB' = b$, dan verkrijgt men

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2\,Cot^2.\,\alpha \quad \ldots\ldots \quad (4),$$

voor de vergelijking van de projectie B′b′ des cirkels Bb, welke het punt B befchrijft, en waarvan $OB' = Ob' = CB = Cb = \sqrt{(a^2 + b^2\,Cot^2.\,\alpha)}$ de ftraal is. Daar men nu denzelfden cirkel

Bb

ab verkrijgt, of men het punt b der hyperbool ab, dan wel, of men het punt B van de lijn AB om de lijn OZ laat omwentelen, is het klaar, dat ons gebogen oppervlak eene omwentelings-hyperboloïde is, voortgebragt door de omwenteling der hyperbool ab om de as OZ.

Denkt men door het punt O evenwijdig met AB eene lijn getrokken, dan zal dezelve, almede om OZ omwentelende, een gewoon kegelvlak beschrijven, dat het vlak ZOX zal snijden, volgens de assymptoot OQ der hyperbool ab; dit kegelvlak zal dus eene assymptote van het gebogen vlak zijn.

Laat om verder te gaan x', y', z', de coördinaten van dat punt van ons gebogen oppervlak zijn, waardoor men een rakend vlak wil brengen, dan heeft men in het algemeen voor de vergelijking van dit rakende vlak

$$(z-z')=(x-x')\frac{\partial z}{\partial x}+(y-y')\frac{\partial z}{\partial y},$$

maar uit de vergelijking (1) vindt men

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{z\,Cot^2.\alpha},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{z\,Cot^2.\alpha},$$

door substitutie dezer waarden, met in het oog houding, dat men a^2 in plaats van $x^2+y^2-z^2 Cot^2.\alpha$ kan schrijven, verkrijgt men, voor de vergelijking van het vlak, dat ons gebogen oppervlak in een punt, welks coördinaten x', y' en z' zijn, aanraakt

$$xx'+yy'-zz'\,Cot^2.\alpha=a^2 \quad \ldots\ldots \quad (5).$$

Uit de gedaante van het gebogen oppervlak, zoo als wij die hebben leeren kennen, volgt ten duidelijkste, dat hetzelve door elk rakend vlak tevens doorsneden moet worden; het gebogen oppervlak van den tweeden graad zijnde, moet deze doorsnede klaarblijkelijk eene kegelsnede zijn, en ons blijft alleen over te onderzoeken welke soort van kegelsnede het zijn kan. Daar echter elke kegelsnede eene gelijksoortige tot projectie heeft, behoeven wij dit onderzoek alleen tot de projectie dier doorsnede op eene der vlakken, bijv. op dat der xy, te bepalen.

Hiertoe elimineren wij z tusschen de vergelijkingen (1) en (5), hetwelk gevoegelijk aldus geschieden kan; men schrijve de vergelijking (5) in de gedaante

$$xx'+yy'-a^2=zz'\,Cot^2.\alpha,$$

waar-

waarvan het vierkant is

$$(xx' + yy' - a^2)^2 = z^2 Cot^2. \alpha \times z'^2 Cot^2. \alpha;$$

hierin volgens (1) substitueerende $z^2 Cot^2. \alpha = x^2 + y^2 - a^2$ en $z'^2 Cot^2. \alpha = x'^2 + y'^2 - a^2$, verkrijgt men

$$(xx' + yy' - a^2)^2 = (x^2 + y^2 - a^2)(x'^2 + y'^2 - a^2),$$

hetwelk gemakkelijk herleid wordt tot

$$(y'^2 - a^2) x^2 - 2 x' y' x y + (x'^2 - a^2) y^2 + 2 a^2 x' x + 2 a^2 y' y - a^2 (x'^2 + y'^2) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6),$$

deze is nu de vergelijking van de projectie der bedoelde doorsnede op het vlak der xy; het viervoudige product der coëfficienten, die x^2 en y^2 in deze vergelijking hebben, is

$$4(x'^2 - a^2)(y'^2 - a^2) = 4 x'^2 y'^2 - 4 a^2 (x'^2 + y'^2 - a^2)$$
$$= 4 x'^2 y'^2 - 4 a^2 z'^2 Cot^2. \alpha,$$

dit viervoudig product is dus, mits slechts z' niet gelijk nul zij, altijd kleiner dan het vierkant $4 x'^2 y'^2$ van den coëfficient van xy, de vergelijking (6) behoort dus, zoo lang z' eenige waarde heeft, altijd tot eene hyperbool; en de doorsnede van het rakende vlak met het gebogen oppervlak moet dus insgelijks eene hyperbool zijn. Is echter $z' = 0$, dat wil zeggen, neemt men het punt des oppervlaks, waardoor het rakend vlak gebragt moet worden, in den omtrek van den cirkel A a, dan vindt men wel dadelijk uit (5)

$$xx' + yy' = a^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7),$$

voor de vergelijking van de projectie der doorsnede op het vlak der xy, maar deze vergelijking tot eene regte lijn behoorende, zal het, om die doorsnede nader te bepalen, noodig zijn, ook nog derzelver projectie op een der andere vlakken, bijv. op dat der yz, te kennen; daar het echter volkomen onverschillig is, welk punt van den cirkel A a men voor het raakpunt kiest, kunnen wij daarvoor gemakshalve het punt a nemen, alsdan is $z' = 0$, $y' = 0$ en $x' = a$; elimineeren wij dus x tusschen de vergelijkingen (1) en (5), na daarin vooraf $z' = 0$, $y' = 0$ en $x' = a$ genomen te hebben, en stellen wij tevens in (7) $y' = 0$ en $x' = a$, dan vinden wij

$$y = \pm z \, Cot. \alpha \; \text{en} \; x = a,$$

voor de vergelijkingen van de projectiën der doorsnede van het gebogen vlak met een rakend vlak, in het punt a aangebragt.

De-

Deze doorsnede is dus een stelsel van twee regte lijnen, gelegen in een vlak loodregt op OX door het punt a gaande, en ter weerszijde met het vlak ZOX eenen hoek α makende.

Aanmerking. Verbeeld men zich eene lijn AD, insgelijks loodregt op OA zijnde en met het vlak XOY eenen hoek $DAD' = BAB' = \alpha$ makende, dan zal deze lijn AD, om OZ als as omwentelende, volkomen hetzelfde oppervlak als de lijn AB beschrijven; want, om de vergelijking voor het oppervlak door AD beschreven te bekomen, zoude men in (1) slechts α door $180° - \alpha$ moeten vervangen, hetgeen aan de vergelijking (1) geene verandering kan toebrengen, daar $Cot.\alpha$ in dezelve niet anders dan in de tweede magt voorkomt. Voorts wordt uit het boven gezegde duidelijk, dat indien door het punt A van ons gebogen oppervlak een rakend vlak aan hetzelve gebragt wordt, juist de lijnen AB en AD de gemeene doorsneden van de beide vlakken zullen wezen. Wij kunnen nog uit het behandelde voorstel afleiden, *dat het altijd mogelijk is, om op het oppervlak van eene omwentelings hyperboloïde twee regte lijnen te trekken, die elkander onder denzelfden hoek snijden, als de assymptoten van de omwentelende hyperbool.*

CCXLVII. Voorstel.

Door Mr. G. W. de Bruijn Kops.

Men vraagt eene reeks van geheele getallen a, b, c, d, e, f, enz. te vinden, die zelf geene vierkanten zijn, maar waarvan de producten twee aan twee vierkanten moeten wezen; in dier voege, dat de wortels van ab, ac, ad, ae, af, enz. eene rekenkunstige reeks vormen, waarvan 4 het verschil is; dat de wortels van bd, bc, be, bf, enz. eene rekenkunstige reeks geven, 6 tot verschil hebbende; dat de wortels van cd, ce, cf, enz. eene dergelijke reeks uitmaken, welker verschil 8 is, en zoo vervolgens, het verschil telkens met 2 opklimmende?

Opgelost door L. J. Ulman, Mr. G. W. de Bruijn Kops, D. Hoola van Nooten, D. van Lankeren Matthes, I. Warnsinck, C. F. Julius en C. Brunings.

Oplossing van L. J. Ulman.

Volgens het voorstel is

$$\sqrt{ad} - \sqrt{ac} = (\sqrt{d} - \sqrt{c}) \times \sqrt{a} = 4,$$

en

en $\sqrt{bd}-\sqrt{bc}=(\sqrt{d}-\sqrt{c})\times\sqrt{b}=6$,
hieruit volgt dus

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3} \quad \text{en} \quad \frac{a}{b}=\frac{4}{9};$$

even zoo is

$$\sqrt{be}-\sqrt{bd}=(\sqrt{e}-\sqrt{d})\times\sqrt{b}=6,$$

en $$\sqrt{ce}-\sqrt{cd}=(\sqrt{e}-\sqrt{d})\times\sqrt{c}=8;$$

waaruit wederom volgt

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4} \quad \text{en} \quad \frac{b}{c}=\frac{9}{16};$$

enz. Men ziet hieruit, dat de getallen a, b, c, d, *enz.* tot elkander moeten staan als 4, 9, 16, 25, *enz.* Stellen wij dus voor de gevraagde reeks

$$4x,\ 9x,\ 16x,\ 25x,\ \text{enz.}$$

dan is $$\sqrt{ab}=\sqrt{36x^2}=6x,$$

en $$\sqrt{ac}=\sqrt{64x^2}=8x;$$

daar nu het verschil $\sqrt{ac}-\sqrt{ab}=4$ moet zijn, is ook $8x-6x=4$, bij gevolg $x=2$ en derhalve de gevraagde reeks

$$8,\ 18,\ 32,\ 50,\ \text{enz.}$$

waardoor dus de overige voorwaarden, of de getallen en derzelver producten twee aan twee al dan niet geheelen of vierkanten zijn, overtollig worden.

CCXLVIII. VOORSTEL.

Door G. RAMAKERS.

A *en* B *speelen tegen elkander met twee gewone dobbelsteenen, op deze voorwaarde: dat* A *zal winnen als hij* 6 *oogen werpt; maar dat* B *zal winnen als hij* 7 *oogen werpt;* A *zal eerst eenen worp doen, daarna* B *twee worpen achtereen; daarna* A *weder twee worpen, en zoo vervolgens, tot dat de eene of de ander zal winnen. De vraag is in welke reden de kans van* A *tot die van* B *staat?* (*).

Op-

(*) Dit en de twee volgende voorstellen, betreffende de waarschijnlijkheids-rekening, zijn door den beroemden C. HUIJGENS, met opgave der antwoorden, doch zonder oplossing, opgegeven; de Voorsteller heeft dezelve getrokken uit de *Mathematische Oeffeningen* van FRANCISCUS VAN SCHOOTEN; en worden dezelve mede gevonden in de door Zijn Ed. uitgegevene *Rekenkunstige Verscheidenheden.*

OPGELOST *door* F. J. STAMKART, L. J. UILMAN, C. F. JULIUS, D. HOOLA VAN NOOTEN *en* G. RAMAKERS.

I. OPLOSSING *van* F. J. STAMKART.

Herinneren wij kortelijk, alvorens tot de oplossing van dit en de twee volgende voorstellen over te gaan, dat, in de wiskunde, de waarschijnlijkheid of kans van eenig voorval uitgedrukt wordt door eene breuk, hebbende tot teller het aantal *mogelijke* gevallen, waarin dit voorval gebeuren kan, en tot noemer het *geheele* aantal *mogelijke* gevallen, zoowel die waarin het voorval gebeurt, als die waarin het niet gebeurt; waarbij wel dient opgelet te worden, dat de genoemde *mogelijke* gevallen, alle even ligt moeten kunnen gebeuren, zoodat men vooraf geene hoegenaamde reden heeft, om het eene geval eerder dan het andere te verwachten. Bij voorbeeld: de kans om, uit een goed dooreen geschud spel kaarten, een aas te trekken, is $\frac{4}{52}$, omdat er 4 azen in het spel zijn, en in het geheel 52 kaarten, ieder van welke het even mogelijk is, dat getrokken zal worden.

Verder, dat de kans van het zamenloopen van twee of meer voorvallen gevonden wordt, door de kansen, voor elk dier voorvallen in het bijzonder, met elkander te vermenigvuldigen; want, indien een voorval in m gevallen gebeuren kan, en in n andere gevallen niet, dan is de kans van dit voorval $\frac{m}{m+n}$; en indien een ander voorval p gevallen voor en q tegen zich heeft, dan is de kans van dit andere voorval $\frac{p}{p+q}$; nu is het duidelijk, dat elk der $m+n$ gevallen kan zamenloopen met een der $p+q$ andere gevallen, en dat er alzoo $(m+n)(p+q)$ gevallen in het geheel mogelijk zijn; terwijl even zoo elk der m gevallen, waarin het eene voorval gebeurt, zich kan verbinden met een der p gevallen, waarin het andere voorval plaats heeft, en er dus mp gevallen zijn, waarin *beide* de voorvallen plaats hebben; dierhalven is de kans van het zamenloopen dezer twee voorvallen $\frac{mp}{(m+n)(p+q)}$ $=\frac{m}{m+n}\times\frac{p}{p+q}$; en zoo met meerdere voorvallen. Bij voorbeeld: de kans, om met twee dobbelsteenen, met den eersten 4 of

of 6 en met den tweeden 2, 3 of 5 te werpen, is $\frac{2}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{6}{36}$, omdat het boven vallen van 4 of 6 op den eersten dobbelsteen, tot kans heeft $\frac{2}{6}$, en van 2, 3 of 5 op den tweeden dobbelsteen $\frac{3}{6}$; ware het onverschillig op welken der beide dobbelsteenen 4 of 6 of 2, 3 of 5 moest vallen, dan zoude de kans hiervan het dubbel van de voorgaande, of $2\times\frac{6}{36}=\frac{1}{3}$ zijn.

Passen wij het bovenstaande op het onderhavige voorstel toe. Bij eenen worp met twee steenen kunnen, even als wanneer men achtervolgende tweemaal met eenen steen werpt, 36 gevallen plaats hebben, en van deze 36 gevallen zijn er 5 ten voordeele van A, als A werpt, namelijk 1 en 5, 2 en 4, 3 en 3, 4 en 2, 5 en 1; doch B heeft, bij zijnen worp, 6 gevallen voor zich, namelijk 1 en 6, 2 en 5, 3 en 4, 4 en 3, 5 en 2, 6 en 1, zoodat

A spelende, eene kans zal hebben, om te winnen $=\frac{5}{36}$,
en om niet te winnen $=\frac{31}{36}$,
en B spelende, heeft eene kans, om te winnen . . . $=\frac{6}{36}$
en om niet te winnen . . $=\frac{30}{36}$.

Het is verder duidelijk, dat er mogelijkheid bestaat, dat dit spel, reeds bij den eersten worp, eindigen zal, zoo ook dat hetzelve zal eindigen, bij den tweeden, derden, vierden, n^{den} worp; zijnde n een geheel onbepaald getal, dat men zoo groot kan onderstellen als men goedvindt; want het is klaar, dat het, bij voorbeeld, *mogelijk* is, dat, zelfs na 10000 of nog meer worpen, A geen 6 en B geen 7 zal geworpen hebben, schoon de kans, dat het spel zich zoo ver zoude uitstrekken, in waarheid zeer gering is.

Hieruit volgt, dat het winnen van A of B, bij eenen *zooveelsten* worp, afhangt van het zamenloopen van twee omstandigheden, namelijk, ten eersten, dat het spel, vóór dien worp, niet reeds gewonnen zal zijn, en, ten tweede, dat, bij dien worp, als A speelt, 6, of, als B speelt, 7 oogen boven zullen vallen. Diensvolgens hebben wij voor eenen bepaalden worp:

$$\left.\begin{array}{l}\textit{Kans van A om met den}\\ n^{den}\textit{ worp te winnen}\end{array}\right\}=\frac{5}{36}\times\left\{\begin{array}{l}\textit{Kans dat het spel vóór den } n^{den}\\ \textit{worp niet reeds gewonnen zal zijn.}\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\textit{Kans van A om met den}\\ n^{den}\textit{ worp niet te winnen}\end{array}\right\}=\frac{31}{36}\times\left\{\begin{array}{l}\textit{Kans dat het spel vóór den } n^{den}\\ \textit{worp niet reeds gewonnen zal zijn.}\end{array}\right.$$

voor de kanſen van B, om al of niet te winnen, heeft men dezelfde vergelijkingen, mits men $\frac{6}{36}$ en $\frac{30}{36}$ in plaats van $\frac{5}{36}$ en $\frac{31}{36}$ ſchrijve.

Nu zal het gemakkelijk vallen het volgende tafeltje zamen te ſtellen, dat op het voorgaande beruſt:

	Kanſen van A om te winnen.	Kanſen van B om te winnen.	Kanſen van A of B om niet te winnen; *met andere woorden:* Kanſen dat het ſpel voortgezet zal worden.
Bij den 1ſten worp	$\frac{5}{36}$	o	$\frac{31}{36}$
„ „ 2den „	o	$\frac{31}{36}\times\frac{6}{36}$	$\frac{31}{36}\times\frac{30}{36}$
„ „ 3den „	o	$\frac{31.30}{36^2}\times\frac{6}{36}$	$\frac{31.30}{36^2}\times\frac{30}{36}$
„ „ 4den „	$\frac{31.30^2}{36^3}\times\frac{5}{36}$	o	$\frac{31.30^2}{36^3}\times\frac{31}{36}$
„ „ 5den „	$\frac{31^2.30^2}{36^4}\times\frac{5}{36}$	o	$\frac{31^2.30^2}{36^4}\times\frac{31}{36}$
„ „ 6den „	o	$\frac{31^3.30^2}{36^5}\times\frac{6}{36}$	$\frac{31^3.30^2}{36^5}\times\frac{30}{36}$
„ „ 7den „	o	$\frac{31^3.30^3}{36^6}\times\frac{6}{36}$	$\frac{31^3.30^3}{36^6}\times\frac{30}{36}$
„ „ 8ſten „	$\frac{31^3.30^4}{36^7}\times\frac{5}{36}$	o	$\frac{31^3.30^4}{36^7}\times\frac{31}{36}$
	enz.	*enz.*	*enz.*

Deze reekſen kunnen onbepaald voortgezet worden, en de ſommen der beide eerſte zullen, in dat geval, de kanſen van A en B, bij dit ſpel, vóór dat hetzelve begonnen is, voorſtellen; want het is duidelijk, dat de geheele kans, van A, bij voorbeeld, de ſom moet zijn van de kanſen, die hij heeft, om bij den eerſten, vierden, vijfden, negenden, enz. worp te winnen; en zoo ook met B. Wij behoeven alzoo deze ſommen ſlechts te zoeken,

ken, en door elkander te deelen, om de reden van de kans van A tot die van B te vinden.

Stellen wij dus deze sommen, dat is de gevraagde kansen van A en B, respectievelijk door α en β voor, en zij kortheidshalve $\frac{31}{36} = a$, $\frac{30}{36} = b$, en dus $\frac{5}{36} = 1 - a$, $\frac{6}{36} = 1 - b$, dan hebben wij, volgens het bovenstaande tafeltje,

$$\alpha = (1-a) + ab^2(1-a) + a^2b^2(1-a) + a^3b^4(1-a) + \text{enz.}$$
$$= (1-a)\{1 + ab^2 + a^2b^2 + a^3b^4 + a^4b^4 + a^5b^6 + \text{enz.}\}$$
$$= (1-a)(1+ab^2)\{1 + a^2b^2 + a^4b^4 + \text{enz tot in 't oneindige}\}$$

of, daar de laatste factor eene convergerende reeks is, die door ontwikkeling der breuk $\frac{1}{1-a^2b^2}$ verkregen wordt,

$$\alpha = \frac{(1-a)(1+ab^2)}{1-a^2b^2};$$

en even zoo is

$$\beta = a(1-b) + ab(1-b) + a^2b^2(1-b) + a^3b^3(1-b) + \text{enz.}$$
$$= a(1-b)\{1 + b + a^2b^2 + a^2b^3 + a^4b^4 + a^4b^5 + \text{enz.}\}$$
$$= a(1-b)(1+b)\{1 + a^2b^2 + a^4b^4 + \text{enz. tot in 't oneindige}\}$$

of

$$\beta = \frac{a(1-b^2)}{1-a^2b^2};$$

hierin nu voor a en b hunne getallen waarden substituerende, komt er

$$\alpha = \frac{10355}{22631} \text{ en } \beta = \frac{12276}{22631},$$

en dus

$$\alpha : \beta = 10355 : 12276 = 5 : 6 \text{ ongeveer.}$$

De breuken α en β maken te zamen 1 uit, hetwelk te kennen geeft, dat noodwendig een van beide, A of B, het spel moet winnen, en dat er geen derde geval mogelijk is. Dit is, ook zonder berekening, gemakkelijk in te zien, want, schoon het onzeker is, bij den hoeveelsten worp A of B zal winnen, zoo moet dit toch eens gebeuren, wanneer men het spel onbepaald voortzet. Ja zelfs is het *zeer waarschijnlijk*, of bijna zeker, dat het spel, bij voorbeeld, vóór den 100sten worp, zal geëindigd zijn.

Om den graad van waarschijnlijkheid van dit laatste te onder-

zoeken, merken wij op, dat, volgens de derde kolom van bovenstaand tafeltje, de kans, dat het spel, bij den honderdsten worp, nog *niet* gewonnen zal zijn, uitgedrukt wordt door $\left(\frac{31}{36}\right)^{50} \times \left(\frac{30}{36}\right)^{50} = \left(\frac{31 \times 30}{36 \times 36}\right)^{50} = 0{,}0000000622 = \frac{.622}{10000000000}$ $< \frac{7}{100000067}$; dat is, in woorden, dat er meer dan honderd millioen tegen 7 te wedden is, dat het spel vóór of bij den honderdsten worp zal eindigen. Er zijn, in waarheid, verscheidene zaken, die voor *volkomen zeker* doorgaan, en echter zulk eenen graad van waarschijnlijkheid niet voor zich hebben.

Aanmerking *uit de oplossing van* C. F. Julius. Om de verhouding van α tot β te vinden, is het niet nodig de reeksen in de beide eerste kolommen van het tafeltje voorkomende te sommeren; het is namelijk klaar, dat, indien men de kansen van A en B bij de vier eerste worpen elk in het bijzonder met $\frac{31^2 \cdot 30^2}{36^4}$ vermenigvuldigt, men de kansen voor de vier volgende worpen zal verkrijgen; deze laatste kansen wederom met hetzelfde getal vermenigvuldigende, zal men even zoo de kansen voor de vier alsdan volgende worpen verkrijgen, en zoo vervolgens. Hieruit volgt, dat de sommen der beide reeksen tot elkander in dezelfde verhouding moeten staan als de sommen van derzelver vier eerste termen, en dat men zal moeten hebben

$$\alpha : \beta = \frac{5}{36} + \frac{31 \cdot 30^2}{36^3} \times \frac{5}{36} : \frac{31}{36} \times \frac{6}{36} + \frac{31 \cdot 30}{36^2} \times \frac{6}{36},$$

of

$$\alpha : \beta = 10355 : 12276,$$

even als boven.

II. Oplossing *van* L. J. Ulman.

Nemen wij als bekend aan, dat de kans om met twee gewone dobbelsteenen 6 oogen te werpen $\frac{5}{36}$ en die om 7 oogen te werpen $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ is; beschouwen wij dan de volgorde, hoe de beide spelers moeten werpen, namelijk A, B, B, A, A, B, B, *enz.* dan kunnen wij deze orde bij viertallen afdeelen, namelijk ABBA, ABBA, *enz.* en dan is het klaar, dat wanneer de vier eerste worpen gedaan zijn, zonder dat een van beide gewonnen heeft, de kans van beide spelers voor den vijfden worp zal staan even als

voor

voor den eersten worp; en even zoo voor den 9^{den}, 13^{den} worp enz.

Stellen wij dan de kans van A vóór den eersten worp $= x$, vóór den tweeden worp $= y$, vóór den derden $= z$, vóór den vierden $= v$, en vóór den vijfden $= x'$, dan zal $x = x'$ moeten zijn.

Vóór den eersten worp heeft A $\frac{5}{36}$ kans om te winnen, *geen* kans om door dien worp te verliezen, maar $\frac{31}{36}$ kans om den tweeden worp te moeten afwachten; dat is

$$x = \frac{5}{36} + \frac{31}{36} y.$$

Zoo nu het spel bij den eersten worp door A niet gewonnen is, dan heeft hij bij den tweeden worp geen kans om te winnen; maar de kans van B om te winnen is $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$; dus de kans van B om bij den tweeden worp *niet* te winnen $\frac{5}{6}$, en dit is de kans van A om bij den tweeden worp niet te verliezen, maar den derden worp te moeten afwachten, derhalve is

$$y = \frac{5}{6} z.$$

De derde worp staat insgelijks aan B, en derhalve wordt de kans van A weder uitgedrukt door

$$z = \frac{5}{6} v.$$

Bij den vierden worp echter is de kans voor A om te winnen weder $\frac{5}{36}$, en tevens $\frac{31}{36}$ om den vijfden worp te moeten doen, dienvolgens

$$v = \frac{5}{36} + \frac{31}{36} x'.$$

Door achtervolgende substitutie vinden wij nu

$$z = \frac{5}{6} v = \frac{25 + 155 x'}{216},$$

$$y = \frac{5}{6} z = \frac{125 + 775 x'}{1296},$$

$$x = \frac{5}{36} + \frac{31}{36} y = \frac{5}{36} + \frac{3875 + 24025 x'}{46656};$$

daar nu $x = x'$ is, zoo hebben wij terstond

$$46656 x = 6480 + 3875 + 24025 x,$$

waaruit men voor de gevraagde kans van A vindt

$$x = \frac{10355}{22631};$$

derhalve is de kans van B,

$$1 - \frac{10355}{22631} = \frac{12276}{22631};$$

en hunne kansen staan dus tot elkander als 10355 tot 12276; welk antwoord inderdaad ook door HUIJGENS gegeven is.

CCXLIX. VOORSTEL.

Door G. RAMAKERS.

A *wedt tegen* B, *dat hij uit* 40 *kaarten, dat is* 10 *van iedere soort, doch naar welgevallen door een geschud*, 4 *kaarten trekken zal, zoodat hij van elke soort eene kaart zal hebben. Men vraagt hoe hier de kansen van* A *en* B *tot elkander staan?*

OPGELOST *door* F. J. STAMKART, L. J. ULMAN, C. F. JULIUS, D. HOOLA VAN NOOTEN *en* G. RAMAKERS.

I. OPLOSSING *van* F. J. STAMKART.

Onderscheiden wij de vier soorten van kaarten door de letters h, k, r, s. Dewijl er nu van elke soort 10 zijn, zoo heeft A, bij den eersten trek, om eene kaart van eene bepaalde soort, bij voorbeeld, van de soort h te bekomen, vóór zich de kans $\frac{10}{40}$.

Deze trek gedaan, en eene kaart van de soort h verkregen zijnde, zoo heeft A, om nu eene kaart van de soort k te trekken, weder de kans $\frac{10}{39}$, omdat er nu nog slechts 39 kaarten in het spel zijn. En dewijl het trekken van k, bij den tweeden trek, moet zamenloopen met het trekken van h, bij den eersten, zoo is de kans, om, in twee trekken, eerst h en dan k te bekomen, vóór dat het spel nog begonnen is,

$$\frac{10}{40} \times \frac{10}{39}.$$

Wil nu A, bij den derden trek, eene kaart van de r hebben, dan heeft hij weder, nadat hij reeds h en k getrokken heeft, hiertoe de kans $\frac{10}{38}$; en de kans, om, in drie trekken, eerst h, dan k en dan r te trekken, is, voor den aanvang van het spel

$$\frac{10}{40} \times \frac{10}{39} \times \frac{10}{38}.$$

Eindelijk moet A, om te kunnen winnen, nu nog eene kaart van de s trekken, en hiertoe heeft hij, wanneer de drie eerste trekken hem h, k en r gegeven hebben, de kans $\frac{10}{37}$; alzoo zal de kans, om in vier trekken, kaarten van de vier soorten, en dat wel in de rangorde h, k, r, s, te bekomen, zijn:

$$\frac{10}{40} \times \frac{10}{39} \times \frac{10}{38} \times \frac{10}{37} = \frac{10^4}{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37}.$$

De

Dewijl echter de rangorde der vier soorten onbepaald is, en dewijl vier dingen 1. 2. 3. 4 malen onderling verschikt kunnen worden, zoo zal de kans van A, om bij dit spel te winnen, zijn:

$$\alpha = \frac{1.2.3.4}{40.39.38.37} \times 10^4 = \frac{1000}{9139}.$$

Daar nu, zoo A niet wint, B noodzakelijk winnen moet, en er geen derde geval mogelijk is, zoo zal, de kans om te winnen, voor B zijn

$$\beta = 1 - \alpha = \frac{8139}{9139},$$

en dus is

$$\alpha : \beta = 1000 : 8139.$$

Wij hadden tot het getal α nog op eene andere wijze kunnen geraken, te weten: bij het trekken van vier kaarten uit veertig, kunnen $\frac{40.39.38.37}{1.2.3.4}$ verschillende viertallen getrokken worden, omdat uit 40 dingen zoo vele verschillende vereenigingen, vier aan vier, mogelijk zijn; onder alle deze viertallen, heeft A nu alleen die voor zich, waarin, van elke soort van kaarten, eene voorkomt, en dit getal is klaarblijkelijk 10^4; want, neemt men drie bepaalde kaarten h, k, r, dan kan de vierde één van de 10 van de soort s zijn, en dit geeft 10 zamen zettingen. Stelt men nu, in elk dezer zamen zettingen, achtervolgende al de kaarten van de soort r, elk op zijne beurt, dan ontstaan daardoor, in het geheel, $10 \times 10 = 10^2$ zamenzettingen, enz. Diensvolgens is de kans van A

$$\alpha = 10^4 : \frac{40.39.38.37}{1.2.3.4}.$$

Men onderscheide hierbij echter wel de zamenzettingen of vereenigingen, vier aan vier, waarvan hier gesproken is, van de verschikkingen, vier aan vier.

Aanmerking. Moest, na elken trek, de getrokkene kaart weder bij het spel kaarten gevoegd, en het spel doorgeschud geworden zijn, alvorens de volgende trek geschiedde, dan zoude de kans van A iets minder zijn geweest, te weten:

$$\alpha = 1.2.3.4 \times \frac{10^4}{40^4} = \frac{1.2.3.4}{4^4} = \frac{3}{32}.$$

II. Oplossing van L. J. Ulman.

Stellen wij de vier soorten of kleuren voor, door de letters a, b, c en d. Daar het trekken der eerste kaart geheel onverschillig is, zoo stellen wij dat eene van de kleur a getrokken zij, zoodat er nog 9 kaarten van a en 10 van elke der kleuren b, c en d overblijven. Bij de tweede trekking nu mag A geene kaart van de kleur a bekomen; zijne kans hiervoor is $\frac{3 \times 10}{39} = \frac{30}{39}$. Laat hem dit gelukt zijn, en hij eene kaart van de kleur b getrokken hebben, dan blijven er nog 38 over, doch hij mag nu bij de derde trekking geene andere dan van de kleur c of d bekomen, waarvoor dus zijne kans is $\frac{2 \times 10}{38} = \frac{20}{38}$. De kans derhalve, om in de tweede en derde trekkingen achter een te slagen, is $\frac{30}{39} \times \frac{20}{38}$. Eindelijk laat hem dit gelukt zijn, en hij eene kaart van de kleur c getrokken hebben, dan blijven er nog 37 kaarten over, waaruit hij echter geene andere dan van de kleur d trekken moet; zijne kans hiertoe is $\frac{10}{37}$. Derhalve is de kans om in alle trekkingen te slagen $\frac{30 \times 20 \times 10}{39 \times 38 \times 37} = \frac{10^3 \times 3.2.1}{39 \times 38 \times 37}$ $= \frac{1000}{13 \times 19 \times 37} = \frac{1000}{9139}$. De kans zijner tegenpartij is dus $1 - \frac{1000}{9139} = \frac{8139}{9139}$, en derhalve staat $\alpha : \beta = 1000 : 8139$. B kan dus meer dan 8 tegen 1 wedden dat dit niet gelukken zal.

Aanmerking. Zij algemeen het getal der kleuren of soorten $= m$; het getal der kaarten van elke kleur $= n$, dan is de kans, om in m trekkingen telkens eene verschillende kleur te trekken,

$$\frac{(m-1)n}{mn-1} \times \frac{(m-2)n}{mn-2} \times \frac{(m-3)n}{mn-3} \times \text{enz.},$$

dat is:

$$\frac{n^{m-1} \times (m-1)(m-2)(m-3) \ldots\ldots 3 \times 2 \times 1}{(mn-1)(mn-2)(mn-3) \ldots\ldots (mn-[m-1])}.$$

Nemen wij b. v. een vol spel van 52 kaarten, en voegen wij

13 geheel witte kaarten daarbij, dan is de kans, om in 5 trekkingen vier verschillende kleuren en eene witte kaart te bekomen

$$\frac{13^4 \times 4.3.2.1}{64 \times 63 \times 62 \times 61} = \frac{28561}{635376},$$

en men kan dus meer dan 20 tegen 1 wedden, dat dit niet gebeuren zal.

CCL. VOORSTEL

Door G. RAMAKERS.

A en B genomen hebbende elk 12 penningen, spelen met drie dobbelsteenen, op deze voorwaarde: dat, als er 11 oogen geworpen worden, A éénen penning aan B moet geven; maar als er 14 oogen geworpen worden, dat dan B éénen penning aan A moet geven; en dat hij het spel winnen zal die het eerst al de penningen zal hebben. Wederom is de vraag naar de betrekkelijke kans van A en B?

OPGELOST *door* F. J. STAMKART, L. J. ULMAN, D. HOOLA VAN NOOTEN, C. F. JULIUS *en* G. RAMAKERS.

OPLOSSING *van* F. J. STAMKART.

Elke worp, met drie dobbelsteenen, kan $6 \times 6 \times 6 = 216$ verschillende uitkomsten opleveren, en van deze zijn er 27 die 11, en 15 die 14 oogen geven, hetgeen gemakkelijk gevonden wordt, indien men zoekt, op hoe velerlei wijzen de som van drie getallen, elk minder dan 7, 11 of 15 kan zijn. Korter kan men de getallen 27 en 15 vinden, door de toepassing eener formule van MOIVRE, onder andere, te vinden bij LACROIX, *Traité Élémentaire du Calcul des Probabilités*, *pag.* 82.

Bij elken worp heeft A dus, van de 216, alle even mogelijke gevallen, 15 voor zich, om eenen penning te winnen, en 27 tegen zich, waarin hij eenen penning verliest; B, daarentegen, wint in 27 en verliest in 15 gevallen eenen penning; terwijl in 174 gevallen A en B noch winnen noch verliezen.

Bij elken worp is alzoo:

de kans van A, om eenen penning te winnen, en van B, om er eenen te verliezen . . . . $\frac{15}{216} = \frac{5}{72} = a'$,

de kans van B, om eenen penning te winnen, en van A, om er eenen te verliezen . . . . $\frac{27}{216} = \frac{9}{72} = b'$,

de kans, dat, noch A noch B, winnen of verliezen . $\frac{174}{216} = \frac{58}{72}$.

Was

Was nu het spel tot een zeker aantal worpen bepaald, dan zoude deze laatste kans, als zijnde de grootste, van den meesten invloed zijn, en het zoude ligt gebeuren kunnen, dat noch A noch B al de penningen zoude winnen; doch alzoo het spel onbepaald voortgezet wordt, zoo kunnen wij al de worpen, die geen 11 of 14 oogen geven, als *niet gedaan* beschouwen, omdat door dezelve het aantal penningen van A of B toch niet verandert. Op deze wijze wordt het aantal mogelijke en afdoende gevallen bepaald tot $15 + 27 = 42$; 15 voor A en 27 voor B, en dan is, bij elken worp:

de kans van A, om te winnen, en van B, om te verliezen $\frac{15}{42} = \frac{5}{14} = a$,

de kans van B, om te winnen, en van A, om te verliezen $\frac{27}{42} = \frac{9}{14} = b$.

a en b zijn nu, hetgeen men de *betrekkelijke* kansen van A en B noemt, in onderscheiding van a' en b', die de *volstrekte* kansen geheeten worden.

Zelfs nog, na het uitsluiten der niet afdoende gevallen, kan het spel onbepaald voortduren, want, indien het, bij voorbeeld, gebeurde, dat A bij den eersten, B bij den tweeden, A weder bij den derden worp enz. eenen penning won, dan is het klaar, dat, na $2n$ worpen, A en B nog ieder 12 penningen zouden hebben; en dit kan ook nog op vele andere wijzen gebeuren. Schoon nu al de kans, op zulk een onbepaald voortduren, niet groot schijnt te zijn, zoo is het echter mogelijk.

Dit opgemerkt zijnde, gaan wij met de verdere oplossing voort, en zoeken wij daartoe naar de kans van A, om de 24 penningen te bekomen; welke kans in die van B zal overgaan, als men, in de te vindene uitdrukking, a in b en b in a verandert. Het is vooreerst klaar, dat A het geheele spel niet kan winnen, vóór dat er 12 afdoende worpen gedaan zijn, welke, indien zij alle ten voordeele van A mogten uitvallen, hem 12 penningen zouden doen winnen; de waarschijnlijkheid hiervan is, ten duidelijkste . . . . a^{12}.

Zoo A in de twaalf eerste worpen, geene 12 penningen wint, zoo kan hij er toch 11 gewonnen en ééne verloren hebben, en dus in het geheel 22 penningen bezitten; en dit kan op een zeker aantal wijzen alzoo gebeuren. Laat dit aantal x_1 zijn, dan hebben wij, voor de kans van A, om, na twaalf worpen, 22 pennin-

ningen te hebben $x_1 a^{11} b$. Won A dan nog de twee volgende worpen, dan zoude hij al de penningen hebben; de kans hiervan is . . . . $x_1 a^{11} b \times a^2 = a^{12} \times x_1 ab$.

Wederom, zoo het spel, met den 14^den^ worp, niet ten voordeele van A eindigt, dan kan A toch van de 14 worpen er 12 gewonnen en 2 verloren hebben, en dan alzoo 22 penningen hebben, hetwelk weder, op een zeker aantal x_2 wijzen, kan gebeuren. De kans hiervan is alzoo $x_2 a^{12} b^2$. Wint A nu nog twee penningen bij de twee volgende worpen, dan zoude weder het spel te zijnen voordeele geëindigd zijn. De kans dus van A, om bij den 16^den^ worp 24 penningen te bezitten is

$$x_2 a^{12} b^2 \times a^2 = a^{12} \times x_2 a^2 b^2.$$

Aldus voortgaande, ziet men, dat de kans van A, om bij den $(2n+12)$^den^ worp te winnen, zijn zal $a^{12} \times x_n a^n b^n$, want het is duidelijk, dat het spel bij geenen onevenen worp eindigen kan.

Telt men nu alle deze kansen van A te zamen, dan vindt men voor de geheele kans van A

$\alpha = a^{12}(1 + x_1 ab + x_2 a^2 b^2 + x_3 a^3 b^3 +$ *enz. tot in het oneindige*);

De vorm der uitdrukking voor de kans van A is alzoo bepaald, en om die kans te kunnen berekenen, ontbreekt er nog maar aan, dat men de waardijen der getallen x_1, x_2, x_3, *enz*, (die ten klaarste alleen van het getal 12 en het aantal worpen, doch niet van a of b afhangen) weet te bepalen; doch dit is, wanneer men het voorstel algemeen neemt, en de spelers een ongelijk getal penningen geeft, zoo gemakkelijk niet. Wij zullen, in de *Aanmerking* hier onder, alleen doen zien hoe, in elk bijzonder geval, x_1, x_2, x_3, *enz.* gevonden kunnen worden. De betrekkelijke kans van A en B wordt echter gemakkelijk bepaald, zonder dat men x_1, x_2, x_3, *enz.* behoeft te kennen, want het is duidelijk, dat de kans van B, veranderende a in b en b in a zijn zal:

$\beta = b^{12}(1 + x_1 ab + x_2 a^2 b^2 + x_3 a^3 b^3 +$ *enz. tot in het oneindige*);

waaruit volgt,

$$\alpha : \beta = a^{12} : b^{12} = 5^{12} : 9^{12} = 1 : 1156,8.;$$

dat is: dat de kans van B, bij dit spel, meer dan 1156 maal grooter dan die van A is.

AAN-

en, voor elken onevenen worp, het getal

penningen van A	8,	6,	4,	2,	0,
B	0,	2,	4,	6,	8.

Het valt, bij een weinig nadenken, gemakkelijk, de achtervolgende kansen, bij de verdere worpen, zonder berekening, verder uit te schrijven; want vooreerst, valt de wet der exponenten van a en b terstond in het oog en ten andere, leidt men uit de coëfficienten, tot den $(2n+1)^{den}$ worp behoorende, die voor de beide volgende worpen op deze wijze af:

		Coëfficienten.			
$(2n+1)^{de}$ worp, P,	Q,	R,	S,		T,
$(2n+2)^{de}$ worp,	0+Q,	Q+R,	R+S,	S+0,	
$(2n+3)^{de}$ worp, Q	(0+Q)+(Q+R),	(Q+R)+(R+S),	(R+S)+(S+0)		S;

of anders, hetgeen gemakkelijker is, men slaat den $(2n+2)^{den}$ worp over, en berekent terstond de coëfficienten voor den

$(2n+3)^{den}$ worp, Q | 0+2Q+R, Q+2R+S, R+2S+0 | S;

wanneer echter de som der penningen van A en B een oneven getal is, dan kan men geenen worp overslaan, omdat alsdan A en B niet, *bij denzelfden worp.*, het spel kunnen verliezen of winnen, maar dan kan A, bij voorbeeld, bij zekeren worp, het spel verliezen of B winnen, en, bij den volgenden worp, kan A het spel winnen of B verliezen. Tellen wij nu al de kansen van A en B, waarbij zij het spel kunnen winnen, bij elkander op, dan bekomen wij voor de geheele kansen van A en B

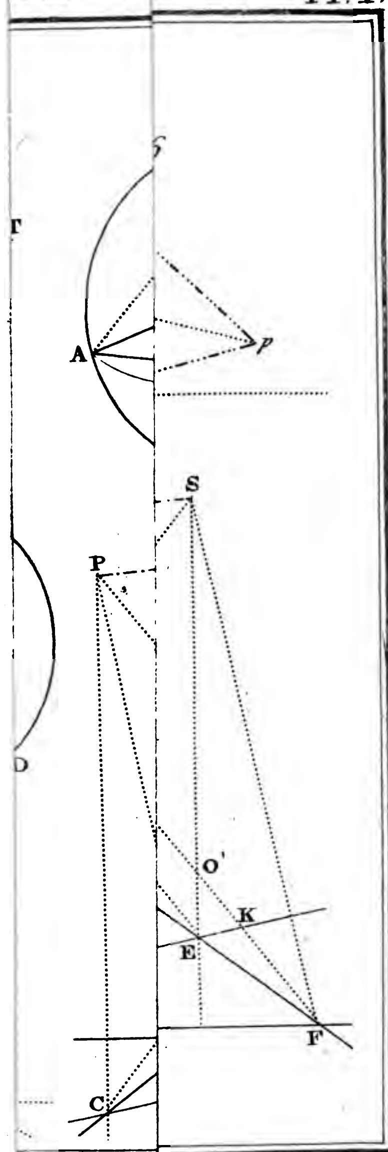
$$\alpha = a^5 + 5a^6b + 20a^7b^2 + 74a^8b^3 + enz.$$
$$= a^5(1 + 5ab + 20a^2b^2 + 74a^3b^3 + enz.),$$
$$\beta = b^3 + 3ab^4 + 9a^2b^5 + 28a^3b^6 + 90a^4b^7 + enz.$$
$$= b^3(1 + 3ab + 9a^2b^2 + 28a^3b^3 + 90a^4b^4 + enz.)$$

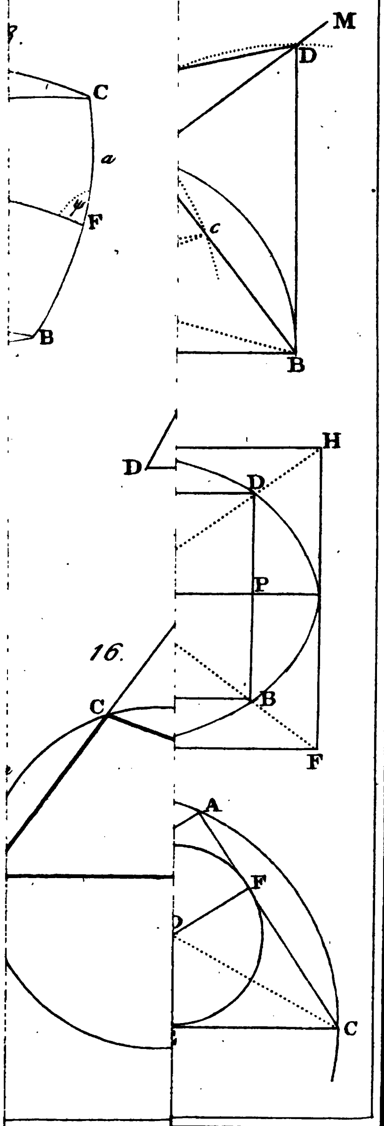
Hier zijn de waardijen van x_1, x_2, x_3, *enz.* voor A en B ongelijk, doch men ziet tevens, dat dit daar van daan komt, dat wij A en B een ongelijk getal penningen gegeven hebben, en dat, wanneer de penningen gelijkelijk verdeeld zijn, voor A en B ook x_1, x_2, x_3, *enz.* gelijk moeten worden, even als wij zulks hier boven aangenomen hebben.

Lacroix zegt, in het boven aangehaalde werk, pag. 97 en 98, van de algemeene oplossing van het behandelde voorstel sprekende: „ Mais la solution complète de ce problème, *l'un des plus „ difficiles qu'on se soit proposés sur ce sujet*, ne sauront trouver „ place dans ce traité." Het bovenstaande echter kan tot zulk eene algemeene oplossing geleiden, waarbij men van de théorie der wederkeerige reeksen konde gebruik maken. —

GE V

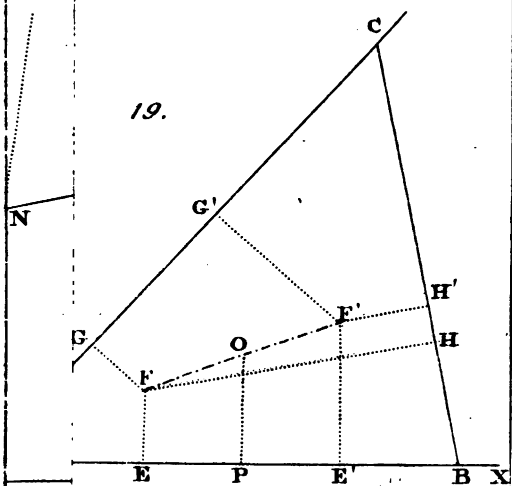
Pl. I.

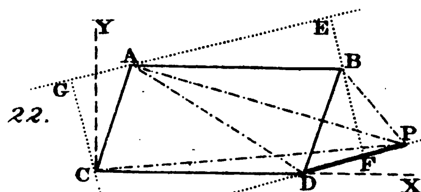


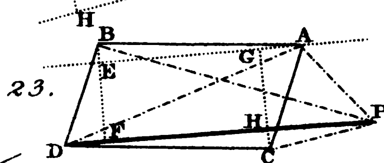

M
D
C
a
F
c
B
B
H
D
D
P
16.
C
B
F
A
F
C

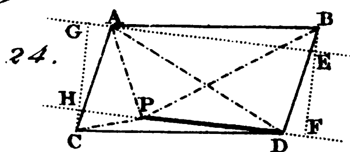
UN

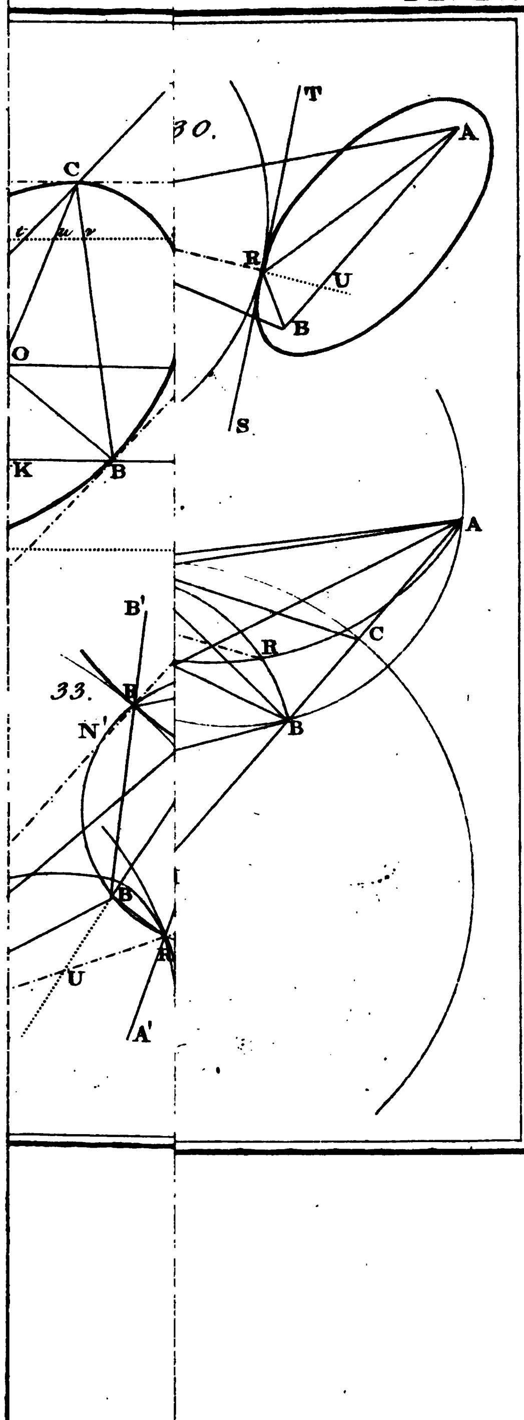
Pl. III.


19.
C
G'
H'
F'
G
O
H
F
E
P
E'
B
X
N


22.
Y
E
A
B
G
P
C
F
D
X
H

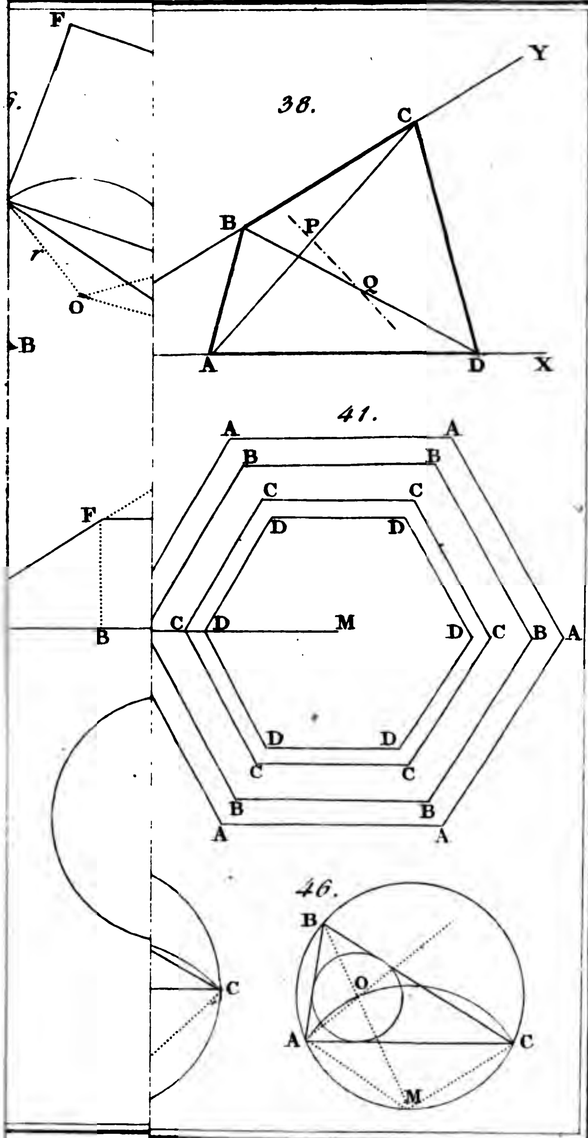

23.
B
A
G
E
P
H
F
D
C


24.
A
B
G
E
H
P
F
C
D
X

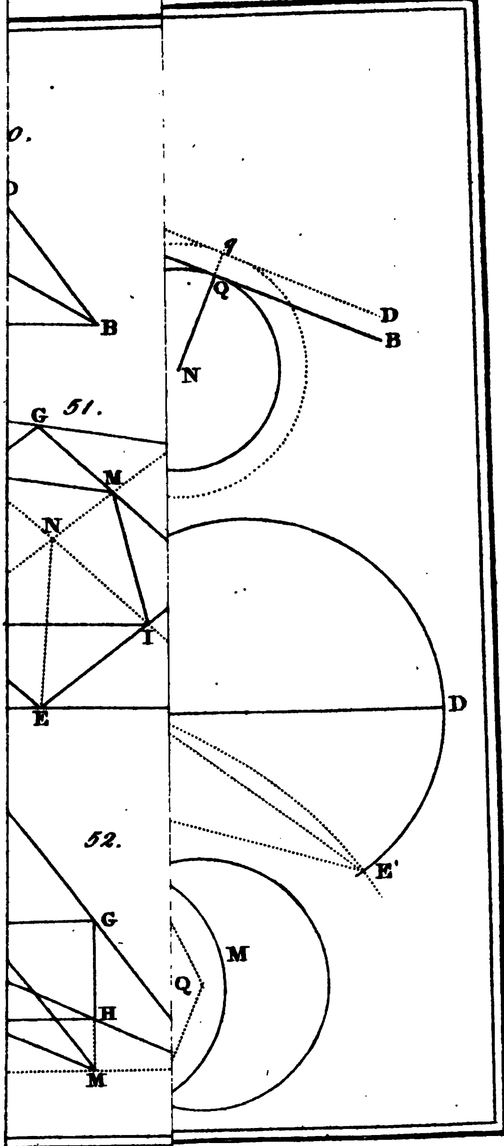

30.
T
A
C
t u v
R
U
B
O
S
K
B
A
B'
R
C
33.
R
N'
B
B
R
U
A'

UNDI

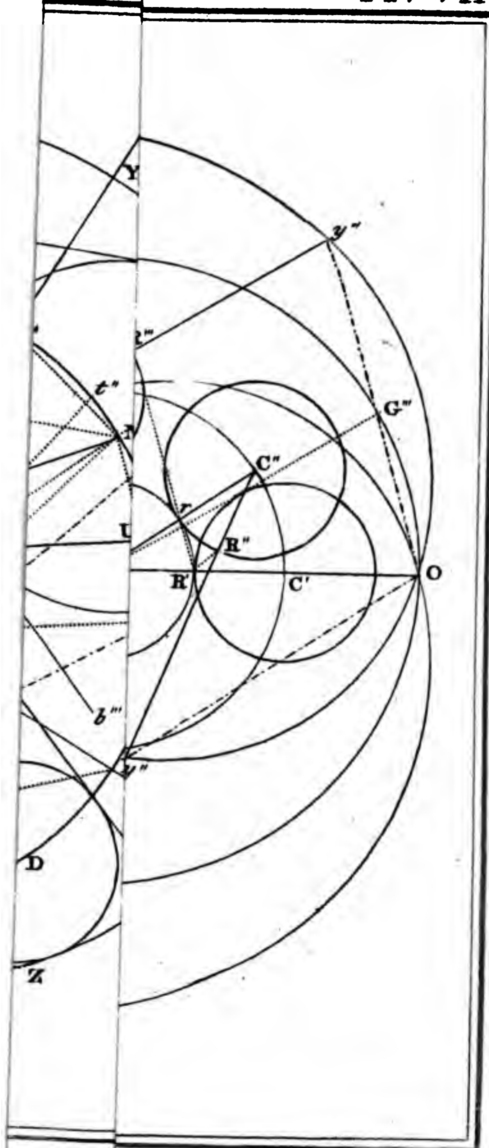
Pl. V.

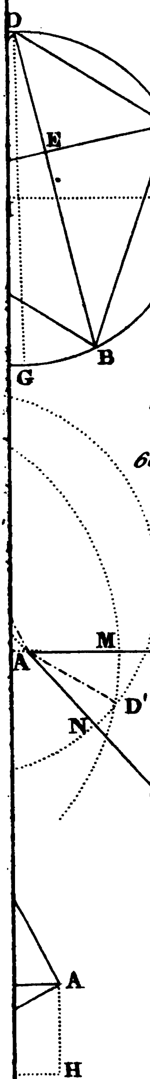


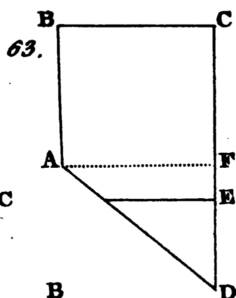
F
6.
r
O
B
38.
Y
C
B
P
Q
A
D
X
41.
A A
B B
C C
D D
C D M D C B A
D D
C C
B B
A A
F
B
C
46.
B
O
A
C
M

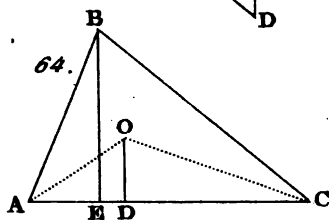

0.
D
B
q
Q
D
B
N
G
51.
M
N
I
E
D
52.
E'
G
M
Q
H
M

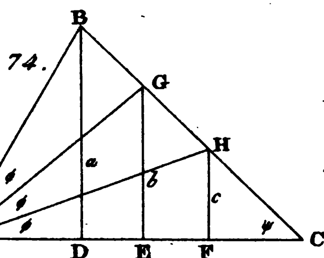
UND

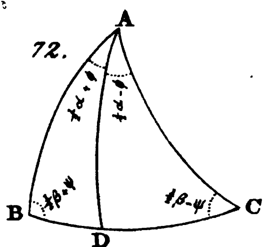



D
E
C
B
G
6
M
A
D'
N
A
H
B


B
C
63.
A
F
E
D


B
64.
O
A
E
D
C


B
74.
G
H
a
b
c
C
D
E
F


A
72.
B
D
C

DIGE

